

*Казахская Академия Труда и Социальных
Отношений*

С.Б. Дубовиченко

**МЕТОДЫ РАСЧЕТА
ЯДЕРНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК**

Модели - методы - программы

*Алматы
2006*

УДК 378(075.8): 681.14: 517.9: 539.17: 539.14
ББК 22.383
Д 79

Печатается по решению Ученого Совета
Казахской Академии Труда и Социальных отношений

Рецензенты:

Директор Института проблем информатики и управления МОН РК, академик Международной инженерной академии РК, доктор физико - математических наук,
профессор **Айдарханов М.Б.**,
директор астрофизического института МОН РК, академик Международной академии информатизации РК, доктор физико - математических наук,
профессор **Чечин Л.М.**,
заведующий кафедрой КТПиП Каз.НТУ, академик и вице-президент Международной академии информатизации РК, доктор технических наук,
профессор **Цеховой А.Ф.**,
заведующая кафедрой Информатики Каз.НУ, доктор физико - математических наук,
профессор **Балакаева Г.Т.**

Дубовиченко С.Б.

Д 79 Методы расчета ядерных характеристик. Модели - методы - программы. Алматы: Изд. КАЗАТИСО, 2006г. - 311с.

ISBN 9965-9450-8-X

В книге изложены математические методы расчета ядерных сечений и фаз упругого рассеяния, энергии и характеристик связанных состояний в двух- и трехчастичных ядерных системах, когда потенциалы взаимодействия содержат не только центральную, но и тензорную компоненту. Приведены описания математических численных методов расчета и компьютерные программы на алгоритмическом языке "Бейсик" в среде компилятора "Turbo Basic" фирмы "Borland" для компьютеров типа IBM PC AT.

Для численных решений исходных уравнений Шредингера использован конечно - разностный и вариационный методы, а также метод Рунге - Кутты с автоматическим выбором шага по заданной точности результатов для фаз рассеяния и энергии связи. Приведено описание не стандартных методов решения системы уравнений Шредингера на связанные состояния и альтернативный методу Шмидта, метод решения обобщенной матричной задачи на собственные значения.

Разработанные программы позволяют определять волновые функции относительного движения ядерных фрагментов, нормированные на правильную асимптотику с учетом кулоновского взаимодействия. Приведены программы извлечения ядерных фаз (фазового анализа) из дифференциальных сечений упругого рассеяния.

Книга может быть использована в качестве учебника по численным математическим методам для студентов и аспирантов физических и математических специальностей высших учебных заведений.

Д $\frac{1604080000}{00(05) - 06}$

© Каз.АТИСО, 2006

© Дубовиченко С.Б., 2006

ISBN 9965-9450-8-X

ББК 22.383

*Автор выражает искреннюю благодарность
А.В. Джазаирову - Кахраманову и компании
«Tandem Translations» за оказание спонсорской
помощи при издании данной книги*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Множество задач теоретической ядерной физики, особенно в области легких атомных ядер, требует умения решать уравнение Шредингера или связанную систему уравнений такого типа. Результатом решения является волновая функция, которая описывает квантовое состояние некоторой системы ядерной частиц и, в принципе, содержит всю информацию о таком состоянии.

Существует довольно много различных математических методов решения дифференциальных уравнений или их систем второго порядка, которым является уравнение Шредингера. Однако, в математической литературе обычно приводятся довольно абстрактные методы решений таких уравнений, которые бывает достаточно сложно применить для решения конкретного уравнения, типа уравнения Шредингера. Проблему обычно составляет выбор наиболее оптимального математического метода, примененного для рассмотрения определенных задач, основанных на решениях уравнения Шредингера.

Именно решению этих проблем и посвящена данная книга, которая описывает некоторые математические методы, непосредственно применимые для нахождения волновых функций из решений уравнения Шредингера или систем таких уравнений в задачах ядерной физики. Рассматриваются математические численные и вариационные методы решений, применимые в задачах дискретного и непрерывного спектра состояний ядерных частиц и позволяющие получать конечные результаты с практически любой точностью.

На основе этих методов рассматривается возможность написания компьютерных программ на языке Basic для компилятора Turbo Basic фирмы Borland, которые реально позволяют решать все рассмотренные здесь задачи ядерной физики. К таким задачам относятся вариационные методы, применяемые в фазовом анализе при рассеянии ядерных частиц с разным спином, нахождение полных сечений фотоядерных процессов на легких ядрах, состояния взаимодействующих квантовых частиц, когда в ядерном потенциале присутствует тензорная компонента и т.д..

Автор надеется, что данная книга, в какой-то степени, сможет восполнить пробел, существующий в имеющейся литературе по описанию математических и численных методов и подходов, алгоритмов и компьютерных программ, используемых для решения определенного круга задач ядерной физики легких атомных ядер.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ	12
1.1 Общие методы решения уравнения Шредингера	12
1.1.1 Центральные действительные потенциалы.....	12
1.1.2 Центральные комплексные потенциалы.....	16
1.2 Численные методы решения уравнения Шредингера.....	19
1.2.1 Центральные действительные потенциалы.....	19
1.2.2 Центральные комплексные потенциалы.....	21
1.2.3 Метод Рунге – Кутты для центральных действительных потенциалов.....	21
1.2.4 Методы расчета кулоновских фаз	24
1.2.5 Методы расчета кулоновских функций	29
1.3 Программа расчета фаз рассеяния для центральных	33
действительных потенциалов.....	33
1.5 Программа расчета фаз рассеяния для центральных комплексных потенциалов	39
2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ТЕНЗОРНОЙ КОМПОНЕНТОЙ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ	46
2.1 Общие методы решение системы уравнений Шредингера.....	46
2.2 Численные методы решения системы уравнений Шредингера.....	51
2.3 Физические характеристики рассеяния при низких энергиях.....	55
2.3.1 Центральные потенциалы.....	56
2.3.2 Потенциалы с тензорной компонентой	59
2.4 Программа расчета ядерных фаз рассеяния для потенциалов с тензорной компонентой.....	61
3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В ДИСКРЕТНОМ.....	69
СПЕКТРЕ	69
3.1 Общие методы решения уравнения Шредингера	69
3.2 Физические характеристики связанных состояний.....	71
3.3 Вариационные методы решения уравнения Шредингера.....	74
3.4 Методы решения обобщенной задачи на собственные значения	77
3.5 Вариационная программа решения уравнения Шредингера.....	86
3.6 Численные методы решения уравнения Шредингера.....	96

3.6.1 Методы расчета Гамма функции	98
3.6.2 Методы расчета функций Уиттекера.....	99
3.7 Численная программа решения уравнения Шредингера	101
4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА В ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ТЕНЗОРНОЙ КОМПОНЕНТОЙ	106
4.1 Общие методы решение уравнения Шредингера	106
4.2 Физические результаты для связанных состояний.....	107
4.3 Численные методы решения системы уравнений Шредингера.....	111
4.4 Численная программа решения уравнения Шредингера	113
5. МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОЙ ТРЕХТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ	122
5.1 Общие методы трехтельной модели	122
5.2 Вариационная программа трехтельной модели	132
5.3 Физические результаты трехтельных расчетов	142
6. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЙ ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЯ	146
6.1 Система частиц с нулевым полным спином	146
6.2 Система частиц с полным спином $1/2$	153
6.3 Система частиц с единичным полным спином.....	159
6.4 Система частиц с единичным спином и тензорными силами	169
6.5 Нетождественные частицы со спином $1/2$	180
6.6 Нетождественные частицы со спином $1/2$ и спин - орбитальными силами.....	184
6.7 Нетождественные частицы со спином $1/2$, спин - орбитальными силами и смешиванием триплет - синглетных состояний	190
7. МЕТОДЫ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ	199
7.1 Система частиц с нулевым спином.....	199
7.2 Система частиц с полным спином $1/2$	246
7.3 Нетождественные частицы с полуцелым спином	257
7.4 Частицы с полуцелым спином и синглет - триплетным смешиванием	264
8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ	273
8.1 Векторные соотношения.....	273
8.2 Фоторазвал и радиационный захват	275
8.3. Программа расчетов фотоядерных процессов	279
ЛИТЕРАТУРА	295

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время не существует общей и законченной теории легких атомных ядер, и для анализа различных ядерных характеристик используются различные физические модели и методы. Хотя они часто позволяют получить хорошие результаты, нет целостной картины взаимодействий составных ядерных частиц в континууме и связанных состояниях, т.е. в непрерывном и дискретном спектре решений уравнения Шредингера, которое описывает такие системы [1,2].

Поэтому большой интерес представляет изучение возможностей потенциальной кластерной модели на основе межкластерных или межнуклонных взаимодействий с запрещенными состояниями. Такие потенциалы позволяют эффективно учитывать принцип Паули в межкластерных (нуклон - нуклонных) взаимодействиях, не требуя явной антисимметризации волновых функций системы, что заметно упрощает все компьютерные вычисления [3,4,5].

Ядерные межкластерные потенциалы, согласованные с фазами упругого рассеяния соответствующих ядерных частиц, должны быть способны воспроизвести свойства связанных состояний некоторых ядер в кластерной модели. Это можно рассматривать, как предпосылки к совместному описанию континуума и дискретного спектра на основе единых гамильтонианов в уравнении Шредингера, которое описывает данные системы .

Расчеты, проводимые на основе выбранных представлений, сравниваются с имеющимися экспериментальными данными, что позволяет сделать определенные выводы о качестве используемых физических моделей. И, тем самым, отобрать представления и подходы, которые приводят к лучшему согласию с экспериментом, а значит, максимально приближены к реальной ситуации, существующей в атомном ядре.

В начале 70г. в работах [6,7,8] впервые было показано, что фазы упругого рассеяния легких кластерных систем могут быть описаны на основе глубоких чисто притягивающих потенциалов Вудс - Саксоновского типа, которые содержат связанные запрещенные состояния (ЗС). Структура ЗС определяется перестановочной симметрией волновых функций (ВФ) системы относительно нуклонных перестановок. Поведение фаз рассеяния при нулевой энергии для таких взаимодействий подчиняется обобщенной теореме Левинсона [6-8,9,10,11]

$$\delta_L = \pi(N_L + M_L) ,$$

где N_L и M_L число запрещенных и разрешенных связанных со-

стояний.

Фазы при больших энергиях стремятся к нулю все время оставаясь положительными. Такой подход, по - видимому, можно рассматривать, как альтернативу часто используемой концепции отталкивающего кора, который вводится для качественного учета принципа Паули без выполнения полной антисимметризации ВФ. Радиальная ВФ разрешенных состояний (РС) потенциалов с ЗС осциллирует на малых расстояниях, а не вымирает, как это было для взаимодействий с кором. Благодаря этому в рассмотрение включается внутренняя структура ядра, которая определяется поведением волновой функции системы в области малых расстояний.

В работах [9,12,13,14,15,16,17,18,19] были параметризованы межкластерные центральные гауссовы потенциалы взаимодействия, правильно воспроизводящие фазы упругого ${}^4\text{He}^2\text{H}$ рассеяния при низких энергиях и содержащие запрещенные состояния. Показано, что на основе этих потенциалов в кластерной модели можно воспроизвести основные характеристики связанных состояний (СС) ядра ${}^6\text{Li}$, вероятность кластеризации которого в рассматриваемом канале сравнительно высока. Все состояния в такой системе оказываются чистыми по орбитальным схемам Юнга [6-19] и потенциалы, полученные из фаз рассеяния, можно непосредственно применять для описания характеристик основного состояния (ОС) ядра [20,21,22,23,24,25,26,27,28].

Для более легких кластерных систем вида N^2H , ${}^2\text{H}^2\text{H}$, p^3H , p^3He и т.д. в состояниях рассеяния с минимальным спином уже возможно смешивание по орбитальным симметриям и ситуация оказывается более сложной. В состояниях с минимальным спином, в непрерывном спектре разрешены две орбитальные симметрии с различными схемами Юнга, в то время, как связанным основным состояниям, по-видимому, соответствует только одна из этих схем [2,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41]. Поэтому потенциалы, непосредственно полученные на основе экспериментальных фаз рассеяния, эффективно зависят от различных орбитальных схем и не могут в таком виде использоваться для описания характеристик основного состояния. Из таких взаимодействий, необходимо выделять чистую компоненту, применимую уже при анализе характеристик связанных состояний.

В более тяжелых ядерных системах N^6Li , N^7Li и ${}^2\text{H}^6\text{Li}$ также реализуется подобная ситуация [2,42,43,44,45], когда в некоторых случаях различные состояния оказываются смешанными по схемам Юнга. В этих работ были впервые получены чистые по схемам Юнга потенциалы взаимодействия для перечисленных выше трех ядерных систем. Они, в основном, оказались способны правильно описывать как характеристики рассеяния, так и свойства связанных

состояний соответствующих ядер.

Таким образом, большинство задач ядерной физики требуют знания волновой функции относительного движения частиц, которые участвуют в столкновениях (процессы рассеяния) или определяют связанное состояние ядра, т.е. являются внутренними фрагментами полной системы. Эту функцию можно найти из решений уравнения Шредингера для каждой конкретной физической задачи в дискретном или непрерывном спектре, если известен потенциал взаимодействия этих частиц.

Ядерный потенциал взаимодействия частиц (в задачах рассеяния или связанных состояниях) заведомо не известен, и определить его напрямую какими - либо способами не представляется возможным. Поэтому выбирается определенная форма его зависимости от расстояния (например, гауссова или экспоненциальная), и по некоторым ядерным характеристикам (обычно, это фазы ядерного рассеяния) фиксируются его параметры, так чтобы он описывал эти характеристики. В дальнейшем такой потенциал можно применять для расчетов любых других ядерных характеристик, например, энергий связи рассматриваемых ядер и свойств их связанных состояний или сечений различных реакций [2].

Практически весь круг, рассмотренных выше физических задач, требует умения решать уравнение Шредингера или связанную систему этих уравнений в случае тензорных ядерных сил с определенными начальными и асимптотическими условиями. В принципе, это чисто математическая задача из области математического моделирования физических процессов и систем. Существующие методы его решения [46,47,48,49,50,51,52,53] не всегда приводят к устойчивой численной схеме, а обычно используемые алгоритмы либо приводят к не высокой точности результатов, либо к переполнению в процессе работы компьютерных программ.

Решать уравнения Шредингера для связанных состояний и рассеяния можно, например, методом Рунге - Кутты или конечно - разностным методом [54,55]. Такие методы позволяют найти собственные, волновые функции и собственные энергии квантовой системы, если использовать предложенную нами комбинацию численных и вариационных методов и контролировать точность решения уравнения или системы связанных уравнений Шредингера методом невязок [56].

Описанию этих математических и численных методов, некоторых программных алгоритмов и самих компьютерных программ на языке Turbo Basic, непосредственно применяемых для решения уравнения Шредингера или системы таких уравнений в задачах ядерной физики и будет посвящена данная книга.

Перейдем теперь к непосредственному рассмотрению основных методов и подходов, используемых в потенциальной кластерной модели, где считается, что атомное ядро состоит из двух бесструктурных фрагментов, свойства которых совпадают или близки к свойствам соответствующих ядер в свободном состоянии. Поэтому для многих характеристик кластеров, например, зарядового радиуса, кулоновского формфактора, квадрупольного и магнитного моментов, других характеристик связанных фрагментов принимаются характеристики не взаимодействующих легких ядер ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{H}$ и ${}^2\text{H}$ и т.д. Классическим образцом кластерного объекта являются ядра ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ в которых велика вероятность кластеризации в ${}^4\text{He}{}^2\text{H}$ и ${}^4\text{He}{}^3\text{H}$ каналах.

Полная волновая функция двухкластерной системы записывается в простом виде

$$\Psi = A \left(\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2) \Psi_{JM}(\vec{R}) \right).$$

Здесь A - оператор антисимметризации волновых функций по всем возможным перестановкам нуклонов между разными кластерами, если волновые функции кластеров, зависящие от своих внутренних координат x_i выбраны в правильном антисимметризованном виде и Ψ_{JM} - функция относительного движения, которая разделяется на радиальную $\Phi_L(R)$ и спин - угловую Y_{JM}^{LS} функции

$$\Psi_{JM}(\vec{R}) = \sum_L Y_{JM}^{LS}(\hat{R}) \Phi_L(R) .$$

Спин - угловая часть волновой функции, определяемая в виде

$$Y_{JM}^{LS}(\hat{R}) = \sum_{m\sigma} (LmS\sigma|JM) Y_{Lm}(\hat{R}) \chi_{s\sigma}(\sigma)$$

связывает орбитальную Y_{Lm} и спиновую $\chi_{s\sigma}$ компоненты волновой функции ядерной системы.

Радиальная волновая функция относительного движения кластеров в ядре $\Phi_L(R)$ при заданном орбитальном моменте L зависит только от одной переменной R - радиус - вектора относительного движения фрагментов и является решением уравнения Шредингера

$$u'_L(r) + (k^2 + V(r))u_L(r) = 0 \quad , \quad \Phi_L = \frac{u_L}{r} \quad ,$$

где $V(r)$ - потенциал ядерного взаимодействия с учетом кулоновского и центробежного членов, $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$ - волновое число относительного движения фрагментов, μ - приведенная масса ядра в рассматриваемом кластерном канале, E - энергия относительного движения в центре масс кластерной системы.

В том случае если ядерные ассоциации сильно обособлены роль эффектов антисимметризации, т.е. обменных процессов между кластерами оказывается малой и действием оператора A можно пренебречь. Однако, сказать заранее какова роль этих эффектов достаточно сложно. Вообще говоря, в каждом конкретном случае надо рассматривать точную антисимметризованную волновую функцию системы и только сравнивая ее с функцией без антисимметризации можно сделать на этот счет определенные выводы.

Процедура антисимметризации волновой функции обычно оказывается довольно сложной, поэтому часто используют приближенные способы учета принципа Паули. В частности, в течении многих лет в потенциал межкластерного взаимодействия вводили отталкивающий кор, который не позволяет кластерам слиться в некоторую общую нуклонную систему, обеспечивая тем самым явное разделение ядра на два фрагмента. Использование потенциалов с кором приводило к вымиранию волновой функции относительного движения кластеров на малых расстояниях.

В последствии появился другой класс ядерных глубоких чисто притягивающих потенциалов, содержащих запрещенные состояния, благодаря которым обеспечивается выполнение принципа Паули.

Автор выражает большую признательность Неудачину В.Г., Кукулину В.И., Краснопольскому В.М., Померанцеву В.Н. (Научно - исследовательский институт ядерной физики, МГУ им. М. Ломоносова, Москва), [Часникову И.Я.] и Босс Э.Г. (Физико - технический институт МОН РК, Алматы), Буртебаеву Н.Т. и Дуйсебаеву А.Д. (Институт ядерной физики Национального ядерного центра РК, Алматы), Страковскому И.И. и Парке В.С. (Ядерный центр Вашингтонского университета, США), Узикову Ю.Н. (Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, РФ), Кобушкину А.П. (Институт теоретической физики им. Боголюбова, Украина) за многочисленные и исключительно полезные обсуждения затронутых в работе вопросов. А так же Джазаирову - Кахраманову А.В. (Казахский Национальный Университет им. аль - Фараби, Алматы) за большую помощь в проведении численных расчетов и обсужде-

нии полученных результатов.

Кроме того, выражаю благодарность Гарсону М., Де Ягеру К., Николенко Д.М. и Гилману Р. за предоставленные новые экспериментальные данные по поляризациям и формфакторам дейтрона. Виринге Р. и Маклейдту Р. за волновые функции дейтрона для Аргонского и Боннского потенциалов.

Особую благодарность автор выражает академику МАИи РК, д.ф.-м.н., профессору Чечину Л.М. за постоянную помощь, огромную поддержку и неоценимое содействие настоящей работе.

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Множество задач ядерной физики могут быть рассмотрены при использовании только центральной части ядерных сил [57,58]. В таком случае имеется одно уравнение Шредингера или система не связанных уравнений (при учете спин - орбитального взаимодействия) и математическая задача решается достаточно просто. Учет тензорной компоненты ядерных сил приводит нас к системе связанных уравнений Шредингера [59,60], решение которой несколько сложнее, но вполне выполнимо описанными далее методами.

В этой главе мы приведем математические и вычислительные методы, используемые при решении уравнений Шредингера для центральных потенциалов при положительных собственных значениях и их применение для рассмотрения квантовой задачи рассеяния частиц и расчетов действительных фаз ядерного рассеяния.

1.1 Общие методы решения уравнения Шредингера

Здесь будет рассмотрена общая постановка задачи для решения уравнения Шредингера при положительных непрерывных собственных значениях и определены начальные и граничные условия, при которых решается такая задача, применительно к описанию физических процессов и состояний, а именно, для расчета ядерных фаз рассеяния.

1.1.1 Центральные действительные потенциалы

Уравнение Шредингера для центральных сил взаимодействия между двумя ядерными частицами без учета спин - орбитального и тензорного потенциалов имеет следующий вид [57,58,61,62]

$$u''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{cul}(r) - L(L+1)/r^2]u(r) = 0, \quad (1.1)$$

где r – скалярное относительное расстояние между частицами в Фм. (1 Фм - Ферми = 10^{-15} м.),

u – решения уравнения, т.е. волновые функции (ВФ), а u'' – ее вторая производная,

$V_{cul}(r) = 2\mu / \hbar^2 Z_1 Z_2 / r$ - кулоновский потенциал, приведенный к размерности Фм^{-2} ,

\hbar - постоянная Планка = $1.055 \cdot 10^{-34}$ Дж. с,

Z_1 и Z_2 – заряды частиц в единицах элементарного заряда (1 э.з. - элементарный заряд = $1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл),

константа $\hbar^2/M_N = 41.4686$ или 41.47 МэВ Фм^2 (1 МэВ - мегаэлектронвольт = 1.60×10^{-13} Дж.),

M_N - масса нуклона, равная 1 а.е.м.,

$V_{цб} = L(L+1)/r^2$ - центробежный потенциал, который зависит от величины орбитального момента относительного движения частиц L , величина $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$ - волновое число относительного движения частиц в Фм^{-2} ,

E – энергия частиц в МэВ,

$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ - приведенная масса двух частиц в а.е.м. (1 а.е.м. - атомная единица массы = 1.66×10^{-27} кг.),

$V_c(r)$ - центральная часть ядерного потенциала, равная $2\mu/\hbar^2 V_n(r)$,

$V_n(r)$ - радиальная зависимость потенциала, часто принимаемая в виде $-V_0 \exp(-\alpha r^2)$ или $-V_0 \exp(-\alpha r)$,

V_0 - глубина потенциала в МэВ,

величина $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{\hbar^2 k} = 0.0344476 Z_1 Z_2 / k$ - называется кулонов-

ским параметром и кулоновский потенциал можно представить в виде

$$V_{cul}(r) = 2\eta k/r.$$

Если учитывается спин - орбитальное взаимодействие, то центральный потенциал принимает вид [58,62]

$$V_c(r) = 2\mu/\hbar^2 [V_n(r) + V_{sl}(r)] \quad , \quad V_{sl}(r) = -(\mathbf{s}\mathbf{l}) V_{0sl} F(r)$$

где $F(r)$ - функциональная зависимость потенциала от взаимного расстояния между частицами, которая также может быть принята в виде гауссойды $\exp(-\alpha r^2)$ или экспоненты $\exp(-\alpha r)$.

Величина $(\mathbf{s}\mathbf{l})$ называется спин - орбитальным оператором и ее значения могут быть найдены из хорошо известного выражения [58]

$$(\mathbf{s}\mathbf{l}) u(r) = 1/2 [J(J + 1) - L(L + 1) - s(s + 1)] u(r) \quad ,$$

где J - полный момент системы, L - орбитальный момент, s - спин системы частиц. При учете спин - орбитального взаимодействия уравнение Шредингера разбивается на систему несвязанных уравнений, каждое из которых позволяет найти ВФ для конкретно-

го полного момента.

Иногда в потенциал взаимодействия вводят кулоновский радиус R_c , и тогда кулоновская часть потенциала принимает несколько иной вид

$$V_{\text{cul}}(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2}{r} & r > R_c \\ Z_1 Z_2 \left(3 - \frac{r^2}{R_c^2} \right) / 2R_c & r < R_c \end{cases} . \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) образуют задачу Коши с начальными условиями, которые выбираются из физических соображений. Первое начальное условие требует равенства нулю ВФ при $r = 0$. Поскольку ВФ отражает вероятность каких – то процессов или состояний квантовых частиц, то это условие означает ,что две частицы не могут полностью слиться и занимать один и тот же объем. Вторым условием задачи Коши должно быть заданием величины первой производной этой функции. Но из физических соображений нельзя определить величину этой производной, поэтому она берется равной некоторой константе, которая определяет амплитуду волновой функции. В численных расчетах обычно принимают $u' = 0.1-1$. Действительная амплитуда функции, которая используется для многочисленных физических расчетов, определяется из асимптотических условий, накладываемых на эту функцию при больших расстояниях $r \rightarrow R$, когда ядерный потенциал практически равен нулю.

Асимптотика волновой функции на больших расстояниях, когда $V_n(r \rightarrow R) = 0$ является решением уравнения (1.1) и может быть представлена следующим образом

$$u_L(r \rightarrow R) \longrightarrow F_L(kr) + \text{tg}(\delta_L)G_L(kr) \quad (1.3)$$

или

$$u_L(r \rightarrow R) \longrightarrow \text{Cos}(\delta_L)F_L(kr) + \text{Sin}(\delta_L)G_L(kr) ,$$

где F_L и G_L - кулоновские функции [63,64] рассеяния, которые являются частными решениями уравнения (1.1) без ядерной части потенциала, т.е. когда $V_c = 0$.

Сшивая численное решение $u(r)$ уравнения (1.1) на больших расстояниях (R порядка 10 - 20 Фм) с этой асимптотикой, можно найти амплитуду функции и фазы рассеяния δ_L для каждого L при заданной энергии взаимодействующих частиц.

Фазы рассеяния в конкретной системе ядерных частиц могут быть определены из фазового анализа экспериментальных данных по их упругому рассеянию (глава 6,7 данной работы). Далее, выполняется варьирование параметров ядерного потенциала заранее определенной формы в уравнении (1.1) и определяются те параметры, которые позволяют описать результаты фазового анализа.

Таким образом, задача описания процессов рассеяния ядерных частиц состоит именно в поиске параметров ядерного потенциала, которые описывают результаты фазового анализа, а, значит, экспериментальные данные по сечениям рассеяния.

Рассмотрим более подробно процедуру сшивки волновых функций с их асимптотикой. При $r = R$ можно записать два равенства для самих ВФ и их производных [65]

$$\begin{aligned} Nu_L(R) &= F_L(kR) + \operatorname{tg}(\delta_L)G_L(kR) \quad , \\ Nu'_L(R) &= F'_L(kR) + \operatorname{tg}(\delta_L)G'_L(kR) \quad , \end{aligned}$$

где N - нормировочный множитель. Можно рассматривать подобные выражения не для функции и производной, а только для функции, но в двух разных точках

$$\begin{aligned} Nu_L(R_1) &= F_L(kR_1) + \operatorname{tg}(\delta_L)G_L(kR_1) \quad , \\ Nu_L(R_2) &= F_L(kR_2) + \operatorname{tg}(\delta_L)G_L(kR_2) \quad . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_1 &= F_L(kR_1) \quad , & F_2 &= F_L(kR_2) \quad , \\ G_1 &= G_L(kR_1) \quad , & G_2 &= G_L(kR_2) \quad , \\ u_1 &= u_L(R_1) \quad , & u_2 &= u_L(R_2) \end{aligned}$$

и найдем величину N , например, из первого уравнения

$$N = [F_1 + \operatorname{tg}(\delta_L)G_1] / u_1 \quad .$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$\operatorname{tg}(\delta_L) = (u_1 F_2 - u_2 F_1) / (u_2 G_1 - u_1 G_2) = A_L \quad . \tag{1.5}$$

Тогда

$$\delta_L = \operatorname{Arctg}(A_L) \quad .$$

Нормировка функции, для наших целей поиска фаз, значения не имеет. Но если нужна и нормированная ВФ, т.е. полная функция рассеяния, то лучше рассматривать второе уравнение из (1.3), записав его в виде (1.4) и выполнив действия аналогичные, приведенным выше. Для фаз рассеяния получается такое же выражение, а нормировка запишется в виде

$$N = [\text{Cos}(\delta_L)F_1 + \text{Sin}(\delta_L)G_1]/u_1$$

или

$$N = [\text{Cos}(\delta_L)F_2 + \text{Sin}(\delta_L)G_2]/u_2 .$$

Тем самым, мы полностью определяет поведение волновой функции, ее амплитуду и фазовый сдвиг, во всей области решений уравнения (1.1) от нуля до некоторого большого R , которое определяет асимптотику ВФ.

1.1.2 Центральные комплексные потенциалы

Если в ядерных процессах открыт неупругий канал рассеяния или реакций, то нужно использовать комплексный потенциал взаимодействия, учитывающий убывание потока частиц из упругого канала [57].

Потенциал принимает теперь вид

$$V_c = V_r(r) + iV_m(r) , \tag{1.6}$$

где $V_r(r)$ - действительная часть потенциала и $V_m(r)$ – его мнимая часть. Волновая функция также становится комплексной и может быть записана в форме

$$u(r) = x(r) + iy(r) . \tag{1.7}$$

Тогда уравнение Шредингера (1.1) можно переписать в виде связанной системы уравнений

$$\begin{aligned} x''(r) + [k^2 - V_r(r) - V_{cul}(r) - L(L+1)/r^2]x(r) &= -V_m y(r) , \\ y''(r) + [k^2 - V_r(r) - V_{cul}(r) - L(L+1)/r^2]y(r) &= V_m x(r) . \end{aligned} \tag{1.8}$$

С начальными условиями вида

$$x(r=0) = 0 , \quad x'(r=0) = \text{const} ,$$

$$y(r=0) = 0 \quad , \quad y'(r=0) = \text{const} .$$

В численных расчетах, величина константы (const) для производных волновых функций обычно задается на уровне 0.1-1. Асимптотика волновых функций представляется теперь следующим образом [57]

$$u(r) = H^+(r) + SH^-(r) = [F(r) + iG(r)] + S[F(r) - iG(r)] , \quad (1.9)$$

где H^+ - функции Ганкеля, F и G - кулоновские функции и S - матрица рассеяния, которая имеет вид

$$S = e^{2i\delta} = S_1 + iS_2 = \text{Cos}(2\delta) + i\text{Sin}(2\delta) .$$

При учете неупругих процессов сами фазы упругого рассеяния становятся комплексными и представляются следующим образом

$$\delta = \sigma + i\Delta \quad ,$$

где σ и Δ - действительная и мнимая часть фазы. Тогда матрицу рассеяния можно переписать в виде

$$S = e^{2i\delta} = e^{-2\Delta} e^{2i\sigma} = \eta e^{2i\sigma} = \eta(S_1 + iS_2) = \eta[\text{Cos}(2\sigma) + i\text{Sin}(2\sigma)] , \quad (1.10)$$

где $\eta = e^{-2\Delta}$ - параметр неупругости. Для определения фаз рассеяния и параметра неупругости запишем граничные условия для функций в двух точках

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{H_1^+ + SH_1^-}{H_2^+ + SH_2^-} , \quad (1.11)$$

откуда легко найти

$$S = \frac{u_2 H_1^+ - u_1 H_2^+}{u_1 H_2^- - u_2 H_1^-} .$$

Подставляя выражения для функций Ганкеля, приведенные выше (1.9), и разделяя действительную и мнимую часть получим

$$S = \frac{C + iD}{A + iB} = K + iM , \quad (1.12)$$

где

$$K = \frac{AC + BD}{A^2 + B^2}, \quad M = \frac{AD - BC}{A^2 + B^2} \quad (1.13)$$

и

$$\begin{aligned} A &= b - a, & B &= -c - d, \\ C &= a + b, & D &= c - d, \\ a &= x_2 F_1 - x_1 F_2, & b &= y_1 G_2 - y_2 G_1, \\ c &= y_2 F_1 - y_1 F_2, & d &= x_1 G_2 - x_2 G_1 \end{aligned}$$

Таким образом, все элементы S - матрицы выражаются через кулоновские функции и решения исходного уравнения Шредингера (1.8) с заданным ядерным потенциалом.

Сравнивая действительную и мнимую часть выражений (1.10) и (1.12) получим

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Cos}(2\sigma) = K/\eta, \\ S_2 &= \text{Sin}(2\sigma) = M/\eta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

и

$$S^2 = \eta^2 (S_1 + iS_2)^2 = \eta^2, \quad (1.15)$$

$$S^2 = K^2 + M^2,$$

откуда находим

$$\eta^2 = K^2 + M^2$$

- параметр неупругости. Зная теперь эти величины, получим

$$A = \text{tg}(\sigma) = \frac{S_2}{1 + S_1}. \quad (1.16)$$

Тогда

$$\sigma = \text{Arctg}(A). \quad (1.17)$$

Не трудно проверить, что когда $V_m = 0$ и уравнения (1.8) становятся независимыми, то $\eta = 1$, а результаты для фаз (1.5) и (1.16) будут совпадать.

Для определения нормировки ВФ используем выражения (1.9) и (1.7)

$$N(x+iy) = H^+(r)+SH^-(r) = [F(r)+iG(r)] + (S_1+iS_2) [F(r)-iG(r)] .$$

Откуда находим

$$N = \frac{Ax + By}{x^2 + y^2} + i \frac{Bx - Ay}{x^2 + y^2} ,$$

где

$$A = (1 + S_1)F(r) + S_2G(r) , \quad B = (1 - S_1)G(r) + S_2F(r) .$$

В общем случае, нормировка ВФ может быть записана в виде

$$Nu(r) = (N_1 + iN_2)(x + iy) = N_1x - N_2y + i[N_1y + N_2x] = v + iw .$$

Здесь v и w - уже нормированные полные волновые функции рассеяния. Приравнивая действительную и мнимую части, будем иметь

$$N_1 = \frac{Ax + By}{x^2 + y^2} , \quad N_2 = \frac{Bx - Ay}{x^2 + y^2}$$

- общие выражения для определения нормировки ВФ рассеяния в случае комплексных потенциалов [66].

1.2 Численные методы решения уравнения Шредингера

Для численного решения уравнения Шредингера можно использовать конечно – разностный метод, представляя функцию и ее производную в виде центральных разностей или использовать известный метод Рунге - Кутта, который в некоторых случаях позволяет получить более высокую точность решения в каждой точке численной схемы.

1.2.1 Центральные действительные потенциалы

Уравнение Шредингера для центральных ядерных сил (1.1) запишем в виде [57]

$$u'' + [k^2 - V(r)]u = 0 . \quad (1.18)$$

Для его решения можно использовать конечно - разностный метод, в котором вторая производная может быть представлена следующим образом [58]

$$u''(r) = [u(r + h) - 2u(r) + u(r - h)]/h^2 = [u(r_{i+1}) - 2u(r_i) + u(r_{i-1}))]/h^2, \quad (1.19)$$

где h - шаг конечно - разностной сетки, для определения которого весь интервал значений r от нуля до некоторого R , делится на N частей

$$h = R/N .$$

Здесь R - верхний предел, на котором выполняется сшивка численного решения уравнения (1.18) с его асимптотикой. Тогда

$$r_i = hi ,$$

где i меняется от 0 до N ($r_0 = 0$ и $r_N = R$). Выражение (1.19) теперь можно переписать в виде

$$u'' = [u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}]/h^2 ,$$

а все уравнение переписывается

$$[u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}]/h^2 + [k^2 - V(r_i)]u_i = 0 .$$

Откуда находим

$$u_{i+1} = [2 + h^2V(r_i) - h^2k^2]u_i - u_{i-1} . \quad (1.20)$$

Функция при $r = 0$ должна быть равна нулю, а на первом шаге может быть принята равной некоторой константе, которая определяет только нормировку функции, не сказываясь на ее поведении при различных r .

Отсюда находится ВФ на следующем шаге u_2 и этот процесс повторяется пока i не станет равно $N - 1$. Такая процедура позволяет найти весь массив значений ВФ во всех точках от нуля до R . Далее мы выполняем ее сшивку в двух точках, например, при $r_N = R$ и $r_{N-5} = R - 5h$, как описано в параграфе (1.1.1) . Вторая точка определяется экспериментальным путем в каждом конкретном случае и зависит от энергии частиц, но при малых энергиях обычно бывает достаточно отступить назад на 3 - 5 шагов [67].

1.2.2 Центральные комплексные потенциалы

Если имеется система уравнений (1.8) для комплексного потенциала [67]

$$\begin{aligned} x''(r) + [k^2 - V_r(r) - V_{cul}(r) - L(L+1)/r^2]x(r) &= -V_my(r) \\ y''(r) + [k^2 - V_r(r) - V_{cul}(r) - L(L+1)/r^2]y(r) &= V_mx(r) \end{aligned} \quad (1.21)$$

то, используя такое же представление производной в конечно-разностном виде

$$u'' = [u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}]/h^2$$

для функций x и y получим

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= [2 - A_i h^2]x_i - x_{i-1} - h^2 V_m(r_i)y_i, \\ y_{i+1} &= [2 - A_i h^2]y_i - y_{i-1} + h^2 V_m(r_i)x_i, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$A_i = k^2 - V_r(r_i) - V_{cul}(r_i) - L(L+1)/r_i^2$$

Задавая значения функций в двух первых точках

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \text{const}, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = \text{const}$$

можно найти значения функций во всех остальных точках [67], как и в случае выражения (1.20). Процедура шивки численной функции со своей асимптотикой в случае комплексных потенциалов описана в параграфе 1.1.2.

Более сложный случай решения системы вида (1.21), когда в потенциале присутствует тензорная компонента мы рассмотрим в следующей главе.

1.2.3 Метод Рунге – Кутта для центральных действительных потенциалов

Рассмотрим теперь другой метод решения таких уравнений, который называется методом Рунге - Кутта четвертого порядка [68,69,70,71,72]. Стандартный метод решения одного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x,y) \quad (1.23)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0$$

заключается в представлении решения на интервале от 0 до некоторого R в виде

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \quad (1.24)$$

где n может меняться от 0 до N ($x_N = hN$), h - шаг решения, а Δy_n находится из выражения

$$\Delta y_n = 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (1.25)$$

где

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad , \quad k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \quad , \\ k_3 = hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \quad , \quad k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad .$$

В случае системы двух дифференциальных уравнений первого порядка [68-72]

$$y' = f(x,y,z) \quad , \quad (1.26)$$

$$z' = g(x,y,z)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad z(x_0) = z_0$$

решения находятся из выражений

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \quad , \quad (1.27)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta z_n \quad ,$$

где

$$\Delta y_n = 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad , \quad (1.28) \\ \Delta z_n = 1/6(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

и

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n, z_n) , \\ m_1 &= hg(x_n, y_n, z_n) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(x_n+h/2, y_n+k_1/2, z_n+m_1/2) , \\ m_2 &= hg(x_n+h/2, y_n+k_1/2, z_n+m_1/2) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf(x_n+h/2, y_n+k_2/2, z_n+m_2/2) , \\ m_3 &= hg(x_n+h/2, y_n+k_2/2, z_n+m_2/2) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= hf(x_n+h, y_n+k_3, z_n+m_3) , \\ m_4 &= hg(x_n+h, y_n+k_3, z_n+m_3) . \end{aligned}$$

В случае одного дифференциального уравнения второго порядка вида (1.18)

$$y'' = g(x, y, y') \quad (1.29)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0 , \quad y'(0) = y'_0$$

используем замену

$$z = y' .$$

Тогда получаем систему вида

$$\begin{aligned} y' &= z , \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.30)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0 , \quad z(0) = z_0$$

решение которой при $f(x, y, z) = z$ (см. 1.26 и 1.27) может быть представлено следующим образом

$$\Delta y_n = h z_n + 1/6 h (m_1 + m_2 + m_3) , \quad (1.31)$$

$$\Delta z_n = 1/6 (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

и

$$\begin{aligned} k_1 &= h z_n, & m_1 &= hg(x_n, y_n, z_n), \\ k_2 &= h(z_n + m_1/2), & m_2 &= hg(x_n + h/2, y_n + k_1/2, z_n + m_1/2), \\ k_3 &= h(z_n + m_2/2), & m_3 &= hg(x_n + h/2, y_n + k_2/2, z_n + m_2/2), \\ k_4 &= h(z_n + m_3), & m_4 &= hg(x_n + h, y_n + k_3, z_n + m_3). \end{aligned}$$

В дальнейшем будет показано, что оба эти метода (конечно - разностный и Рунге - Кутта) для рассмотренного круга задач приводят примерно к одинаковым результатам и обеспечивают одинаковую точность.

1.2.4 Методы расчета кулоновских фаз

Для практических расчетов характеристик ядерных реакций и процессов рассеяния во многих случаях необходимо знать и, как правило, с высокой точностью, численные значения кулоновских функций в заданной точке R и кулоновских фаз в широком диапазоне значений кулоновского параметра η .

В настоящее время известно достаточно много различных численных методов, применимых для нахождения этих величин, однако, только сравнительно недавно появились достаточно простые и надежные представления для кулоновских функций, а известные способы вычисления кулоновских фаз и сейчас обладают рядом недостатков, так что при их использовании необходимо соблюдать определенную осторожность.

Кулоновские фазы определяются через Γ - функцию следующим образом [57,73]

$$\sigma_L = \arg\{\Gamma(L+1+i\eta)\} \quad (1.32)$$

и удовлетворяют рекуррентному процессу

$$\sigma_L = \sigma_{L+1} - \text{Arctg}\left(\frac{\eta}{L+1}\right), \quad (1.33)$$

где $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{\hbar^2 k}$ - кулоновский параметр, μ - приведенная масса двух частиц, k - волновое число относительного движения и $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$, E - энергия сталкивающихся частиц в центре масс.

Откуда сразу можно получить следующее очевидное выражение

$$\alpha_L = \sigma_L - \sigma_0 = \sum_{n=1}^L \operatorname{Arctg}\left(\frac{\eta}{n}\right), \quad \alpha_0=0. \quad (1.34)$$

Наиболее естественное представление для кулоновских фаз получается на основе интегральной формулы для Γ - функции [73,86]

$$\sigma_L = \operatorname{Arctg}(y/x),$$

где

$$\begin{aligned} y &= \int_0^{\infty} \exp(-t)t^L \operatorname{Sin}(\eta \ln t) dt, \\ x &= \int_0^{\infty} \exp(-t)t^L \operatorname{Cos}(\eta \ln t) dt \end{aligned} \quad (1.35)$$

Однако непосредственное вычисление этих интегралов оказывается достаточно сложной задачей, так как подынтегральные функции являются быстро осциллирующими при $t \rightarrow 0$. Поэтому часто используются различного рода приближения и асимптотические разложения, например, такие, как представление фазы при $L = 0$ в виде [75]

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -\eta + \frac{\eta}{2} \ln(\eta^2 + 16) + \frac{7}{2} \operatorname{arctg}(\eta/4) - [\operatorname{arctg}\eta + \operatorname{arctg}(\eta/2) + \operatorname{arctg}(\eta/3)] - \\ &- \frac{\eta}{12(\eta^2 + 16)} \left[1 + \frac{1}{30} \frac{\eta^2 - 48}{(\eta^2 + 16)^2} + \frac{1}{105} \frac{\eta^4 - 160\eta^2 + 1280}{(\eta^2 + 16)^4} + \dots \right] \end{aligned}$$

или для $L \gg 1$ [57]

$$\sigma_L = \alpha(L + 1/2) + \eta(\ln \beta - 1) + \frac{1}{\beta} \left(-\frac{\operatorname{Sin} \alpha}{12} + \frac{\operatorname{Sin} 3\alpha}{360\beta^2} - \frac{\operatorname{Sin} 5\alpha}{1260\beta^4} + \frac{\operatorname{Sin} 7\alpha}{1680\eta^6} - \dots \right)$$

где

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{L+1}\right), \quad \beta = \sqrt{\eta^2 + (L+1)^2}.$$

Используя эти формулы, все остальные фазы определяются из рекуррентных соотношений (1.33). Хотя оба представления обладают высокой скоростью счета на компьютере, фазы получаются с некоторой ошибкой, оценить которую можно только сравнив полученный результат с табличными данными или вычислениями по точным формулам. Кроме того, последняя формула верна только при $L \approx 100$ и рекуррентный процесс вносит дополнительную ошибку в величину фаз.

Известны и другие представления кулоновских фаз, в частности, при $\eta \gg 1$ [76]

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{4} + \eta(\log \eta - 1) - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{2s(2s-1)\eta^{2s-1}} \quad , \quad (1.36)$$

где B_s - числа Бернулли [73]. Однако, подобное разложение хорошо работает только при $\eta \approx 100$. В работах [75,76] было показано, что можно получить восемь верных знаков с учетом только первого члена суммы (1.36) только при $\eta = 85$. При малых η ряд сходится плохо и требует, кроме того задания или вычисления чисел Бернулли.

В работе [75] имеется и другое определение кулоновских фаз

$$\sigma_L = \eta \Psi(L+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\eta}{L+n} - \arctg\left(\frac{\eta}{L+n}\right) \right] \quad , \quad (1.37)$$

которое можно получить из известной формы записи Γ - функции [73]

$$\Gamma(z) = \Gamma(x+iy) = r \exp(i\phi) = r (\cos\phi + i\sin\phi) \quad ,$$

где

$$\phi = y\Psi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{tg}\omega_n - \omega_n) \quad , \quad \omega_n = \arctg\left(\frac{y}{x+n}\right) \quad ,$$

а $\Psi(x)$ - логарифмическая производная Γ - функции [73], которая для целого аргумента имеет вид

$$\Psi(L+1) = -C + 1 + 1/2 + \dots + 1/L \quad .$$

Здесь $C = 0.5772156649\dots$ - постоянная Эйлера [73]. Ряд (1.56)

будет сходиться тем быстрее, чем меньше η и больше L . Эта формула охватывает противоположную представлению (1.36) область и при $1 < \eta < 50$ оба разложения имеют плохую сходимость.

Чтобы оценить остаточный член ряда (1.37) разложим арктангенс в ряд при $\eta/n \ll 1$, что всегда возможно при больших n или маленьких η . Тогда получим

$$\sigma_0 = -C\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\eta^3}{3n^3} - \frac{\eta^5}{5n^5} + \frac{\eta^7}{7n^7} - \dots \right) . \quad (1.38)$$

Отсюда видно, что остаток ряда будет иметь порядок величины η^3/n^2 [68]. Ряд (1.37) при $\eta > 1$ сходится сравнительно плохо, так как для получения, например, относительной точности 10^{-8} требуется учитывать десятки тысяч членов этого ряда.

Однако, такой ряд допускает существенное улучшение сходимости при $\eta \approx 1$ [84] после преобразования его к виду

$$\sigma_0 = -\eta C + \frac{1}{3}\eta^3 S + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\eta}{n} - \arctg\left(\frac{\eta}{n}\right) - \frac{1}{3} \frac{\eta^3}{n^3} \right] , \quad (1.39)$$

где $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1.202056903\dots$. Несложно найти, что остаточный член такого ряда равен η^5/n^4 и для получения восьми верных знаков требуется учитывать только несколько сотен членов при $\eta \approx 1$.

Приведенный выше ряд (1.39) допускает дополнительное улучшение сходимости, после преобразования его к виду [84]

$$\sigma_0 = -\eta C + \frac{1}{3}\eta^3 S - \frac{1}{5}\eta^5 D + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\eta}{n} - \arctg\left(\frac{\eta}{n}\right) - \frac{1}{3} \frac{\eta^3}{n^3} + \frac{1}{5} \frac{\eta^5}{n^5} \right] , \quad (1.40)$$

где $D = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} = 1.036927751\dots$. Такой ряд сходится очень быстро и имеет остаточный член порядка η^7/n^6 , так что для удовлетворения указанной выше точности требуется учитывать только несколько десятков членов.

Ниже приведена программа для вычисления кулоновских фаз, описанным выше методом разложения в ряд и на основе интегральных представлений (1.35).

РЕМ ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ КУЛОНОВСКИХ ФАЗ РАССЕЯНИЯ

```

DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: M=4000: DIM V(M): CLS
EPS=1.0E-15: H=1: REM КУЛОНОВСКИЙ ПАРАМЕТР
REM *** РАСЧЕТ ФАЗ НА ОСНОВЕ РЯДОВ ***
C=0.577215665: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5: F=0: S1=0
3 F=F+1: B=H/F-ATN(H/F): S1=S1+B: IF B<EPS GOTO 2: GOTO 3
2 D=0: S=0
4 D=D+1: A=H/D-ATN(H/D)-(H/D)^3/3+(H/D)^5/5: S=S+A
IF A<EPS GOTO 1: GOTO 4
1 FAZ=-C*H+A1*H^3-A2*H^5+S
FAZ1=-C*H+S1: PRINT "FAZ = ";FAZ; " N = ";D
PRINT "FAZ1 = ";FAZ1;" N = ";F
REM *** РАСЧЕТ ФАЗ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕД-
СТАВЛЕНИЯ ***
NN=4000: E=1E-300: N=500: R1=0.1: R2=1: R3=40: HH=R1/N
H1=HH/NN: H2=(R2-R1)/NN: H3=(R3-R2)/NN: YY=0: FOR K=1 TO
N
AA=(K-1)*HH: FOR I=0 TO NN: X=H1*I+AA+E
V(I)=EXP(-X)*SIN(H*LOG(X)): NEXT I: CALL
SIM(NN,H1,V(),Y1)
YY=YY+Y1: NEXT K: FOR I=0 TO NN: X=H2*I+R1
V(I)=EXP(-X)*SIN(H*LOG(X)): NEXT: CALL SIM(NN,H2,V(),Y1)
YY=YY+Y1: FOR I=0 TO NN: X=H3*I+R2
V(I)=EXP(-X)*SIN(H*LOG(X)): NEXT
CALL SIM(NN,H3,V(),Y1): YY=YY+Y1: XX=0: FOR K=1 TO N
AA=(K-1)*HH: FOR I=0 TO NN: X=H1*I+AA+E
V(I)=EXP(-X)*COS(H*LOG(X)): NEXT I: CALL
SIM(NN,H1,V(),X1)
XX=XX+X1: NEXT K: FOR I=0 TO NN: X=H2*I+R1
V(I)=EXP(-X)*COS(H*LOG(X)): NEXT: CALL SIM(NN,H2,V(),X1)
XX=XX+X1: FOR I=0 TO NN: X=H3*I+R2
V(I)=EXP(-X)*COS(H*LOG(X))
NEXT: CALL SIM(NN,H3,V(),X1): XX=XX+X1: AA=ATN(YY/XX)
PRINT "FAZA = ";AA: END
SUB SIM(N,H,V(5000),S)
A=0: B=0: FOR I=1 TO N-1 STEP 2: B=B+V(I): NEXT
FOR J=2 TO N-2 STEP 2: A=A+V(J): NEXT
S=H*(V(0)+V(N)+2*A+4*B)/3: END SUB

```

В таблице 1.1 приведены фазы, вычисленные по этой программе на основании формулы (1.40) [84]. Ошибка составляет примерно половину последнего знака.

Таблица 1.1 - Вычисление кулоновских фаз.

η	σ_0	η	σ_0
0.1	-0.05732294	0.6	-0.27274381
0.2	-0.11230222	0.8	-0.30422560
0.3	-0.16282067	1.0	-0.30164032
0.4	-0.20715583	1.3	-0.23921678
0.5	-0.24405830	1.5	-0.16293977

Отметим, что для получения одинаковой точности при расчетах по формулам (1.40) и (1.38), в последнем случае, обозначенном в программе σ_1 , нужно учитывать примерно в семьсот раз больше членов ряда (при точности 10^{-15}), что видно из приведенной распечатки результатов расчета при $\eta = 1$

$$\sigma_0 = -0.30164032059 \quad \text{для } N = 106$$

$$\sigma_1 = -0.30164032060 \quad \text{для } N = 69337$$

Расчет кулоновских фаз на основе интегрального представления, может быть выполнен, если разделить весь интервал интегрирования на несколько частей. Наиболее сильно подынтегральная функция меняется при малых t , поэтому делим интервал интегрирования на следующие части $0 \div 0.1$, $0.1 \div 1$ и $1 \div 40$ (при $t = 40$ подынтегральная функция имеет порядок величины 10^{-17}), а первую часть ($0 \div 0.1$) делим еще на $N = 500$ частей.

Вычисление интегралов по всем частям приводит нас к величине фазы -0.30164031 , что отличается от результата, полученного на основе рядов, только на единицу восьмого знака. Если первый интервал $0 \div 0.1$ не делить на N частей, т.е. положить $N = 1$, то для фазы получается величина -0.30163425 и ошибка составляет единицу пятого знака.

Отметим, что вычисление таких интегралов на компьютере Intel Pentium 200 MMX занимает несколько минут, а вычисление ряда (1.40) - доли секунды.

1.2.5 Методы расчета кулоновских функций

Перейдем теперь к рассмотрению кулоновских функций рассеяния, регулярная $F_L(\eta, \rho)$ и нерегулярная $G_L(\eta, \rho)$ части которых являются линейно независимыми решениями радиального уравнения Шредингера (1.18) только с кулоновским потенциалом которое имеет вид [57,60]

$$\chi_L''(\rho) + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2}\right) \chi_L(\rho) = 0, \quad (1.42)$$

где $\chi_L = F_L(\eta, \rho)$ или $G_L(\eta, \rho)$, $\rho = kr$, а $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{\hbar^2 k}$ - кулоновский параметр. Вронскианы этих функций имеют вид [57]

$$\begin{aligned} W_1 &= F_L' G_L - F_L G_L' = 1, \\ W_2 &= F_{L-1} G_L - F_L G_{L-1} = \frac{L}{\sqrt{\eta^2 + L^2}}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Рекуррентные соотношения записываются в форме

$$\begin{aligned} L[(L+1)^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L+1} &= (2L+1) \left[\eta + \frac{L(L+1)}{\rho} \right] u_L - (L+1) [L^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L-1}, \\ (L+1) u_L' &= \left[\frac{(L+1)^2}{\rho} + \eta \right] u_L - [(L+1)^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L+1}, \\ L u_L' &= [L^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L-1} - \left[\frac{L^2}{\rho} + \eta \right] u_L, \end{aligned} \quad (1.44)$$

где $u_L = F_L(\eta, \rho)$ или $G_L(\eta, \rho)$. Асимптотика при $\rho \rightarrow \infty$ может быть представлена в виде [74]

$$\begin{aligned} F_L &= \text{Sin}(\rho - \eta \ln 2\rho - \pi L/2 + \sigma_L), \\ G_L &= \text{Cos}(\rho - \eta \ln 2\rho - \pi L/2 + \sigma_L). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Имеется достаточно много методов и приближений для вычисления кулоновских функций [57,75,76,77,78,79,80,81].

Однако, только сравнительно недавно появилось быстро сходящееся представление, позволяющее получить их значения с высокой степенью точности и в широком диапазоне переменных с малыми затратами компьютерного времени [82]. Кулоновские функции в таком методе представляются в виде цепных дробей [83]

$$f_L = F_L' / F_L = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}, \quad (1.46)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= (L + 1)/\rho + \eta/(L + 1) \quad , \\ b_n &= [2(L + n) + 1][(L + n)(L + n + 1) + \eta\rho] \quad , \\ a_1 &= -\rho[(L + 1)^2 + \eta^2](L + 2)/(L + 1) \quad , \\ a_n &= -\rho^2[(L + n)^2 + \eta^2][(L + n)^2 - 1] \end{aligned}$$

и

$$P_L + iQ_L = \frac{G'_L + iF'_L}{G_L + iF_L} = \frac{i}{\rho} \left(b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \right), \quad (1.47)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \rho - \eta \quad , \quad b_n = 2(b_0 + in) \quad , \\ a_n &= -\eta^2 + n(n - 1) - L(L + 1) + i\eta(2n - 1) \quad . \end{aligned} \quad (1.48)$$

Такой метод расчета оказывается применим в области при $\rho \geq \eta + \sqrt{\eta^2 + L(L + 1)}$ и легко позволяет получить высокую точность благодаря быстрой сходимости цепных дробей. Поскольку кулоновский параметр η обычно порядка единицы, а L , как правило, не более 5-7, то метод дает хорошие результаты уже при $\rho > 5$ Фм. Именно в этой области необходимо знать кулоновские функции при численных расчетах ядерных функций рассеяния и реакций.

Используя (1.46-1.48) можно получить связь между кулоновскими функциями и их производными [84,85]

$$\begin{aligned} F'_L &= f_L F_L \quad , \\ G_L &= (F'_L - P_L F_L)/Q_L = (f_L - P_L)F_L/Q_L \quad , \\ G'_L &= P_L G_L - Q_L F_L = [P_L(f_L - P_L)/Q_L - Q_L]F_L \quad . \end{aligned}$$

Таким образом, задавая некоторое значение F_L в точке ρ , находим все остальные функции и их производные с точностью до постоянного множителя, который определяется из вронскианов (1.43). Вычисления кулоновских функций по приведенным формулам и сравнение их с табличным материалом [86] показывает, что

можно легко получить восемь - девять правильных знаков, если ρ удовлетворяет приведенному выше условию.

Ниже приведен текст компьютерной программы для вычисления кулоновских волновых функций рассеяния. Данная программа и все другие программы этой книги написаны на алгоритмическом языке Basic для компилятора Turbo Basic фирмы Borland [87].

Здесь G - кулоновский параметр, L - орбитальный момент данной парциальной волны, X - расстояние от центра, на котором вычисляются кулоновские функции, FF и GG - сами кулоновские функции, FP и GP - их производные, а W - Вронскиан, определяющий точность вычисления кулоновских функций (Первая формула в выражении (1.43)).

SUB CULFUN(G,X,L,FF,GG,FP,GP,W)

REM ***** ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ *****

```

Q=G:R=X: GK=Q*Q: GR=Q*R:RK=R*R: K=1: F0=1
B01=(L+1)/R+Q/(L+1):BK=(2*L+3)*((L+1)*(L+2)+GR)
AK= - R*((L+1)^2+GK)/(L+1)*(L+2):DK=1/BK: DEHK=AK*DK
S=B01+DEHK
1 K=K+1:AK= - RK*((L+K)^2 - 1)*((L+K)^2+GK)
BK=(2*L+2*K+1)*((L+K)*(L+K+1)+GR):DK=1/(DK*AK+BK)
IF DK>0 GOTO 3
2 F0= - F0
3 DEHK=(BK*DK - 1)*DEHK: S=S+DEHK
IF (ABS(DEHK) - 1E - 10)>0 GOTO 1:FL=S: K=1:RMG=R - Q
LL=L*(L+1):CK= - GK - LL:DK=Q: GKK=2*RMG
HK=2: AA1=GKK*GKK+HK*HK: PBK=GKK/AA1
RBK= - HK/AA1: OMEK=CK*PBK-DK*RBK
EPSK=CK*RBK+DK*PBK: PB=RMG+OMEK:QB=EPSK
4 K=K+1:CK= - GK - LL+K*(K - 1):DK=Q*(2*K - 1)
HK=2*K:FI=CK*PBK
DK*RBK+GKK:PSI=PBK*DK+RBK*CK+HK
AA2=FI*FI+PSI*PSI:PBK=FI/AA2: RBK= - PSI/AA2
VK=GKK*PBK - HK*RBK:WK=GKK*RBK+HK*PBK
OM=OMEK:EPK=EPSK:OMEK=VK*OM - WK*EPK - OM
EPSK=VK*EPK+WK*OM - EPK:PB=PB+OMEK
QB=QB+EPSK:IF (ABS(OMEK)+ABS(EPSK) - 1E - 10)>0 GOTO 4
PL= - QB/R: QL=PB/R:G0=(FL - PL)*F0/QL
GOP=(PL*(FL - PL)/QL - QL)*F0:FOP=FL*F0
ALFA=1/(SQR(ABS(FOP*G0 - F0*GOP)))
GG=ALFA*G0:GP=ALFA*GOP:FF=ALFA*F0
FP=ALFA*FOP:W=1 - FP*GG+FF*GP:END SUB

```

Результаты контрольного счета кулоновских функций для $\eta = 1$ [88,89] и сравнение их с табличными данными [86] приведены в таблице 1.2.

Видно, что при $\eta = 1$ и $L = 0$ правильные результаты получаются уже для $\rho = kr = 1$. Величина вронскиана (1.43), представленного в виде W_{1-1} , при любых ρ не превышает 10^{-15} - 10^{-16} .

Таблица 1.2 - Кулоновские функции.

ρ	F_0 (Наш расчет)	F_0 [86]	F_0' (Наш расчет)	F_0' [86]
1	0.22752621	0.22753	0.34873442	0.34873
5	0.68493741	0.68494	-0.72364239	-0.72364
10	0.47756082	0.47756	0.84114311	0.84114
15	-0.97878958	-0.97879	0.31950815	0.31951
20	-0.32922554	-0.32923	-0.92214689	-0.92215
ρ	G_0	G_0 [86]	G_0'	G_0' [86]
1	2.0430972	2.0431	-1.2635981	-1.2636
5	-0.89841436	-0.89841	-0.51080476	-0.51080
10	0.94287424	0.94287	-0.43325965	-0.43326
15	0.34046374	0.34046	0.91053182	0.91053
20	-0.97242840	-0.97243	0.31370038	0.31370
ρ	F_2	G_2	F_2'	G_2'
1	1.47867E-02	1.26407E 01	4.70896E-02	-2.73727E 01
5	1.18637E 00	3.82961E-01	1.54145E-01	-7.93149E-01
10	-9.63615E-01	4.81305E-01	4.24848E-01	8.25557E-01
15	-2.27973E-01	-1.01918E 00	-9.33599E-01	2.12743E-01
20	-1.01801E 00	-1.62845E-01	-1.55072E-01	-9.57506E-01

Правильность вычисления функций при $L = 2$ легко проверить по рекуррентным формулам (1.44). Зная функции и их производные при $L = 0$, по второй формуле находим сами функции при $L = 1$, а затем, по третьей формуле, находим их производные для $L = 1$. Продолжая этот процесс легко найти все функции и их производные при любых L [84].

1.3 Программа расчета фаз рассеяния для центральных действительных потенциалов

Приведем теперь компьютерную программу для расчета действительных фаз упругого рассеяния конечно - разностным методом и методом Рунге - Кутты, которая демонстрирует хорошее совпадение результатов, полученных обоими способами.

Здесь приняты следующие обозначения: NN - Нижнее значение цикла по энергии, NV - Верхнее значение цикла по энергии, NH - Шаг цикла по энергии, EH - Шаг по энергии, EN - Нижнее значение по энергии, AM1 - Масса первой частицы в а.е.м., AM2 - Масса второй частицы в а.е.м., PM - Приведенная масса μ , Z1 - Заряд первой частицы в единицах заряда "е", Z2 - Заряд второй частицы в единицах заряда "е", A1 - Константа $\hbar^2/M_N = 41.4686$, где M_N - масса нуклона в а.е.м, равная 1, AK1 - Константа при кулоновском потенциале $1.439975 Z_1 Z_2 2\mu/\hbar^2$, N - Число шагов при интегрировании уравнения Шредингера, H - Величина шага при интегрировании уравнения Шредингера, R00 - Расстояние, на котором выполняется сшивка численных функций с асимптотикой, V0 - Глубина ядерного потенциала, R0 - Радиус ядерного потенциала, RCU - Кулоновский радиус, L - Орбитальный момент, EL - Энергия частиц в лабораторной системе, ECM - Энергия частиц в системе центра масс, SK - Квадрат волнового числа k^2 , SS - Волновое число k, G - Кулоновский параметр $= 3.44476 \cdot 10^{-2} Z_1 Z_2 \mu/k$, F1(I) - Фаза рассеяния при заданной энергии, полученная конечно - разностным методом, F2(I) - Фаза рассеяния при заданной энергии, полученная методом Рунге - Кутты, ABS(F1(I) - F2(I)) - Разница фаз в градусах, полученных разными методами, ABS(F1(I) - F2(I))/ABS(F1(I))*100 - относительная разница фаз в процентах.

REM ПРОГРАММА РАСЧЕТА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФАЗ РАССЕЙНИЯ

```

REM *** ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССИВОВ И ПЕРЕМЕННЫХ ****
DEFDBL A - Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: CLS
NN=4000: DIM EL(100), F1(100), ECM(100), F2(100)
DIM V1(NN), U(NN), V(NN), U1(NN)
PRINT " EL ECM FKR FRK ERR - DEG ERR - %"
REM ***** ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ *****
PI=3.14159265359: NN=1: NV=20: NH=1: EH=1: EN=0
AM1=2: AM2=4: Z1=1: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
B1=2*PM/A1: AK1=1.439975*Z1*Z2*B1: N=1000: R00=20:
H=R00/N
V0=76.12: R0=.2: A2= - V0*B1: RCU=0: L=0
REM ***** НАЧАЛО ЦИКЛА ПО ЭНЕРГИИ *****
FOR I=NN TO NV STEP NH: EL(I)=EN+EH*I:
ECM(I)=EL(I)*PM/AM1
SK=ECM(I)*B1: SS=SQR(SK): G=3.44476E - 02*Z1*Z2*PM/SS
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ *****
X1=H*SS*(N - 4): X2=H*SS*(N): CALL CUL(G,X1,L0,F1,G1,W1)
CALL CUL(G,X2,L0,F2,G2,W2)

```

РЕМ *** ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗ КОНЕЧНО - РАЗНОСТНЫМ
МЕТОДОМ ***

CALL FUN(N,H,U1()),L,A2,AK1,SK,R0,RCU)

D1=U1(N - 4); D2=U1(N); AF= - (F1 - F2*D1/D2)/(G1 - G2*D1/D2)

FF=ATN(AF); IF FF>0 GOTO 90; FF=FF+PI

90 XN1=(COS(FF)*F2+SIN(FF)*G2)/D2; F1(I)=FF*180/PI

РЕМ *** ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗ МЕТОДОМ РУНГЕ - КУТТА ***

CALL FUNRK(V(),N,H); D1=V(N - 4); D2=V(N)

AF= - (F1 - F2*D1/D2)/(G1 - G2*D1/D2); F33=ATN(AF)

IF F33>0 GOTO 91; F33=F33+PI

91 XN2=(COS(F33)*F2+SIN(F33)*G2)/D2; F2(I)=F33*180/PI

РЕМ ***** ПЕЧАТЬ ФАЗ *****

PRINT USING "+#.#####^ ^ ^ ^ "; EL(I); ECM(I); F1(I); F2(I);

ABS(F1(I) - F2(I)); ABS(F1(I) - F2(I))/ABS(F1(I))*100; NEXT I;

STOP

SUB CUL(G,X,L,F0,G0,W)

РЕМ * ВЫЧИСЛЕНИЕ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ РАССЕЯ-
НИЯ *

Q=G; R=X; F0=1; K=1; GK=Q*Q; GR=Q*R; RK=R*R

B01=(L+1)/R+Q/(L+1); BK=(2*L+3)*((L+1)*(L+2)+GR)

AK= - R*((L+1)^2+GK)/(L+1)*(L+2); DK=1/BK; DEHK=AK*DK

S=B01+DEHK

1 K=K+1; AK= - RK*((L+K)^2 - 1)*((L+K)^2+GK)

BK=(2*L+2*K+1)*((L+K)*(L+K+1)+GR); DK=1/(DK*AK+BK)

IF DK>0 GOTO 3

2 F0= - F0

3 DEHK=(BK*DK - 1)*DEHK; S=S+DEHK

IF (ABS(DEHK) - 1E - 06)>0 GOTO 1; FL=S; K=1; RMG=R - Q

LL=L*(L+1); CK= - GK - LL; DK=Q; GKK=2*RMG; HK=2

AA1=GKK*GKK+HK*HK; PBK=GKK/AA1; RBK= - HK/AA1

OMEK=CK*PBK - DK*RBK; EPSK=CK*RBK+DK*PBK

PB=RMG+OMEK; QB=EPSK

5 K=K+1; CK= - GK - LL+K*(K - 1); DK=Q*(2*K - 1); HK=2*K

FI=CK*PBK - DK*RBK+GKK; PSI=PBK*DK+RBK*CK+HK

AA2=FI*FI+PSI*PSI; PBK=FI/AA2; RBK= - PSI/AA2

VK=GKK*PBK - HK*RBK; WK=GKK*RBK+HK*PBK

OM=OMEK; EPK=EPSK; OMEK=VK*OM - WK*EPK - OM

EPSK=VK*EPK+WK*OM - EPK; PB=PB+OMEK; QB=QB+EPSK

IF (ABS(OMEK)+ABS(EPSK) - 1E - 06)>0 GOTO 5; PL= - QB/R

QL=PB/R; G0=(FL - PL)*F0/QL; G0P=(PL*(FL - PL)/QL - QL)*F0

F0P=FL*F0; ALFA=1/(SQR(ABS(F0P*G0 - F0*G0P)));

G0=ALFA*G0

GP=ALFA*G0P; F0=ALFA*F0; FP=ALFA*F0P; W=1 -

FP*G0+F0*GP

```

END SUB
SUB FUN(N,H,U(5000),L,AV,AK,SK,R0,RCU)
REM ***** РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА КОНЕЧНО
- РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ *****
U(0)=0: U(1)=0.001: HK=H*H: FOR K=1 TO N - 1: X=K*H
Q1=AV*EXP(-R0*X*X)+L*(L+1)/(X*X): IF X>RCU GOTO 11
Q1=Q1+(3-(X/RCU)^2)*AK/(2*RCU): GOTO 22
11 Q1=Q1+AK/X
22 Q2=-Q1*HK-2+SK*HK: U(K+1)=-Q2*U(K)-U(K-1): NEXT
K
END SUB
SUB FUNRK(V(5000),N,H)
REM ***** РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА МЕТО-
ДОМ РУНГЕ - КУТТА ВО ВСЕЙ ОБЛАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ
*****
VA1=0: REM VA1 - Значение функции в нуле
PA1=1.0E-05: REM PA1 - Значение функции на первом шаге
FOR I=0 TO N-1: X=H*I+1.0E-05
CALL RRUN(VB1,PB1,VA1,PA1,H,X)
VA1=VB1: PA1=PB1: V(I+1)=VA1: NEXT: END SUB
SUB RRUN(VB1,PB1,VA1,PA1,H,X)
REM ***** РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА МЕТОДОМ
РУНГЕ - КУТТА НА ОДНОМ ШАГЕ *****
X0=X: Y1=VA1: CALL F(X0,Y1,FK1): FK1=FK1*H: FM1=H*PA1
X0=X+H/2: Y2=VA1+FM1/2: CALL F(X0,Y2,FK2): FK2=FK2*H
FM2=H*(PA1+FK1/2): Y3=VA1+FM2/2: CALL F(X0,Y3,FK3)
FK3=FK3*H: FM3=H*(PA1+FK2/2): X0=X+H: Y4=VA1+FM3
CALL F(X0,Y4,FK4): FK4=FK4*H: FM4=H*(PA1+FK3)
PB1=PA1+(FK1+2*FK2+2*FK3+FK4)/6
VB1=VA1+(FM1+2*FM2+2*FM3+FM4)/6: END SUB
SUB F(X,Y,F)
REM * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ F(X,Y) В МЕТОДЕ РУНГЕ -
КУТТА *
SHARED SK,A2,R0,AK1,L,RCU
VC=A2*EXP(-R0*X^2): IF X>RCU GOTO 121
VK=(3-(X/RCU)^2)*AK1/(2*RCU): GOTO 222
121 VK=AK1/X
222 F=-((SK-VK-VC-L*(L+1))/(X^2))*Y: END SUB

```

Для выполнения контрольного счета мы использовали конеч-
но - разностный метод с классическим нуклон - нуклонным потен-
циалом Рейда [90]. В его работе приведен вид 1P_1 потенциала и рас-
четные фазы рассеяния. Наши вычисления фаз с таким потенциа-
лом даны в таблице 1.3 в сравнении с результатами Рейда.

Таблица 1.3 - Сравнение результатов для потенциала Рейда.

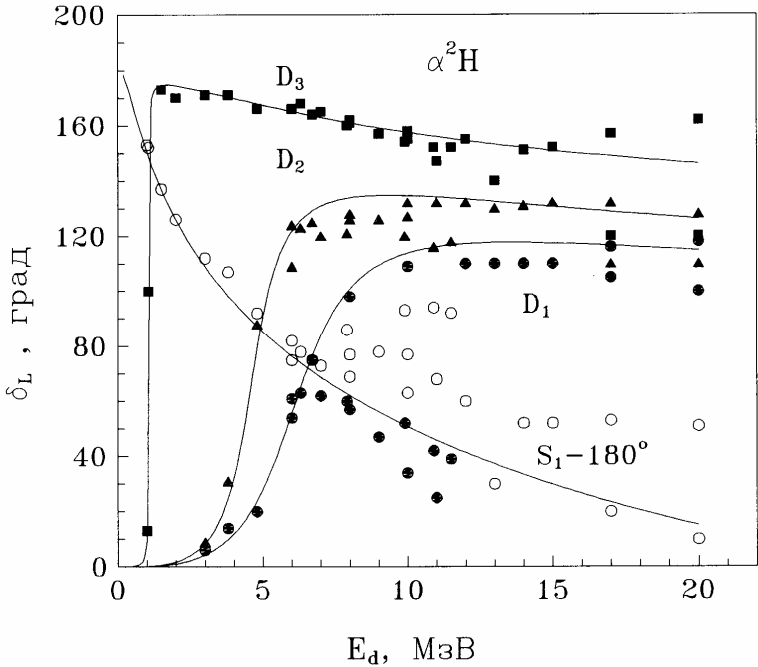
Е, МэВ	δ , рад., [90]	δ , рад., (Наш расчет)
48	-0.071	-0.072
144	-0.312	-0.314
208	-0.456	-0.458
352	-0.708	-0.710

Из этих результатов видно совпадение обеих расчетов с точностью порядка нескольких тысячных радиана, что является прекрасным примером работоспособности использованных численных методов и точности работы написанной программы.

Сравним теперь точность с которой можно получить фазы рассеяния двумя рассмотренными методами – Рунге-Кутта и конечно – разностным. Приведем результаты расчетов фаз двумя этими методами (FKR - конечно - разностный и FRK - Рунге - Кутт) для S - фазы рассеяния в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системе (параметры потенциала получены нами в работах [13] $V_0 = 76.12$ МэВ, $\alpha = 0.2$ Фм⁻², $R_c = 0$ Фм., $L = 0$ и представляют собой альтернативный вариант подобных потенциалов впервые предложенных в работах [6-9]) и степень их совпадения в градусах (ERR - DEG) и процентах (ERR - %) [16]. Здесь EL, ECM - энергия в лабораторной системе и системе центра масс сталкивающихся частиц.

EL	ECM	FKR	FRK	ERR - DEG	ERR - %
+1.0000E+00	+6.6667E-01	+1.5053E+02	+1.5052E+02	+8.4828E-03	+5.6353E-03
+2.0000E+00	+1.3333E+00	+1.2598E+02	+1.2597E+02	+1.2241E-02	+9.7170E-03
+3.0000E+00	+2.0000E+00	+1.0892E+02	+1.0890E+02	+1.4219E-02	+1.3055E-02
+4.0000E+00	+2.6667E+00	+9.5886E+01	+9.5871E+01	+1.5547E-02	+1.6214E-02
+5.0000E+00	+3.3333E+00	+8.5335E+01	+8.5319E+01	+1.6536E-02	+1.9378E-02
+6.0000E+00	+4.0000E+00	+7.6457E+01	+7.6440E+01	+1.7629E-02	+2.3057E-02
+7.0000E+00	+4.6667E+00	+6.8801E+01	+6.8782E+01	+1.8828E-02	+2.7365E-02
+8.0000E+00	+5.3333E+00	+6.2083E+01	+6.2063E+01	+1.9867E-02	+3.2000E-02
+9.0000E+00	+6.0000E+00	+5.6102E+01	+5.6081E+01	+2.0743E-02	+3.6974E-02
+1.0000E+01	+6.6667E+00	+5.0715E+01	+5.0693E+01	+2.1731E-02	+4.2848E-02
+1.1000E+01	+7.3333E+00	+4.5818E+01	+4.5795E+01	+2.2996E-02	+5.0189E-02
+1.2000E+01	+8.0000E+00	+4.1334E+01	+4.1310E+01	+2.4399E-02	+5.9028E-02
+1.3000E+01	+8.6667E+00	+3.7206E+01	+3.7180E+01	+2.5677E-02	+6.9014E-02
+1.4000E+01	+9.3333E+00	+3.3383E+01	+3.3356E+01	+2.6730E-02	+8.0071E-02
+1.5000E+01	+1.0000E+01	+2.9825E+01	+2.9798E+01	+2.7712E-02	+9.2913E-02
+1.6000E+01	+1.0667E+01	+2.6500E+01	+2.6471E+01	+2.8870E-02	+1.0894E-01
+1.7000E+01	+1.1333E+01	+2.3379E+01	+2.3349E+01	+3.0323E-02	+1.2970E-01

На рисунке 1.1а непрерывной спадающей линией показана вычисленная конечно - разностным методом S₁ - фаза ${}^2\text{H}^4\text{He}$ рассеяния.



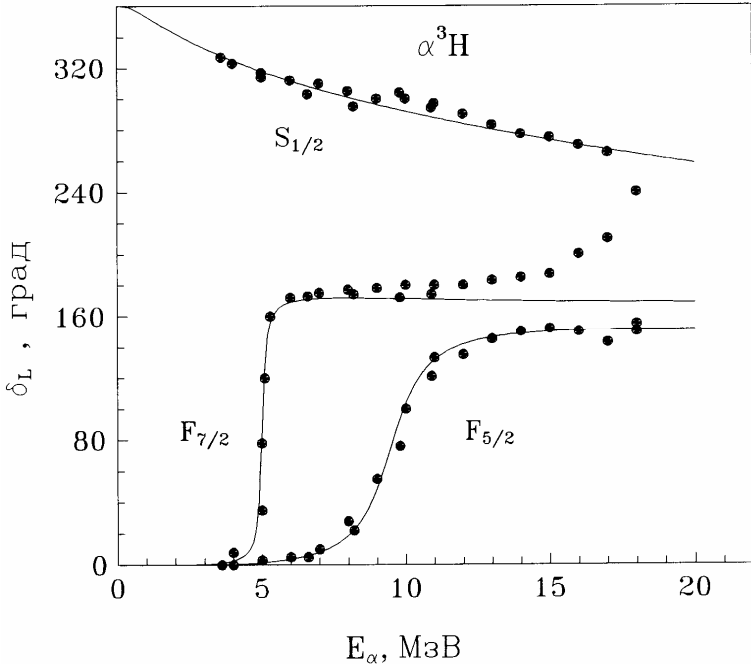
Кривые - расчеты по приведенной программе [16]. Точки, треугольники, кружки и квадраты - экспериментальные данные [91,92,93,94,95,96,97,98].

Рисунок 1.1а - Четные фазы упругого ${}^4\text{He}^2\text{H}$ рассеяния.

И в заключение этого параграфа приведем результаты расчетов $S_{1/2}$ - фазы для упругого ${}^3\text{H}^4\text{He}$ рассеяния при низких энергиях [16] двумя методами, показанные на рисунке 1.1б непрерывной линией сверху рисунка. Для параметров потенциала использованы следующие значения - $V_0 = -67.5$ МэВ, $\alpha = 0.15747$ Фм $^{-2}$, $R_c = 3.095$ Фм, $L = 0$ [13,16].

EL	ECM	FKR	FRK	ERR-DEG	ERR-%
+1.0000E-01	+4.2857E-02	+1.8000E+02	+1.8000E+02	+3.0506E-07	+1.6948E-07
+1.1000E+00	+4.7143E-01	+1.7204E+02	+1.7204E+02	+1.2686E-03	+7.3739E-04
+2.1000E+00	+9.0000E-01	+1.6139E+02	+1.6138E+02	+2.8364E-03	+1.7575E-03
+3.1000E+00	+1.3286E+00	+1.5211E+02	+1.5211E+02	+4.0288E-03	+2.6486E-03
+4.1000E+00	+1.7571E+00	+1.4419E+02	+1.4419E+02	+4.9487E-03	+3.4320E-03
+5.1000E+00	+2.1857E+00	+1.3729E+02	+1.3729E+02	+5.6562E-03	+4.1198E-03
+6.1000E+00	+2.6143E+00	+1.3113E+02	+1.3113E+02	+6.2638E-03	+4.7767E-03
+7.1000E+00	+3.0429E+00	+1.2555E+02	+1.2555E+02	+6.8101E-03	+5.4240E-03
+8.1000E+00	+3.4714E+00	+1.2045E+02	+1.2044E+02	+7.2653E-03	+6.0317E-03
+9.1000E+00	+3.9000E+00	+1.1574E+02	+1.1573E+02	+7.6262E-03	+6.5892E-03
+1.0100E+01	+4.3286E+00	+1.1134E+02	+1.1133E+02	+7.9425E-03	+7.1336E-03
+1.1100E+01	+4.7571E+00	+1.0721E+02	+1.0720E+02	+8.2671E-03	+7.7111E-03

+1.2100E+01 +5.1857E+00 +1.0331E+02 +1.0330E+02 +8.6088E-03 +8.3328E-03
 +1.3100E+01 +5.6143E+00 +9.9620E+01 +9.9611E+01 +8.9358E-03 +8.9699E-03
 +1.4100E+01 +6.0429E+00 +9.6112E+01 +9.6103E+01 +9.2141E-03 +9.5868E-03
 +1.5100E+01 +6.4714E+00 +9.2768E+01 +9.2759E+01 +9.4404E-03 +1.0176E-02
 +1.6100E+01 +6.9000E+00 +8.9572E+01 +8.9563E+01 +9.6453E-03 +1.0768E-02
 +1.7100E+01 +7.3286E+00 +8.6509E+01 +8.6499E+01 +9.8700E-03 +1.1409E-02
 +1.8100E+01 +7.7571E+00 +8.3566E+01 +8.3556E+01 +1.0139E-02 +1.2133E-02



Кривые - расчеты по приведенной выше программе [16]. Точки и треугольники – экспериментальные данные из работ [99,100,101].

Рисунок 1.16 - Фазы упругого ${}^4\text{He}^3\text{H}$ рассеяния.

Все эти результаты показывают, что точность фаз ядерного рассеяния, получаемая из этих расчетов обоими методами находится на уровне сотых долей процента в области низких энергий и любой из этих способов может применяться для реальных расчетов ядерных фаз упругого рассеяния в любых кластерных системах с центральными силами.

1.5 Программа расчета фаз рассеяния для центральных комплексных потенциалов

Приведем теперь программу для расчета комплексных фаз упругого рассеяния конечно - разностным методом. Здесь приняты

следующие обозначения: NN - Нижнее значение цикла по энергии, NV - Верхнее значение цикла по энергии, LN - Нижнее значение орбитального момента, LV - Верхнее значение орбитального момента, LH - Шаг по значениям орбитального момента, AM1 - Масса первой частицы в а.е.м., AM2 - Масса второй частицы в а.е.м., PM - Приведенная масса μ , Z1 - Заряд первой частицы в единицах заряда "е", Z2 - Заряд второй частицы в единицах заряда "е", A1 - Константа $\hbar^2/M_N = 41.4686$, где M_N - масса нуклона в а.е.м, равная 1, AK - Константа при кулоновском потенциале $1.439975 Z_1 Z_2 2\mu/\hbar^2$, N - Число шагов при интегрировании уравнения Шредингера, NH - Величина шага при интегрировании уравнения Шредингера, R00 - Расстояние, на котором выполняется сшивка численных функций с асимптотикой, VR1 - Глубина действительного потенциала, RRR - Радиус действительного потенциала, AR - Диффузность действительного потенциала Вудс - Саксоновского типа, VC1 - Глубина мнимой части потенциала, RRC - Радиус мнимой части потенциала, AC - Диффузность мнимой части потенциала Вудс - Саксоновского типа, RCU - Кулоновский радиус, L - Орбитальный момент, E1() - Энергия частиц в лабораторной системе, E() - Энергия частиц в системе центра масс, SK - Квадрат волнового числа k^2 , SS - Волновое число k, GG - Кулоновский параметр $= 3.44476 \cdot 10^{-2} Z_1 Z_2 \mu/k$.

REM ** ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФАЗ РАССЕЯНИЯ **

```
CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: NN=4000: N=100
DIM E(N), DE(N), DEE(N), FAZA(N,15), E1(N), X(NN), Y(NN),
ETA(N,15), SIG(N,15), SEC(N), FAZ(N,15)
DIM V(NN),W(NN),FM(20),FR(20),FR1(20),FM1(20),ET(N)
REM *****
A$="                КОМПЛЕКСНЫЕ ФАЗЫ"
B$="  E(CM)        FAZR(EXP)  FAZR(TEOR)  FAZC(EXP)
FAZC(TEOR) ETA(TEOR) "
SAVE=0: G$="C:\BASICA\FAZCOM\FAZALAL1.DAT"
PRINT      "-----":
PRINT B$
REM ***** ВИД ПОТЕНЦИАЛОВ *****
PI=4*ATN(1): NN=1: NV=1: LN=0: LV=10: LH=2: AM1=4: AM2=4
Z1=2:  Z2=2:   A1=41.4686:   PM=AM1*AM2/(AM1+AM2):
B1=2*PM/A1
AK=1.439975*Z1*Z2*B1: N=2000: R00=20: NH=R00/N
REM ***** AL - AL 51.1 *****
E1(1)=51.1
REM ***** ФАЗЫ AL - AL 51.1 *****
FR(0)=291: FR(2)=245: FR(4)=163: FR(6)=28: FR(8)=4.2: FR(10)=0.5
```

```

FM(0)=0.51: FM(2)=0.51: FM(4)=0.53: FM(6)=0.855: FM(8)=0.985
FM(10)=0.998: FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I
FOR I=LN TO LV STEP LH: FR1(I)=FR(I)*PI/180
REM FM1(I)=FM(I)*PI/180
NEXT I: REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ
*****
V22=122: A22=0.74: R22=1.81: V33=11: A33=0.74: R33=1.81
RCU=1.81: VN2=-V22*B1: VN3=-V33*B1
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗ РАССЕЯНИЯ *****
FOR JJ=NN TO NV: SK=E(JJ)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SIGMRR=0: SIGMAS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH
CALL FUN (X(), Y(), R22, VN2, A22, R33, VN3, A33, RCU, L, SK,
AK)
RR1=HH*SS*(N-5): RR2=HH*SS*N: X1=X(N-5): X2=X(N)
Y1=Y(N-5): Y2=Y(N)
REM ***** КУЛОНОВСКИЕ ФУНКЦИИ *****
CALL CUL(GG,RR1,L,F1,G1,FP1,GP1)
CALL CUL(GG,RR2,L,F2,G2,FP2,GP2)
REM ***** ПОИСК ФАЗ *****
AA1=X2*F1-X1*F2: BB1=Y1*G2-Y2*G1: DD1=X1*G2-X2*G1
CC1=Y2*F1-Y1*F2: AA=BB1-AA1: BB=-CC1-DD1: CC=AA1+BB1
DD=CC1-DD1: DD0=AA^2+BB^2: SS1=(AA*CC+BB*DD)/DD0
SS2=(AA*DD-BB*CC)/DD0: ETA(JJ,L)=SQR(SS1^2+SS2^2)
SS22=SS2/ETA(JJ,L): SS11=SS1/ETA(JJ,L)
SIG(JJ,L)=-LOG((ETA(JJ,L)))/2
FAZ=SS22/(1+SS11): FAZ(JJ,L)=ATN(FAZ): IF FAZ(JJ,L)>0 GOTO
901
FAZ(JJ,L)=FAZ(JJ,L)+PI
901 FAZA(JJ,L)=FAZ(JJ,L)*180/PI: IF SIG(JJ,L)>0 GOTO 911
SIG(JJ,L)=SIG(JJ,L)+PI
911 SIG(JJ,L)=SIG(JJ,L)*180/PI: A=FAZ(JJ,L)
SIGMAR = SIGMAR + (2*L+1)*(1 - (ETA(JJ,L))^2)
SIGMAS = SIGMAS + (2*L+1)*(ETA(JJ,L))^2*(SIN(A))^2
PRINT USING " +#.###^" ; L; FR(L); FAZA(JJ,L); FM(L);
SIG(JJ,L)
ETA(JJ,L): NEXT L: SIGMAR=10*4*PI*SIGMAR/SK
SIGMAS=10*4*PI*SIGMAS/SK
PRINT " SIGR - THEOR = ";SIGMAR;
PRINT " SIGS - THEOR = ";SIGMAS: NEXT JJ
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФ. СЕЧЕНИЙ *****
FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SIGMAR=0: SIGMAS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: A=FR1(L): ET(L)=FM(L)

```


AK)

```

SHARED HH,N: HK=HH*HH: X(0)=0: X(1)=1E-3: Y(0)=0:
Y(1)=1E-3
FOR K=1 TO N-1: R=K*HH: FR1=V2/(1+EXP((R-R2)/A2))
FC1=V3/(1+EXP((R-R3)/A3)): FR=SK-FR1-L*(L+1)/R^2
IF R>RCU GOTO 177: FR=FR-AK/(2*RCU)*(3-(R/RCU)^2): GOTO
188
177 FR=FR-AK/R
188 FC=FC1: F=2-FR*HK: G=FC*HK: X(K+1)=F*X(K)-X(K-1)-
G*Y(K)
Y(K+1)=F*Y(K)-Y(K-1)+G*X(K): NEXT: END SUB
SUB SEC (F(100), GG, SS, TMI, TMA, TH, S(100), E(100), LMI,
LMA, LH, NYS)
SHARED PI: DIM S0(20),P(20)
RECU1=0: AIMCUL1=0: CALL CULFAZ(GG,S0())
FOR TT=TMI TO TMA STEP TH: T=TT*PI/180: XP=COS(T)
A=2/(1-XP): BB=-GG*A: ALO=GG*LOG(A)+2*S0(0)
RECU1=BB*COS(ALO): AIMCUL1=BB*SIN(ALO)
IF NYS=0 GOTO 555
PT=PI-T: X1P=COS(PT): A1=2/(1-X1P): BB1=-GG*A1
ALO1=GG*LOG(A)+2*S0(0): RECU1=BB1*COS(ALO1)
AIMCUL1=BB1*SIN(ALO1)
555 RENU1=0: AIMNU1=0: RENU1=0: AIMNU1=0
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: AL=E(L)*COS(2*F(L))-1
BE=E(L)*SIN(2*F(L)): LL=2*L+1: SL=2*S0(L)
CALL POLLEG(XP,L,P())
RENU1=RENU1+LL*(BE*COS(SL)+AL*SIN(SL))*P(L)
AIMNU1=AIMNU1+LL*(BE*SIN(SL)-AL*COS(SL))*P(L)
IF NYS=0 GOTO 556: CALL POLLEG(X1P,L,P())
RENU1=RENU1+LL*(BE*COS(SL)+AL*SIN(SL))*P(L)
AIMNU1=AIMNU1+LL*(BE*SIN(SL)-AL*COS(SL))*P(L)
556 NEXT L: RE=RECU1+RECU1+RENU1+RENU1
AIM=AIMCUL1+AIMCUL1+AIMNU1+AIMNU1
S(TT)=10*(RE^2+AIM^2)/4/SS^2: NEXT TT: END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB CULFAZ(G,F(20))
C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5
S=S+A: NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ
FOR I=1 TO 20: F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB

```

Приведем результаты контрольного счета по этой программе.

Рассматривался реальный физический процесс рассеяния в системе ядерных частиц ${}^4\text{He}^4\text{He}$ при энергии 51.1 МэВ с комплексным потенциалом. Экспериментальные данные по дифференциальным сечениям приведены в работе [102]. Там же выполнен анализ этих данных по оптической модели. В результате найдены параметры Вудс - Саксоновского потенциала вида

$$V(r) = \frac{V + iW}{\left[\exp\left(\frac{r-R}{a}\right) + 1 \right]} + V_c(r) \quad ,$$

где $V_c(r)$ – кулоновский потенциал и

$$V = -122 \pm 3 \text{ МэВ} \quad , \quad W = -11 \pm 2 \text{ МэВ} \quad , \\ R = 1.81 \text{ Фм} \quad , \quad a = 0.74 \pm 0.03 \text{ Фм} \quad , \quad R_c = R \quad .$$

Такой потенциал приводит к фазам рассеяния и параметрам неупругости, которые приведены в таблице 1.4, вместе с нашими расчетами. В работе [102] приводится также полное экспериментальное сечение реакций $\sigma_r = 770 \pm 100$ мб при данной энергии.

Таблица 1.4 - Результаты фазового анализа.

L	δ , град., [102]	δ , град. (Наш расчет)	η [102]	η (Наш расчет)
0	111±4	1.123E+02	0.51±0.07	5.102E-01
2	65±4	6.655E+01	0.51±0.07	5.177E-01
4	163±4	1.649E+02	0.53±0.07	5.414E-01
6	28±3	2.935E+01	0.855±0.03	8.501E-01
8	4.2±0.6	4.422E+00	0.985±0.004	9.841E-01
10	0.5±0.1	7.464E -01	0.998±0.001	9.972E-01

Используя эти параметры потенциала, были выполнены расчеты фаз рассеяния, приведенные в таблице 1.9, и полного сечения реакций $\sigma_r=766.1$ мб. по описанной выше программе.

Видно, что практически все расчетные величины (исключая последнюю действительную фазу для $L = 10$), в пределах ошибок, совпадают с табличными данными [102]. Если использовать табличные фазы, то для сечения реакций получается величина $\sigma_r = 764.7$ мб., которая также, как и предыдущая, хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Таким образом, в случае только действительных центральных

потенциалов, рассмотрены общие и численные методы решения одного уравнения Шредингера, продемонстрирована точность физических расчетов, которую позволяют получить такие методы и их полную применимость для нахождения фаз ядерного рассеяния.

Выполнены контрольные расчеты ядерных фаз рассеяния различных ядерных частиц конечно - разностным методом и методом Рунге - Кутты с реальными потенциалами взаимодействия и проведено их взаимное сравнение, которое демонстрирует совпадение результатов с точностью порядка нескольких сотых долей процента.

Рассмотрен случай, когда центральный потенциал содержит, как действительную, так и мнимую части, тогда уравнение Шредингера переходит в связанную систему уравнений. Изложены общие и численные методы решения такой системы с достаточно простыми начальными и асимптотическими условиями.

Для этого случая также приводятся контрольные расчеты ядерных фаз рассеяния и сравнение их с некоторыми результатами, полученными в других работах. Совпадение фаз наблюдается практически в пределах экспериментальных ошибок.

2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ТЕНЗОРНОЙ КОМПОНЕНТОЙ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

В этой главе приведены математические методы для решения системы уравнений Шредингера в случае наличия в действительном потенциале взаимодействия тензорной компоненты при положительных собственных значениях, которые являются энергией нуклон - нуклонной (NN) системы, т.е., так же, как и раньше, рассматриваются задачи ядерного рассеяния.

Описаны общие и вычислительные методы решения системы уравнений Шредингера для задачи рассеяния с тензорными силами, когда начальные и асимптотические условия записываются в сравнительно общем виде. В матричной форме дан весь основной математический аппарат для решения такой задачи. Приведен текст компьютерной программы, которая позволяет выполнять расчеты ядерных фаз рассеяния с тензорными потенциалами.

2.1 Общие методы решение системы уравнений Шредингера

Использование ядерных потенциалов с тензорной компонентой приводит нас к системе связанных уравнений Шредингера. Будем исходить в дальнейшем из обычных уравнений [59,60], которые учитывают действительные центральную и тензорную часть ядерных потенциалов

$$u''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{cul}(r)]u(r) = \sqrt{8} V_t(r)w(r) \quad , \quad (2.1)$$

$$w''(r) + [k^2 - V_c(r) - 6/r^2 - V_{cul}(r) + 2V_t(r)]w(r) = \sqrt{8} V_t(r)u(r) \quad ,$$

где $u(r)$ и $w(r)$ – скалярные искомые волновые функции, а штрихи обозначают производные по r ,

r – скалярное расстояние между частицами, измеряемое в Ферми (Фм): $1 \text{ Фм} = 10^{-15} \text{ м}$,

$V_{cul}(r) = 2\mu / \hbar^2 Z_1 Z_2 / r$ - кулоновский потенциал,

\hbar - постоянная Планка: $1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$,

Z_1, Z_2 – заряды частиц в единицах элементарного заряда: $1 \text{ э.з.} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$,

μ - приведенная масса двух частиц, равная $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ в атомных единица массы: $1 \text{ а.е.м.} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$,

Константа $\hbar^2 / M_N = 41.4686$ (или 41.47) МэВ Фм²,

M_N – средняя масса нуклона, равная 1 а.е.м. ,

$k^2 = 2\mu E / \hbar^2$ - волновое число относительного движения частиц в Фм^{-2} ,

E - энергия относительного движения частиц в мегаэлектрон-вольтах: $1 \text{ МэВ} = 1.60 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$,

$V_c = 2\mu / \hbar^2 V_{cn}(r)$ - центральная часть потенциала,

$V_t = 2\mu / \hbar^2 V_{tn}(r)$ - тензорная часть потенциала взаимодействия,

$V_{cn}(r)$ и $V_{tn}(r)$ - радиальные части центрального и тензорного потенциалов, которые обычно берутся в виде гауссойды или экспоненты.

Решением системы (2.1) являются четыре волновые функции, получающиеся с двумя типами начальных условий вида [59,60]

$$1) u_1(0)=0, \quad u_1'(0)=1, \quad w_1(0)=0, \quad w_1'(0)=0, \quad (2.2)$$

$$2) u_2(0)=0, \quad u_2'(0)=0, \quad w_2(0)=0, \quad w_2'(0)=1,$$

которые для состояний рассеяния ($k^2 > 0$) образуют линейно независимые комбинации, представляемые в виде [59,60]

$$u_\alpha = C_{1\alpha} u_1 + C_{2\alpha} u_2 \longrightarrow \text{Cos}(\epsilon) [F_0 \text{Cos}(\delta_\alpha) + G_0 \text{Sin}(\delta_\alpha)],$$

$$w_\alpha = C_{1\alpha} w_1 + C_{2\alpha} w_2 \longrightarrow \text{Sin}(\epsilon) [F_2 \text{Cos}(\delta_\alpha) + G_2 \text{Sin}(\delta_\alpha)],$$

$$u_\beta = C_{1\beta} u_1 + C_{2\beta} u_2 \longrightarrow -\text{Sin}(\epsilon) [F_0 \text{Cos}(\delta_\beta) + G_0 \text{Sin}(\delta_\beta)],$$

$$w_\beta = C_{1\beta} w_1 + C_{2\beta} w_2 \longrightarrow \text{Cos}(\epsilon) [F_2 \text{Cos}(\delta_\beta) + G_2 \text{Sin}(\delta_\beta)], \quad (2.3)$$

где F_L и G_L - кулоновские функции рассеяния [59,60], δ - фазы рассеяния, ϵ - параметр смешивания состояний с разными орбитальными моментами.

Пары функций u_α и w_α , и u_β и w_β являются наиболее общими решениями уравнений (2.1) и при больших расстояниях r порядка 10-20 Фм. стремятся к своим асимптотическим значениям, определяемым правой частью выражений (2.3). В случае равенства нулю тензорной части потенциала, параметр смешивания состояний с различным орбитальным моментом ϵ становится равен нулю, уравнений (2.1) превращается в два не связанных уравнения и функции u_α и w_β переходят в их решения u_0 и w_2 , которые определяют волновые функции рассеяния частиц с относительным орбитальным моментом 0 и 2.

Если вынести в правой части $\text{Cos}(\delta)$, выражения (2.3) преобра-

зуются

$$\begin{aligned} u_{1\alpha} &= C'_{1\alpha} u_1 + C'_{2\alpha} u_2 \longrightarrow \text{Cos}(\epsilon) [F_0 + G_0 \text{tg}(\delta_\alpha)] , \\ w_{1\alpha} &= C'_{1\alpha} w_1 + C'_{2\alpha} w_2 \longrightarrow \text{Sin}(\epsilon) [F_2 + G_2 \text{tg}(\delta_\alpha)] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2\beta} &= C'_{1\beta} u_1 + C'_{2\beta} u_2 \longrightarrow -\text{Sin}(\epsilon) [F_0 + G_0 \text{tg}(\delta_\beta)] , \\ w_{2\beta} &= C'_{1\beta} w_1 + C'_{2\beta} w_2 \longrightarrow \text{Cos}(\epsilon) [F_2 + G_2 \text{tg}(\delta_\beta)] , \end{aligned}$$

где $C' = C/\text{Cos}(\delta)$ и $u_{i\alpha} = u_\alpha/\text{Cos}(\delta)$.

В случае нейтрон – протонной (нр) задачи рассеяния, когда заряд одной из частиц равен нулю, кулоновские функции F_L и G_L превращаются в обычные сферические функции Бесселя.

Более компактно можно записать приведенные выше выражения для $u_{1\alpha}$ и $w_{1\alpha}$, и $u_{2\beta}$ и $w_{2\beta}$ в матричном виде [103]

$$V = XC' \longrightarrow FU + GU\sigma ,$$

где

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} u_{1\alpha} & u_{2\beta} \\ w_{1\alpha} & w_{2\beta} \end{pmatrix}, & X &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}, \\ C' &= \begin{pmatrix} C'_{1\alpha} & C'_{1\beta} \\ C'_{2\alpha} & C'_{2\beta} \end{pmatrix}, & F &= \begin{pmatrix} F_0 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}, & G &= \begin{pmatrix} G_0 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} \text{Cos}\epsilon & -\text{Sin}\epsilon \\ \text{Sin}\epsilon & \text{Cos}\epsilon \end{pmatrix}, & \sigma &= \begin{pmatrix} \text{tg}\delta_\alpha & 0 \\ 0 & \text{tg}\delta_\beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Аналогичное уравнение можно написать и для производных ВФ:

$$V' = X'C' \longrightarrow F'U + G'U\sigma .$$

Исключая из этих уравнений C' , после несложных преобразований, для K матрицы рассеяния, определяемой в виде $U\sigma U^{-1}$, окончательно будем иметь

$$K = U\sigma U^{-1} = - [X(X')^{-1}G' - G]^{-1} [X(X')^{-1}F' - F] .$$

Тем самым, K матрица рассеяния оказывается выраженной через кулоновские функции, решения исходных уравнений и их производные при некотором $r = R$.

Как известно, К матрица рассеяния в параметризации Блатта - Биденхарна выражается через фазы рассеяния и параметр смешивания следующим образом [59,60]

$$K = \begin{pmatrix} \cos^2 \epsilon \operatorname{tg} \delta_\alpha + \sin^2 \epsilon \operatorname{tg} \delta_\beta & \cos \epsilon \sin \epsilon (\operatorname{tg} \delta_\alpha - \operatorname{tg} \delta_\beta) \\ \cos \epsilon \sin \epsilon (\operatorname{tg} \delta_\alpha - \operatorname{tg} \delta_\beta) & \sin^2 \epsilon \operatorname{tg} \delta_\alpha + \cos^2 \epsilon \operatorname{tg} \delta_\beta \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Тогда, приравнявая соответствующие элементы, получим для матричных элементов К матрицы следующие выражения

$$\begin{aligned} K_{12} = K_{21} &= 1/2 (\operatorname{tg} \delta_\alpha - \operatorname{tg} \delta_\beta) \sin(2\epsilon) \quad , \\ K_{11} + K_{22} &= \operatorname{tg} \delta_\alpha + \operatorname{tg} \delta_\beta \quad , \\ K_{11} - K_{22} &= (\operatorname{tg} \delta_\alpha - \operatorname{tg} \delta_\beta) \cos(2\epsilon) \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Откуда имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\epsilon) &= 2K_{12}/(K_{11}-K_{22}) \quad , \quad \operatorname{tg} \delta_\alpha = (A+B)/2 \quad , \quad \operatorname{tg} \delta_\beta = (A - B)/2 \quad , \\ A = K_{11} + K_{22} \quad , \quad B &= (K_{11} - K_{22})/\cos(2\epsilon) \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= f(u_1 w'_2 - u_2 w'_1) \quad , \quad b = f(u'_1 u_2 - u_1 u'_2) \quad , \\ c &= f(w_1 w'_2 - w'_1 w_2) \quad , \quad d = f(u'_1 w_2 - u'_2 w_1) \quad , \\ f &= (u'_1 w'_2 - u'_2 w'_1)^{-1} \quad , \\ A &= aG'_0 - G_0 \quad , \quad B = bG'_2 \quad , \\ E &= cG'_0 \quad , \quad D = dG'_2 - G_2 \quad , \\ F &= PD \quad , \quad G = -PB \quad , \\ N &= -PE \quad , \quad M = PA \quad , \\ P &= -(AD - BE)^{-1} \quad , \quad R = aF'_0 - F_0 \quad , \\ S &= bF'_2 \quad , \quad T = cF'_0 \quad , \\ Z &= dF'_2 - F_2 \quad , \quad K_{11} = FR + GT \quad , \\ K_{12} &= FS + GZ \quad , \quad K_{21} = NS + MZ \quad , \\ K_{22} &= NR + MT \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Таким образом, получаются сравнительно простые выражения для определения фаз рассеяния δ_α и δ_β и параметров смешивания ϵ , которые требуется определить для процессов рассеяния квантовых частиц, через значения численных волновых функций на асимптотике и известные кулоновские функции.

Для численных решений, производные и сами функции можно заменить на значения волновых функций в двух точках R_1 и R_2 - при этом вид полученных выражений не меняется. Надо только

считать, что величины без штриха, например, находятся в первой точке, а со штрихом во второй. Расстояние между точками обычно выбирается равным 5-10 шагов решения численной схемы.

По определенным фазам легко можно найти и коэффициенты C' в любой из рассматриваемых точках

$$C' = X^{-1}(FU + GU\sigma) .$$

Расписывая это матричное выражение, имеем

$$\begin{aligned} C'_{1\alpha} &= a(A + F) + b(E + H) , & C'_{2\alpha} &= c(A + F) + d(E + H) , \\ C'_{1\beta} &= a(B + G) + b(D + K) , & C'_{2\beta} &= c(B + G) + d(D + K) , \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} a &= fw_2 , & b &= -fu_2 , & c &= -fw_1 , & d &= fu_1 , & f &= (u_1w_2 - u_2w_1)^{-1} , \\ A &= F_0\text{Cos}(\epsilon) , & B &= -F_0\text{Sin}(\epsilon) , \\ E &= F_2\text{Sin}(\epsilon) , & D &= F_2\text{Cos}(\epsilon) , \\ F &= G_0\text{Cos}(\epsilon)\text{tg}(\delta_\alpha) , & G &= -G_0\text{Sin}(\epsilon)\text{tg}(\delta_\beta) , \\ H &= G_2\text{Sin}(\epsilon)\text{tg}(\delta_\alpha) , & K &= G_2\text{Cos}(\epsilon)\text{tg}(\delta_\beta) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

В результате, можно получить полный вид ВФ во всей области при $r < R$. Радиус шивки R обычно принимается равным 15 - 20 Фм. Для численного решения исходного уравнения можно использовать метод Рунге - Кутта четвертого порядка [68-72] с автоматическим выбором шага при заданной точности результатов по фазам и параметру смешивания. Относительная точность обычно задается на уровне 0.1%.

Фазы рассеяния для NN задачи обычно принято выражать в параметризации Сака, а не в используемом выше представлении Блатта - Биденхарна. Между этими представлениями фаз существует простая связь [59,60]

$$\begin{aligned} \theta_J^{J-1} + \theta_J^{J+1} &= \delta_\alpha + \delta_\beta , & \text{tg}(\theta_J^{J-1} - \theta_J^{J+1}) &= \text{Cos}(2\epsilon)\text{tg}(\delta_\alpha - \delta_\beta) , \\ \hat{\text{Sin}}(2\epsilon) &= \text{Sin}(2\epsilon)\text{Sin}(\delta_\alpha - \delta_\beta) , \end{aligned}$$

где $\theta_J^{J\pm 1}$, $\hat{\epsilon}$ - фазы и параметр смешивания в параметризации

Сака.

2.2 Численные методы решения системы уравнений Шредингера

Решения системы (2.1) связанных уравнений Шредингера вида [59]

$$u''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{cul}(r)]u(r) = \sqrt{8} V_t(r)w(r) , \quad (2.11)$$

$$w''(r) + [k^2 - V_c(r) - 6/r^2 - V_{cul}(r) + 2 V_t(r)]w(r) = \sqrt{8} V_t(r)u(r)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_1(0)=0 , \quad u'_1(0)=1 , \quad w_1(0)=0 , \quad w'_1(0)=0 , \\ u_2(0)=0 , \quad u'_2(0)=0 , \quad w_2(0)=0 , \quad w'_2(0)=1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

образуют линейно независимые комбинации, представляемые в форме [59]

$$\begin{aligned} u_\alpha = C_{1\alpha} u_1 + C_{2\alpha} u_2 , \quad w_\alpha = C_{1\alpha} w_1 + C_{2\alpha} w_2 , \\ u_\beta = C_{1\beta} u_1 + C_{2\beta} u_2 , \quad w_\beta = C_{1\beta} w_1 + C_{2\beta} w_2 . \end{aligned}$$

Эта система может решаться методом Рунге - Кутты [68] с автоматическим выбором шага по заданной точности вычисления фаз.

Для нахождения решения системы двух уравнений второго порядка, перепишем уравнение (2.11) в следующем виде [67]

$$\begin{aligned} u'' + Au = Bw , \\ w'' + Cw = Bu , \end{aligned} \quad (2.13)$$

или

$$\begin{aligned} u'' = Bw - Au = F(x,u,w) , \\ w'' = Bu - Cw = G(x,u,w) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Введем две новые переменные

$$y = u' , \quad z = w' .$$

Тогда система переписывается в виде четырех уравнений первого порядка

$$u' = y , \quad y' = F(x,u,w) ,$$

$$w' = z \quad , \quad z' = G(x,u,w) \quad , \quad (2.15)$$

при

$$\begin{aligned} u_1(0) = 0 \quad , \quad y_1(0) = \text{const} \quad , \quad w_1(0) = 0 \quad , \quad z_1(0) = 0 \quad , \\ u_2(0) = 0 \quad , \quad y_2(0) = 0 \quad , \quad w_2(0) = 0 \quad , \quad z_2(0) = \text{const} \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Решение такой системы, записанной в общем виде

$$\begin{aligned} u' = f(x,y,z,u,w) \quad , \quad y' = g(x,y,z,u,w) \quad , \\ w' = d(x,y,z,u,w) \quad , \quad z' = s(x,y,z,u,w) \quad , \end{aligned} \quad (2.17)$$

можно представить в форме

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \quad , \quad z_{n+1} = z_n + \Delta z_n \quad , \\ u_{n+1} = u_n + \Delta u_n \quad , \quad w_{n+1} = w_n + \Delta w_n \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta y_n = 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad , \\ \Delta z_n = 1/6(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \quad , \\ \Delta u_n = 1/6(v_1 + 2v_2 + 2v_3 + v_4) \quad , \\ \Delta w_n = 1/6(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) \quad , \end{aligned} \quad (2.19)$$

и

$$\begin{aligned} k_1 = hg(x_n, y_n, z_n, u_n, w_n) \quad , \quad m_1 = hs(x_n, y_n, z_n, u_n, w_n) \quad , \\ v_1 = hf(x_n, y_n, z_n, u_n, w_n) \quad , \quad b_1 = hd(x_n, y_n, z_n, u_n, w_n) \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 = hg(x_n+h/2, y_n+k_1/2, z_n+m_1/2, u_n+v_1/2, w_n+b_1/2) \quad , \\ m_2 = hs(x_n+h/2, y_n+k_1/2, z_n+m_1/2, u_n+v_1/2, w_n+b_1/2) \quad , \\ v_2 = hf(x_n+h/2, y_n+k_1/2, z_n+m_1/2, u_n+v_1/2, w_n+b_1/2) \quad , \\ b_2 = hd(x_n+h/2, y_n+k_1/2, z_n+m_1/2, u_n+v_1/2, w_n+b_1/2) \quad , \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} k_3 = hg(x_n+h/2, y_n+k_2/2, z_n+m_2/2, u_n+v_2/2, w_n+b_2/2) \quad , \\ m_3 = hs(x_n+h/2, y_n+k_2/2, z_n+m_2/2, u_n+v_2/2, w_n+b_2/2) \quad , \\ v_3 = hf(x_n+h/2, y_n+k_2/2, z_n+m_2/2, u_n+v_2/2, w_n+b_2/2) \quad , \\ b_3 = hd(x_n+h/2, y_n+k_2/2, z_n+m_2/2, u_n+v_2/2, w_n+b_2/2) \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 = hg(x_n+h, y_n+k_3, z_n+m_3, u_n+v_3, w_n+b_3) \quad , \\ m_4 = hs(x_n+h, y_n+k_3, z_n+m_3, u_n+v_3, w_n+b_3) \quad , \\ v_4 = hf(x_n+h, y_n+k_3, z_n+m_3, u_n+v_3, w_n+b_3) \quad , \end{aligned}$$

$$b_4 = hd(x_n+h, y_n+k_3, z_n+m_3, u_n+v_3, w_n+b_3) .$$

Поскольку

$$\begin{aligned} f(x,y,z,u,w) = y , & \quad g(x,y,z,u,w) = F(x,u,w) , \\ d(x,y,z,u,w) = z , & \quad s(x,y,z,u,w) = G(x,u,w) , \end{aligned}$$

то формулы (2.20) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} k_1 = hF(x_n, u_n, w_n) , \quad m_1 = hG(x_n, u_n, w_n) , \\ v_1 = hy_n , \quad b_1 = hz_n , \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} k_2 = hF(x_n+h/2, u_n+v_1/2, w_n+b_1/2) , \\ m_2 = hG(x_n+h/2, u_n+v_1/2, w_n+b_1/2) , \\ v_2 = h(y_n+k_1/2) , b_2 = h(z_n+m_1/2) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 = hF(x_n+h/2, u_n+v_2/2, w_n+b_2/2) , \\ m_3 = hG(x_n+h/2, u_n+v_2/2, w_n+b_2/2) , \\ v_3 = h(y_n+k_2/2) , b_3 = h(z_n+m_2/2) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 = hF(x_n+h, u_n+v_3, w_n+b_3) , \quad m_4 = hG(x_n+h, u_n+v_3, w_n+b_3) , \\ v_4 = h(y_n+k_3) , b_4 = h(z_n+m_3) . \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta u_n = 1/6h(6y_n + k_1 + k_2 + k_3) , \\ \Delta w_n = 1/6h(6z_n + m_1 + m_2 + m_3) \end{aligned} \quad (2.22)$$

и в формулах (2.20) вычислять нужно только два коэффициента k и m .

Ниже приведена программа вычисления ВФ и самих фаз рассеяния, использующая описанные выше методы. Начальные значения функций принимались равными

$$\begin{aligned} VA1 = 0 = u_1(0) \\ PA1 = \text{const} = y_1(0) \\ WA1 = 0 = w_1(0) \\ QA1 = 0 = z_1(0) \\ VA2 = 0 = u_2(0) \\ PA2 = 0 = y_2(0) \\ WA2 = 0 = w_2(0) \\ QA2 = \text{const} = z_2(0) \end{aligned}$$

SUB RRUN(VB1, WB1, VB2, WB2, PB1, QB1, PB2, QB2, VA1,

WA1, VA2, WA2, PA1, QA1, PA2, QA2)

REM ***** ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ РУНГЕ - КУТТА *****

SHARED H,X

X0=X: CALL F(X0,VA1,WA1,FK1): CALL GG(X0,VA1,WA1,FM1)

CALL F(X0,VA2,WA2,SK1): CALL GG(X0,VA2,WA2,SM1)

FK1=FK1*H: FM1=FM1*H: SK1=SK1*H: SM1=SM1*H

X0=X0+H/2: V1=VA1+PA1*H/2: W1=WA1+QA1*H/2

V2=VA2+PA2*H/2: W2=WA2+QA2*H/2: CALL F(X0,V1,W1,FK2)

CALL GG(X0,V1,W1,FM2): CALL F(X0,V2,W2,SK2)

CALL GG(X0,V2,W2,SM2): FK2=FK2*H: FM2=FM2*H:

SK2=SK2*H

SM2=SM2*H: V1=VA1+PA1*H/2+FK1*H/4

W1=WA1+QA1*H/2+FM1*H/4

V2=VA2+PA2*H/2+SK1*H/4: W2=WA2+QA2*H/2+SM1*H/4

CALL F(X0,V1,W1,FK3): CALL GG(X0,V1,W1,FM3)

CALL F(X0,V2,W2,SK3): CALL GG(X0,V2,W2,SM3)

FK3=FK3*H: FM3=FM3*H: SK3=SK3*H: SM3=SM3*H:

X0=X0+H/2

V1=VA1+PA1*H+FK2*H/2: W1=WA1+QA1*H+FM2*H/2

V2=VA2+PA2*H+SK2*H/2: W2=WA2+QA2*H+SM2*H/2

CALL F(X0,V1,W1,FK4): CALL GG(X0,V1,W1,FM4)

CALL F(X0,V2,W2,SK4): CALL GG(X0,V2,W2,SM4)

FK4=FK4*H: FM4=FM4*H: SK4=SK4*H: SM4=SM4*H

VB1=VA1+PA1*H+(FK1+FK2+FK3)*H/6

PB1=PA1+(FK1+2*FK2+2*FK3+FK4)/6

WB1=WA1+QA1*H+(FM1+FM2+FM3)*H/6

QB1=QA1+(FM1+2*FM2+2*FM3+FM4)/6

VB2=VA2+PA2*H+(SK1+SK2+SK3)*H/6

PB2=PA2+(SK1+2*SK2+2*SK3+SK4)/6

WB2=WA2+QA2*H+(SM1+SM2+SM3)*H/6

QB2=QA2+(SM1+2*SM2+2*SM3+SM4)/6: END SUB

SUB FAZ(DELA, DELB, EPS, C1A, C1B, C2A, C2B, VC1, WC1, VC2, WC2, VB1, WB1, VB2, WB2, N)

REM *** ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФАЗ РАССЕЯНИЯ ***

SHARED S,H,GGG

V11=VC1: V12=VB1: W11=WC1: W12=WB1: V21=VC2: V22=VB2

W21=WC2: W22=WB2: X1=H*S*(N - 3): X2=H*S*N: AL1=2

CALL CUL(GGG,X1,0,F01,G01): CALL CUL(GGG,X2,0,F02,G02)

CALL CUL(GGG,X1,2,F21,G21): CALL CUL(GGG,X2,2,F22,G22)

AP=V12*W22 - V22*W12: A=(V11*W22 - V21*W12)/AP

B=(V12*V21 - V22*V11)/AP: C=(- W12*W21+W22*W11)/AP

D=(V12*W21 - V22*W11)/AP: AA=A*G02 - G01: BB=B*G22

EE=C*G02: DD=D*G22 - G21: PP= - 1/(AA*DD - BB*EE)

```

FF=PP*DD: GG= - PP*BB: NN= - PP*EE: MM=PP*AA: RR=A*F02 -
F01
SS=B*F22: TT=C*F02: ZZ=D*F22 - F21: QK11=FF*RR+GG*TT
QK12=FF*SS+GG*ZZ: QK21=NN*RR+MM*TT
QK22=NN*SS+MM*ZZ
T2EPS=2*QK12/(QK11 - QK22): EPS=ATN(T2EPS)/2
AAA=QK11+QK22: BBB=(QK11 - QK22)/COS(2*EPS)
DELA=(AAA+BBB)/2: DELB=(AAA - BBB)/2: DELA=ATN(DELA)
DELB=ATN(DELB): A9=F02*COS(EPS)
F9=G02*COS(EPS)*TAN(DELA)
E9=F22*SIN(EPS): H9=G22*SIN(EPS)*TAN(DELA)
B9= - F02*SIN(EPS)
D9=F22*COS(EPS): G9= - G02*SIN(EPS)*TAN(DELB)
AK9=G22*COS(EPS)*TAN(DELB): FF1=1/(V12*W22 - V22*W12)
AA=FF1*W22: BB= - FF1*V22: CC= - FF1*W12: DD=FF1*V12
C1A=(AA*(A9+F9)+BB*(E9+H9))*COS(DELA)
C2A=(CC*(A9+F9)+DD*(E9+H9))*COS(DELA)
C1B=(AA*(B9+G9)+BB*(D9+AK9))*COS(DELB)
C2B=(CC*(B9+G9)+DD*(D9+AK9))*COS(DELB): END SUB
SUB F(X,Y,Z,F)
REM ***** ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ
В ПЕРВОМ УРАВНЕНИИ *****
SHARED SK,VCC,ACC,VTT,ATT,A5,A1,AKK
VC=VCC*EXP( - ACC*X^2): VC=VC+AKK/X
VT=VTT*EXP( - ATT*X^2)
UC=VC/A1: UT=VT/A1: F=UT*A5*Z - (SK - UC)*Y: END SUB
SUB GG(X,Y,Z,G)
REM ***** ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ
ВО ВТОРОМ УРАВНЕНИИ *****
SHARED SK,VCC,ACC,VTT,ATT,A5,A1,AKK
VC=VCC*EXP( - ACC*X^2): VC=VC+AKK/X
VT=VTT*EXP( - ATT*X^2)
UC=VC/A1: UT=VT/A1
G=UT*A5*Y - (SK - 6/X^2 - UC+2*UT+3*ULS)*Z: END SUB

```

Полностью программы расчета ядерных фаз упругого рассеяния при заданной энергии сталкивающихся частиц методом Рунге - Кутты, и некоторые полученные по ней результаты будут приведены в следующих параграфах.

2.3 Физические характеристики рассеяния при низких энергиях

Можно рассмотреть и низкоэнергетические характеристики процессов рассеяния в нуклон - нуклонной системе, такие как эф-

фактивный радиус и длина рассеяния, которые позволяют выполнять тестирование параметров ядерных потенциалов.

2.3.1 Центральные потенциалы

Будем исходить из обычного уравнения Шредингера с $L = 0$ без кулоновского взаимодействия (т.е. при пр рассеянии) для двух энергий и учитывать знак минус в ядерном потенциале [59]

$$\begin{aligned} u_1''(r) + [k_1^2 + V(r)]u_1(r) &= 0, \\ u_2''(r) + [k_2^2 + V(r)]u_2(r) &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Если рассматривать триплетное состояние пр системы, когда

$$u_g''(r) + [-\alpha^2 + V(r)]u_g(r) = 0, \quad (2.24)$$

то имеется связанное состояние, обозначенное индексом g . Волновые функции уравнений (1.72.) удовлетворяют условиям

$$u_1(0) = u_2(0) = u_g(0) = 0.$$

Рассмотрим их асимптотику $\bar{u}(r)$, потребовав

$$\bar{u}_1(0) = \bar{u}_2(0) = \bar{u}_g(0) = 1$$

и

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(r) &= \frac{\text{Sin}(k_i r + \delta_i)}{\text{Sin}\delta_i}, \\ \bar{u}_g(r) &= e^{-\alpha r}, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2$. Эти ВФ удовлетворяют уравнениям (2.23) и (2.24) без ядерного потенциала. Комбинируя уравнения (2.23) можно найти

$$k_2 \text{Ctg}\delta_2 - k_1 \text{Ctg}\delta_1 = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^\infty (\bar{u}_1 \bar{u}_2 - u_1 u_2) dr. \quad (2.25)$$

Из уравнений (2.23) и (2.24) можно получить

$$k_2 \text{Ctg}\delta_2 + \alpha = (k_2^2 + \alpha^2) \int_0^\infty (\bar{u}_g \bar{u}_1 - u_g u_1) dr. \quad (2.26)$$

Разложим величину $k\text{Ctg}\delta$ в ряд

$$k\text{Ctg}\delta_0 = -1/a + 1/2 r_0 k^2 \quad (2.27)$$

и определим длину рассеяния в виде

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} [k\text{Ctg}\delta_0] = -1/a ,$$

где введен индекс 0 для $L = 0$, причем δ_0 относится к $k = k_0$. Устремив k_2 к нулю в уравнениях (2.25) и (2.26), и опустив индекс 2 получим

$$k\text{Ctg}\delta_0 = -1/a + 1/2 k^2 \rho(0, E)$$

и

$$k\text{Ctg}\delta_0 = -\alpha + 1/2 (k^2 + \alpha^2) \rho(-\epsilon, E) , \quad (2.28)$$

где

$$\rho(0, E) = 2 \int_0^{\infty} (\bar{u}_0 \bar{u} - u_0 u) dr ,$$

$$\rho(-\epsilon, E) = 2 \int_0^{\infty} (\bar{u}_g \bar{u} - u_g u) dr .$$

Устремив энергию E к нулю, будем иметь

$$1/a = \alpha - 1/2 \alpha^2 \rho(-\epsilon, 0) ,$$

где

$$\rho(0, -\epsilon) = 2 \int_0^{\infty} (\bar{u}_g \bar{u}_0 - u_g u_0) dr .$$

Поскольку величины ρ слабо зависят от энергии [59] можно аппроксимировать их следующим образом

$$r_0 = \rho(0, 0) = 2 \int_0^{\infty} (\bar{u}_0^2 - u_0^2) dr ,$$

$$\bar{u}_0 = 1 - r/a_t . \quad (2.29)$$

Тогда получим

$$k \text{Ctg} \delta_0 = -\alpha + 1/2(k^2 + \alpha^2)r_0, \quad (2.30)$$

т.е.

$$1/a = \alpha - 1/2 \alpha^2 r_0,$$

где величина α полностью зависит от энергии связи дейтрона (связанное состояние пр системы). В зависимости от NN состояния рассматривают триплетные a_t и синглетные a_s длины рассеяния и эффективные радиусы r_s и r_t .

Если учесть кулоновские силы, то можно получить аналогичные выражения [59]. Исходим из уравнения

$$u_1''(r) + [k_1^2 + V(r) - 1/(pr)]u_1(r) = 0.$$

Его асимптотическое решение при $V(r > R) = 0$ имеет вид

$$\bar{u}(r) \rightarrow \left[\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} \right]^{1/2} \frac{\text{Sin}[kr - \eta \ln(2kr) + \delta_0 + \sigma_0]}{\text{Sin} \delta_0}.$$

Тогда получим

$$K = \rho [-1/a + 1/2 k^2 r_0], \quad (2.31)$$

где

$$K = \frac{\pi \text{Ctg} \delta_0}{e^{2\pi\eta} - 1} + h(\eta), \quad h(\eta) = -\ln \eta - C + \eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + \eta^2)},$$

$$-\rho/a = \lim_{k^2 \rightarrow 0} K, \quad \eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{k \hbar^2}, \quad r_0 = 2 \int_0^{\infty} (\bar{u}_0^2 - u_0^2) dr$$

и $C = 0.57721\dots$ - постоянная Эйлера. Для вычисления эффективных радиусов нужно выполнить численное интегрирование разности волновых функций, которые при малых энергиях слабо меняют свою форму. Интеграл от слабо осциллирующих функций может быть вычислен методом Симпсона, который можно записать в виде [68-72]

$$\int_a^b f(x) dx = h/3 [f(x_0) + 2A + 4B + f(x_{2m})],$$

где

$$A = \sum_{k=2}^{2m-2} f(x_k) \text{ – суммирование по четным } k ,$$

$$B = \sum_{k=1}^{2m-1} f(x_k) \text{ – суммирование по нечетным } k .$$

Весь интервал интегрирования разбивается на $n = 2m$ частей (n должно быть четным числом), а шаг вычисляется следующим образом

$$h = (b - a)/n = (b - a)/2/m .$$

Тогда $x_i = ih$ и $f_i = f(x_i)$, где i меняется от 0 до $2m$. Приведем теперь текст компьютерной программы на языке Turbo Basic для вычисления интеграла по методу Симпсона.

SUB SIMP(V(5000),N,H,S)

REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО СИМПСОНУ *****

A=0: B=0: FOR I=1 TO N-1 STEP 2: B=B+V(I): NEXT

FOR J=2 TO N-2 STEP 2: A=A+V(J): NEXT

S=H*(V(0)+V(N)+2*A+4*B)/3: END SUB

Чтобы использовать эту подпрограмму нужно предварительно вычислить массив значений подинтегральной функции $F(x)$ в N точках (плюс одна точка при $i = 0$) с шагом H и передать его в подпрограмму оператором вызова

CALL SIMP(F(),N,H,SIM) .

Тогда значение переменной SIM будет равно величине интеграла.

2.3.2 Потенциалы с тензорной компонентой

При учете тензорных потенциалов взаимодействия исходим из уравнений вида [59]

$$u''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{cul}(r)]u(r) = \sqrt{8} V_t(r)w(r) , \tag{2.32}$$

$$w''(r) + [k^2 - V_c(r) - 6/r^2 - V_{cul}(r) + 2V_t(r)]w(r) = \sqrt{8} V_t(r)u(r) ,$$

с граничными условиями при $r \rightarrow \infty$

$$u_{\alpha} = \text{Cos}(\epsilon) \frac{\text{Sin}(kr + \delta_{\alpha})}{\text{Sin}\delta_{\alpha}}$$

$$w_{\alpha} = \text{Sin}(\epsilon) \frac{\text{Sin}(kr - \pi + \delta_{\alpha})}{\text{Sin}\delta_{\alpha}}$$

где δ_{α} и ϵ представляют сдвиг фазы и параметр смешивания состояний с разными орбитальными моментами. Если использовать кулоновские функции, то можно написать

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha} &= \text{Cos}(\epsilon)[\text{Ctg}\delta_{\alpha}F_0(kr) + G_0(kr)] \\ \bar{w}_{\alpha} &= \text{Sin}(\epsilon)[\text{Ctg}\delta_{\alpha}F_2(kr) + G_2(kr)] \end{aligned} \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned} F_0(x) &= \text{Sin}(x) \quad , \quad G_0(x) = \text{Cos}(x) \quad , \\ F_2(x) &= (3/x^2 - 1)\text{Sin}(x) - 3\text{Cos}(x)/x \quad , \\ G_2(x) &= (3/x^2 - 1)\text{Cos}(x) - 3\text{Sin}(x)/x \quad , \end{aligned}$$

при отсутствии кулоновского взаимодействия. Волновая функция (2.33) w_{α} расходится при $r = 0$ и мы будем использовать несколько другое представление [59]

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\alpha} &= u_{\alpha} = \text{Cos}(\epsilon)[\text{Ctg}\delta_{\alpha}F_0(kr) + G_0(kr)] \\ \bar{w}_{\alpha} &= w_{\alpha} - \frac{3\text{Sin}\epsilon}{(kr)^2} = \text{Sin}(\epsilon) \left[\text{Ctg}\delta_{\alpha}F_2(kr) + G_2(kr) - \frac{3}{(kr)^2} \right] \end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют следующим измененным уравнениям

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 \right) \bar{u}_{\alpha} = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{6}{r^2} \right) \bar{w}_{\alpha} = -3\text{Sin}\epsilon / r^2 \quad .$$

Выполняя процедуру, аналогичную описанной выше, получим

$$k\text{Ctg}\delta_\alpha = -1/a_t + k^2 r_{0t} / (2\text{Cose}) \quad , \quad (2.34)$$

где

$$r_{0t} = 2 \int_0^\infty [\bar{u}_\alpha^2 - u_\alpha^2 - w_\alpha^2] dr \quad , \quad \bar{u}_\alpha = 1 - r/a_t \quad (2.35)$$

и

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} (k\text{Ctg}\delta_\alpha) = -1/a_t$$

- формулы, которые полностью аналогичны, рассмотренному выше случаю центральных ядерных сил.

2.4 Программа расчета ядерных фаз рассеяния для потенциалов с тензорной компонентой

Программа для вычисления ядерных фаз рассеяния с учетом тензорных сил, приведенная ниже, написана на алгоритмическом языке “Basic” и использовалась для расчетов в среде компилятора “Turbo Basic” фирмы “Borland International Inc.” [103,104].

Описание параметров программы

ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ - задание начальных условий работы программы для численного решения уравнения Шредингера и физические параметры, определяющие начальные условия задачи рассеяния:

AM1=2 - масса первой частицы,
 AM2=4 - масса второй частицы,
 Z1=1 - заряд первой частицы,
 Z2=2 - заряд второй частицы,
 AM=AM1+AM2 - сумма масс,
 PM=AM1*AM2/AM - приведенная масса μ ,
 A1=41.4686/(2*PM) - константа $\hbar^2/2\mu$,
 PI=3.14159265 - число π ,
 VCC= - 71.979 - глубина центральной части потенциала в МэВ,
 ACC=0.2 - параметр ширины центральной части потенциала в Фм^{-2} (Ферми),
 VTT= - 27. - глубина тензорной части потенциала в МэВ,
 ATT=1.12 - параметр ширины тензорной части потенциала в Фм^{-2} ,
 EN=1 - нижний предел энергии в МэВ в лабораторной системе

для расчета фаз,

$NM=13$ - число шагов по энергии,

$EH=1$ - величина шага по энергии в МэВ,

$N=1000$ - начальное число шагов при интегрировании системы уравнений,

$H0=0.02$ - начальная величина шага при интегрировании системы уравнений в Фм,

$EPP=1D - 03$ - относительная точность вычисления фаз рассеяния, т.е. 0.1%,

$AKK=1.439975 * Z1 * Z2$ - константа для кулоновского потенциала,

$B1=2 * PM / A1$ - константа $\hbar^2 / 2m_N$, определяемая через массу нуклона и равная 41.4686 МэВ Фм²,

$A5=SQR(8)$ - константа $\sqrt{8}$,

S - волновое число k в системе центра масс, определяемое в виде $S=SQR(SK)$, где $SK=E1/A1$ и $E1 = E * PM / AM1$ - или $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$,

$GGG=3.44477E-02 * Z1 * Z2 * PM / S$ - кулоновский параметр, необходимый для нахождения кулоновский фаз.

Описание блоков основной программы

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ - блок программы, который обращается к подпрограмме **RRUN**, для решения системы начальных уравнений Шредингера по методу Рунге - Кутты при заданной точности результатов по фазам.

РАСЧЕТ ФАЗ РАССЕЯНИЯ - блок программы, вычисляющий физические фазы рассеяния на основе полученных при решении исходных уравнений функций рассеяния. Блок обращается к подпрограмме **FAZ** для расчета фаз рассеяния. Метод расчета фаз изложен выше в первой главе. В случае **NN** задачи, когда массы частиц равны, находятся фазы в параметризации Сака [103]. Для ⁴He²N рассеяния фазы определяются в параметризации Блатта - Биденхарна. Найденные фазы записываются в файл с заданным именем.

РАСЧЕТ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ - блок расчета волновых функций рассеяния, нормированных на заданную асимптотику. Метод расчета изложен выше в первой главе. Вычисленные функции записываются в заданный числовой файл.

РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА И ДЛИНЫ РАССЕЯНИЯ - расчет эффективного радиуса и длины рассеяния по стандартным формулам теории ядерного рассеяния для **NN** потенциалов с тензорной компонентой [103]. Расчет проводится только при малых энергиях рассеяния < 0.01 МэВ

Описание подпрограмм основной программы

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ - КУТТА - подпрограмма для вычисления функций исходной системы уравнений методом Рунге - Кутта [103]. Метод был изложен в первой главе.

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФАЗ РАССЕЙНИЯ - подпрограмма вычисления фаз рассеяния, изложенным выше методом (см. главу 1).

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПЕРВОМ УРАВНЕНИИ - подпрограмма для вычисления блока потенциалов в первом уравнении исходной системы.

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ВО ВТОРОМ УРАВНЕНИИ - подпрограмма для вычисления блока потенциалов во втором уравнении исходной системы.

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ РАССЕЙНИЯ - подпрограмма вычисления кулоновских функций рассеяния. Метод вычисления основан на разложении функций по цепным дробям [103] и изложен в первой главе.

Текст компьютерной программы

Ниже приведена распечатка программы расчета ядерных фаз кластер - кластерного и нуклон - нуклонного рассеяния для потенциалов с тензорной компонентой.

РЕМ РАСЧЕТ ФАЗ УПРУГОГО ${}^4\text{He}^2\text{H}$ РАССЕЙНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ТЕНЗОРНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

DEFDBL A - Z:DEFINT K,L,N,M,I,J

DIM U1(4000), U2(4000), W1(4000), W2(4000), FAZ1(20), FAZ2(20), E(20), EPSS(20)

GGG\$="C:\WAVE.DAT":GG\$="C:\FAZ.DAT"

A\$=" E DELA DELB EPS"

REM ***** ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ *****

AM1=2: AM2=4: Z1=1: Z2=2: AM=AM1+AM2: PM=AM1*AM2/AM
A1=41.4686/(2*PM): PI=3.14159265: VCC= - 71.979: ACC=0.2:
VTT=27.

ATT= - 1.12: EN=1: NM=10: EH=1: N=1000: H0=0.02: EPP=5D - 02
AKK=1.439975*Z1*Z2:B1=2*PM/A1:HK=H0^2:A5=SQR(8)

REM ***** ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ *****

FOR I=0 TO NM: E=EN+I*EH: E1=E*PM/AM1: SK=E1/A1:
S=SQR(SK)

GGG=3.44477E - 02*Z1*Z2*PM/S: H=H0: N1=N: DB0=0: DB2=0
EPSB=0


```

5 DA0=DB0: DA2=DB2: EPSA=EPSB: VA1=0: WA1=0: PA1=1E - 05
QA1=0: U1(1)=VA1: W1(1)=WA1: VA2=0: WA2=0: PA2=0
QA2=1E - 05: U2(1)=VA2: W2(1)=WA2: KKK=1: FOR J=2 TO N1
IF J - 2>0 GOTO 3: X0=1E - 05: GOTO 4
3 X0=0
4 X=H*(J - 2)+X0
CALL RRUN(VB1, WB1, VB2, WB2, PB1, QB1, PB2, QB2, VA1,
WA1, VA2, WA2, PA1, QA1, PA2, QA2)
IF ABS(J - (N1 - 3))<1E - 01 GOTO 6:GOTO 10
6 WC1=WB1: VC1=VB1: VC2=VB2: WC2=WB2
10 VA1=VB1: WA1=WB1: VA2=VB2: WA2=WB2: IF N1>N GOTO
555
U1(J)=VA1: U2(J)=VA2: W1(J)=WA1: W2(J)=WA2
555 IF ABS(H0*KKK - H*J)>0.1*H GOTO 333
U1(KKK)=VA1: U2(KKK)=VA2: W1(KKK)=WA1: W2(KKK)=WA2
KKK=KKK+1
333 PA1=PB1: QA1=QB1: PA2=PB2: QA2=QB2: NEXT J
REM ***** РАСЧЕТ ФАЗ РАССЕЙНИЯ *****
CALL FAZ(DB0, DB2, EPSB, C1A, C1B, C2A, C2B, VC1, WC1,
VC2, WC2, VB1, WB1, VB2, WB2, N1)
H=0.5*H: N1=2*N1: KKK=2
IF ABS(DB0 - DA0)>ABS(EPP*DB0) GOTO 5
IF ABS(DB2 - DA2)>ABS(EPP*DB2) GOTO 5
IF ABS(EPSB - EPSA)>ABS(EPP*EPSB) GOTO 5
777 DELA=DB0:DELB=DB2:EPS=EPSB:FAZA=DELA*180/PI
FAZB=DELB*180/PI: EPSS=EPS*180/PI: IF AM1<>AM2 GOTO
3931
PRINT A$: PRINT USING " +.#.####^ ^ ^ ^ ";E,FAZA,FAZB,EPSS
PRINT USING " +.#.####^ ^ ^ ^ ";E,DELA,DELB,EPS
SIN2EPS=SIN(2*EPS)*SIN(DELA - DELB)
DELA1=(DELA+DELB+ATN(COS(2*EPS)*TAN(DELA - DELB)))/2
DELB1=DELA+DELB - DELA1
TAN2EPS=SIN2EPS/SQR(1 - SIN2EPS^2)
EPS11=ATN(TAN2EPS)/2: IF DELA1>0 GOTO 111: DE-
LA1=DELA1+PI
111 FAZ1=DELA1*180/PI: FAZ2=DELB1*180/PI:
EPSS1=EPS11*180/PI
3931 E(I)=E: IF AM1=AM2 GOTO 3932: IF FAZA>0 GOTO 3211
FAZA=FAZA+180: 3211 IF FAZB>0 GOTO 3212: FAZB=FAZB+180
3212 FAZ1(I)=FAZA: FAZ2(I)=FAZB: IF EPSS<0 GOTO 3222
EPSS=EPSS - 90
3222 EPSS(I)=EPSS: PRINT A$
PRINT USING " +.#.####^ ^ ^ ^ ";E(I),DELA1,DELB1,EPS1
PRINT USING " +.#.####^ ^ ^ ^ ";E(I),FAZ1(I),FAZ2(I),EPSS(I)

```

```

REM ***** РАСЧЕТ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ *****
3932 FOR JJ=0 TO N: U1(JJ)=(C1A*U1(JJ)+C2A*U2(JJ))
W1(JJ)=(C1A*W1(JJ)+C2A*W2(JJ)): NEXT JJ: OPEN "O",1,GG$
FOR JJ=0 TO N: X=H0*JJ: PRINT#1, USING " +#.#####^
";X;U1(JJ);W1(JJ)
PRINT USING " +#.#####^";X;U1(JJ);W1(JJ): NEXT JJ: CLOSE
REM ***** РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОГО РАДИУСА И ДЛИНЫ
РАССЕЯНИЯ *****
IF E>.01 GOTO 155: FOR JJ=0 TO N: X=H0*JJ:
FF=SIN(X*S+DELA)
U1(JJ)=(FF^2 - U1(JJ)^2) / SIN(DELA)^2 - W1(JJ)^2 / SIN(DELA)^2
NEXT JJ
A=0: B=0: FOR II=1 TO N - 1 STEP 2: B=B+U1(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO N - 2 STEP 2: A=A+U1(JJ): NEXT JJ
R0=2*H0*(U1(0)+U1(N)+2*A+4*B)/3: PRINT "R=";
PRINT USING " +#.#####^";R0: AT1=
SIN(DELA)/COS(DELA)/S
PRINT: PRINT "AT=": PRINT USING " +#.#####^";AT1
155 NEXT I: OPEN "O",1,GG$: FOR JJ=0 TO NM
PRINT#1, USING " +#.#####^"; E(JJ); FAZ1(JJ); FAZ2(JJ);
EPSS(JJ)
NEXT JJ: STOP
SUB RRUN(VB1, WB1, VB2, WB2, PB1, QB1, PB2, QB2, VA1,
WA1, VA2, WA2, PA1, QA1, PA2, QA2)
REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ
РУНГЕ - КУТТА
SHARED H,X
X0=X: CALL F(X0,VA1,WA1,FK1): CALL F(X0,VA2,WA2,SK1)
CALL GG(X0,VA1,WA1,FM1): CALL GG(X0,VA2,WA2,SM1)
FK1=FK1*H: SK1=SK1*H: FM1=FM1*H: SM1=SM1*H:
X0=X0+H/2
V1=VA1+PA1*H/2: W1=WA1+QA1*H/2: V2=VA2+PA2*H/2
W2=WA2+QA2*H/2: CALL F(X0,V1,W1,FK2): CALL
F(X0,V2,W2,SK2)
CALL GG(X0,V1,W1,FM2): CALL GG(X0,V2,W2,SM2):
FK2=FK2*H
SK2=SK2*H: FM2=FM2*H: SM2=SM2*H:
V1=VA1+PA1*H/2+FK1*H/4
W1=WA1+QA1*H/2+FM1*H/4: V2=VA2+PA2*H/2+SK1*H/4
W2=WA2+QA2*H/2+SM1*H/4: CALL F(X0,V1,W1,FK3)
CALL F(X0,V2,W2,SK3): CALL GG(X0,V1,W1,FM3)
CALL GG(X0,V2,W2,SM3): FK3=FK3*H: SK3=SK3*H:
FM3=FM3*H
SM3=SM3*H: X0=X0+H/2: V1=VA1+PA1*H+FK2*H/2

```

$W1=WA1+QA1 *H+FM2 *H/2$; $V2=VA2+PA2 *H+SK2 *H/2$
 $W2=WA2+QA2 *H+SM2 *H/2$; CALL F(X0,V1,W1,FK4)
 CALL F(X0,V2,W2,SK4); CALL GG(X0,V1,W1,FM4)
 CALL GG(X0,V2,W2,SM4); FK4=FK4 *H; SK4=SK4 *H;
 FM4=FM4 *H
 $SM4=SM4 *H$; $VB1=VA1+PA1 *H+(FK1+FK2+FK3) *H/6$
 $VB2=VA2+PA2 *H+(SK1+SK2+SK3) *H/6$
 $PB1=PA1+(FK1+2 *FK2+2 *FK3+FK4)/6$
 $PB2=PA2+(SK1+2 *SK2+2 *SK3+SK4)/6$
 $WB1=WA1+QA1 *H+(FM1+FM2+FM3) *H/6$
 $WB2=WA2+QA2 *H+(SM1+SM2+SM3) *H/6$
 $QB1=QA1+(FM1+2 *FM2+2 *FM3+FM4)/6$
 $QB2=QA2+(SM1+2 *SM2+2 *SM3+SM4)/6$; END SUB
SUB FAZ(DELA, DELB, EPS, C1A, C1B, C2A, C2B, VC1, WC1, VC2, WC2, VB1, WB1, VB2, WB2, N)
 REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФАЗ РАССЕЙНИЯ
 SHARED S,H,GGG
 $V11=VC1$; $V12=VB1$; $W11=WC1$; $W12=WB1$; $V21=VC2$; $V22=VB2$
 $W21=WC2$; $W22=WB2$; $X1=H *S *(N - 3)$; $X2=H *S *N$; $AL1=2$
 CALL CUL(GGG,X1,0,F01,G01); CALL CUL(GGG,X2,0,F02,G02)
 CALL CUL(GGG,X1,2,F21,G21); CALL CUL(GGG,X2,2,F22,G22)
 $AP=V12 *W22 - V22 *W12$; $A=(V11 *W22 - V21 *W12)/AP$
 $B=(V12 *V21 - V22 *V11)/AP$; $C=(- W12 *W21+W22 *W11)/AP$
 $D=(V12 *W21 - V22 *W11)/AP$; $AA=A *G02 - G01$; $BB=B *G22$
 $EE=C *G02$; $DD=D *G22 - G21$; $PP=- 1/(AA *DD - BB *EE)$
 $FF=PP *DD$; $GG=- PP *BB$; $NN=- PP *EE$; $MM=PP *AA$; $RR=A *F02 - F01$
 $SS=B *F22$; $TT=C *F02$; $ZZ=D *F22 - F21$; $QK11=FF *RR+GG *TT$
 $QK12=FF *SS+GG *ZZ$; $QK21=NN *RR+MM *TT$;
 $QK22=NN *SS+MM *ZZ$
 $T2EPS=2 *QK12/(QK11 - QK22)$; $EPS=ATN(T2EPS)/2$;
 $AAA=QK11+QK22$
 $BBB=(QK11 - QK22)/COS(2 *EPS)$; $DELA=(AAA+BBB)/2$
 $DELB=(AAA - BBB)/2$; $DELA=ATN(DELA)$; $DELB=ATN(DELB)$
 $A9=F02 *COS(EPS)$; $F9=G02 *COS(EPS) *TAN(DELA)$
 $E9=F22 *SIN(EPS)$; $H9=G22 *SIN(EPS) *TAN(DELA)$
 $B9=- F02 *SIN(EPS)$; $D9=F22 *COS(EPS)$
 $G9=- G02 *SIN(EPS) *TAN(DELB)$;
 $AK9=G22 *COS(EPS) *TAN(DELB)$
 $FF1=1/(V12 *W22 - V22 *W12)$; $AA=FF1 *W22$; $BB=- FF1 *V22$
 $CC=- FF1 *W12$; $DD=FF1 *V12$
 $C1A=(AA *(A9+F9)+BB *(E9+H9)) *COS(DELA)$
 $C2A=(CC *(A9+F9)+DD *(E9+H9)) *COS(DELA)$
 $C1B=(AA *(B9+G9)+BB *(D9+AK9)) *COS(DELB)$

C2B=(CC*(B9+G9)+DD*(D9+AK9))*COS(DELB): END SUB
SUB F(X,Y,Z,F)

REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПЕРВОМ УРАВНЕНИИ

SHARED SK,VCC,ACC,VTT,ATT,A5,A1,AKK

VC=VCC*EXP(-ACC*X^2): VC=VC+AKK/X

VT=VTT*EXP(-ATT*X^2)

UC=VC/A1: UT=VT/A1: F=UT*A5*Z - (SK - UC)*Y: END SUB

SUB GG(X,Y,Z,GG)

REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ВО ВТОРОМ УРАВНЕНИИ

SHARED SK,VCC,ACC,VTT,ATT,A5,A1,AKK

VC=VCC*EXP(-ACC*X^2): VC=VC+AKK/X

VT=VTT*EXP(-ATT*X^2): UC=VC/A1: UT=VT/A1

GG=UT*A5*Y - (SK - 6/X^2 - UC+2*UT+3*ULS)*Z: END SUB

SUB CUL(G,X1,L,F1,G1)

REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ

Q=G: R=X1: F0=1: GK=Q*Q: GR=Q*R: RK=R*R:

B01=(L+1)/R+Q/(L+1)

K=1: BK=(2*L+3)*((L+1)*(L+2)+GR)

AK=-R*((L+1)^2+GK)/(L+1)*(L+2)

DK=1/BK: DENK=AK*DK: S=B01+DENK

1 K=K+1: AK=-RK*((L+K)^2-1)*((L+K)^2+GK)

BK=(2*L+2*K+1)*((L+K)*(L+K+1)+GR): DK=1/(DK*AK+BK)

IF DK>0 GOTO 31

2 F0=-F0

31 DENK=(BK*DK-1)*DENK

S=S+DENK: IF (ABS(DENK) - 1E - 6)>0 GOTO 1

FL=S: K=1: RMG=R - Q: LL=L*(L+1): CK=-GK - LL: DK=Q

GKK=2*RMG: HK=2: AA1=GKK*GKK+HK*HK: PBK=GKK/AA1

RBK=-HK/AA1: OMEK=CK*PBK - DK*RBK

EPSK=CK*RBK+DK*PBK: PB=RMG+OMEK: QB=EPSK

51 K=K+1: CK=-GK - LL+K*(K-1): DK=Q*(2*K-1): HK=2*K

FI=CK*PBK - DK*RBK+GKK: PSI=PBK*DK+RBK*CK+HK

AA2=FI*FI+PSI*PSI: PBK=FI/AA2: RBK=-PSI/AA2

VK=GKK*PBK - HK*RBK: WK=GKK*RBK+HK*PBK: OM=OMEK

EPK=EPSK: OMEK=VK*OM - WK*EPK - OM

EPSK=VK*EPK+WK*OM - EPK: PB=PB+OMEK: QB=QB+EPSK

IF (ABS(OMEK)+ABS(EPSK) - 1E - 06)>0 GOTO 51: PL=-QB/R

QL=PB/R: G0=(FL - PL)*F0/QL: G0P=(PL*(FL - PL)/QL - QL)*F0

F0P=FL*F0: ALFA=1/(SQR(ABS(F0P*G0 - F0*G0P))):

G1=ALFA*G0

GP1=ALFA*G0P: F1=ALFA*F0: FP1=ALFA*F0P

W=1 - FP1*G1+F1*GP1:END SUB

Ниже приведены результаты контрольного счета по этой программе для случая классического потенциала Рейда с мягким кором [90]. Вычислительная точность в программе задавалась на уровне 0.5%, начальное число шагов 1000, а величина начального шага 0.02. Для определения фаз NN рассеяния, приведенных в работе Рейда, сшивка численной волновой функции с ее асимптотикой выполнялась на расстояниях 20 фм. При расчетах, для получения заданной точности результатов, конечное число шагов доходило до 256 тысяч. Здесь E – энергия частиц, $\delta_{\alpha,\beta}$ - фазы рассеяния, ϵ - параметр смешивания.

Таблица 2.1 - Сравнение результатов расчета ядерных фаз рассеяния.

E , MeV	δ_{α} , rad [90]	δ_{α} , rad (Наш расчет)	δ_{β} , rad [90]	δ_{β} , rad (Наш расчет)	$\text{Sin}(2\epsilon)$, [90]	$\text{Sin}(2\epsilon)$, (Наш расчет)
24	1.426	1.426	-0.050	-0.050	0.064	0.0638
48	1.105	1.105	-0.115	-0.116	0.081	0.0812
96	0.749	0.748	-0.215	-0.216	0.114	0.1140
144	0.521	0.520	-0.281	-0.282	0.152	0.1518
208	0.300	0.299	-0.340	-0.341	0.203	0.2030
304	0.057	0.056	-0.403	-0.404	0.269	0.2693

Как видно из этой таблицы отличие наших расчетов и результатов, приведенных в работе Рейда составляет величину порядка 0.001 радиана, что демонстрирует полную работоспособность, как описанных выше математических методов, правильность выбора численных способов решения уравнения Шредингера, так и работоспособность самой компьютерной программы.

Таким образом, разработанная нами программа для решения уравнения Шредингера, как для центральных, так и для тензорных потенциалов, позволяет получить хорошее совпадение всех результатов с полученными ранее, в других работах и, по-видимому, другими методами.

3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ В ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ

Рассмотрим теперь случай, когда две ядерные частицы находятся в связанном состоянии, образуя атомное ядро, а его характеристики определяются некоторым центральными потенциалом взаимодействия этих частиц и их внутренними свойствами.

В этой главе описаны математические вариационные и численные методы решения задачи на связанные состояния для центральных действительных потенциалов, когда уравнение Шредингера имеет дискретный спектр своих решений. Каждое собственное значение такой задачи определяет энергию связи ядерных частиц, которая принимает только отрицательные значения.

3.1 Общие методы решения уравнения Шредингера

При нахождении волновых функций основных связанных и резонансных состояний в двухчастичной системе можно использовать вариационный [23,105,106] и конечно - разностный [13-19,42,1] методы решения радиального уравнения Шредингера.

Запишем еще раз уравнение Шредингера (1.1) с центральными ядерными силами для волновой функции системы двух частиц

$$\chi''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{cul}(r) - L(L+1)/r^2] \chi(r) = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Решения этого уравнения для связанных состояний, т.е. при $k^2 < 0$, на бесконечности и в нуле подчиняются условиям

$$\chi_L(0) = \chi_L(\infty) = 0 \quad .$$

Однако уравнение (3.1), на расстояниях больших, чем радиус действия ядерных сил R_0 , т.е. когда $V_c(r > R_0) = 0$, имеет аналитическое решение, называемое его асимптотикой. Поэтому условие на бесконечности можно заменить на требование неразрывности логарифмической производной на границе области взаимодействия, т.е. при $r = R_0$ [13-19,57,58]

$$\frac{\chi'_L(R_0)}{\chi_L(R_0)} = \frac{W'_{\eta L}(2kR_0)}{W_{\eta L}(2kR_0)} = f(\eta, L, Z) \quad , \quad (3.2)$$

где $\chi(r)$ – скалярная волновая функция, а штрихи обозначают

производные по r ,

r – скалярное расстояние между частицами, измеряемое в Ферми (Фм): $1 \text{ Фм} = 10^{-15} \text{ м}$,

$V_{\text{cul}}(r) = 2\mu / \hbar^2 Z_1 Z_2 / r$ - кулоновский потенциал,

\hbar - постоянная Планка: $1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$,

Z_1, Z_2 – заряды частиц в единицах элементарного заряда: $1 \text{ э.з.} = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$,

μ - приведенная масса двух частиц, равная $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ в атомных единица массы: $1 \text{ а.е.м.} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$,

Константа $\hbar^2 / M_N = 41.4686$ (или 41.47) МэВ Фм²,

M_N – средняя масса нуклона, равная 1 а.е.м. ,

$k^2 = 2\mu E / \hbar^2$ - волновое число относительного движения частиц в Фм⁻²,

E – энергия относительного движения частиц в мегаэлектрон-вольтах: $1 \text{ МэВ} = 1.60 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$,

$V_c = 2\mu / \hbar^2 V_{\text{cn}}(r)$ - центральная часть потенциала,

$V_{\text{cn}}(r)$ – радиальная часть центрального потенциала, которая может быть представлена в виде гауссойды или экспоненты,

$W_{\eta L}(Z)$ - функция Уиттекера для связанных состояний, которая является решением уравнения (3.1) при $k^2 < 0$ без ядерного потенциала V_c . безразмерная переменная $Z = 2kR$,

$\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{k \hbar^2}$ - кулоновский параметр,

L - орбитальный момент.

В том случае, когда в ядерном потенциале не учитывается кулоновское взаимодействие, асимптотика ВФ может быть представлена в наиболее простом виде

$$\chi(r > R_0) = e^{-kr}, \quad \chi'(r > R_0) = -ke^{-kr},$$

где $k = \sqrt{|k^2|}$ и логарифмическая производная (3.2) будет просто равна $-k$.

Волновая функция связанного состояния любых частиц должна удовлетворять и условию

$$\int_0^{\infty} \chi^2(r) dr = 1,$$

которое определяет ее нормировку.

3.2 Физические характеристики связанных состояний

К основным ядерным характеристикам связанных состояний можно отнести асимптотическую константу, среднеквадратичный радиус, кулоновские формфакторы, квадрупольный, октупольный и магнитные моменты, вероятности электромагнитных переходов между разными уровнями ядра, энергию связи в кластерном канале и т.д.

Асимптотическое поведение ВФ характеризуется асимптотической константой C , которую можно получить из сшивки волновой функции связанных состояний на расстояниях порядка $10 - 20$ Фм с ее асимптотикой, определяемой функцией Уиттекера [107, 108, 109, 110, 111, 112]

$$R_{LJ} = \chi(r)/r = \frac{\sqrt{2k_0}}{r} C W_{\eta L}(2k_0 r) \quad , \quad (3.3)$$

где η - кулоновский параметр, L - орбитальный момент и k_0 - волновое число, обусловленное энергией связи двухчастичной системы.

Для квадрупольного, магнитного, октупольного моментов и приведенной вероятности электрических и магнитных радиационных переходов можно написать выражения, зависящие от матричных элементов электрических операторов (более подробно об электрических операторах смотрите пятую часть) [22,42,113,114]

$$Q = \left(\frac{16\pi}{5} \right)^{1/2} \langle J_0 J_0 | Q_{20}(L) | J_0 J_0 \rangle \quad ,$$

$$\mu = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} \langle J_0 J_0 | W_{10}(L) + W_{10}(S) | J_0 J_0 \rangle \quad ,$$

$$\Omega = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} \langle J_0 J_0 | W_{30}(L) + W_{30}(S) | J_0 J_0 \rangle \quad ,$$

$$B(M1) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle J_f L_f | W_1(L) + W_1(S) | J_i L_i \rangle \right|^2 \quad , \quad (3.4)$$

$$B(E2) = \frac{1}{2J_i + 1} \left| \langle J_f L_f | Q_2(L) | J_i L_i \rangle \right|^2 \quad .$$

Здесь i - начальное и f - конечное состояние системы, а значок 0 обозначает основное связанное состояние. Отсюда, например, в двухкластерной модели для основного состояния ядра ${}^7\text{Li}$ с $J_0=3/2$ получаем [13-19,114]

$$Q = -\frac{2}{5}YI_2 = -\frac{2 \cdot 34}{5 \cdot 49}I_2, \quad Y = (Z_1 M_2^2 + Z_2 M_1^2) / M^2, \\ \frac{\mu}{\mu_0} = X + \mu_1 = \frac{17}{42} + \mu_1, \quad X = \frac{1}{M} \left(\frac{Z_1 M_2}{M_1} + \frac{Z_2 M_1}{M_2} \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{\Omega}{\mu} = \frac{3 M_2^2}{5 M^2} I_2 = \frac{48}{245} I_2,$$

$$B(M1) = \frac{1}{4\pi} (2\mu_1 - X)^2 I_0^2 = \frac{1}{4\pi} (3\mu_1 - \mu)^2 I_0^2,$$

$$B(E2) = \frac{1}{4\pi} Y^2 I_2^2.$$

Здесь первым кластером считается тритий или ${}^3\text{He}$, обладающий магнитным моментом и $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_0c}$ - ядерный магнетон.

Магнитный радиус ядра ${}^7\text{Li}$ в кластерной ${}^3\text{He}{}^4\text{He}$ модели определяется через зарядовые и магнитные радиусы фрагментов в следующем виде [115,116]

$$\mu R_m^2 = \frac{4}{21} \langle r_{te}^2 \rangle + \frac{3}{14} \langle r_{te}^2 \rangle + \mu_t \langle r_{tm}^2 \rangle + \left(\frac{209}{3430} + \frac{432}{1225} \mu_t \right) I_2, \quad (3.6)$$

где μ - магнитный момент ядра, $\langle r_i \rangle$ - магнитные (m) и зарядовые (e) радиусы кластеров (в данном случае трития), а интегралы I_k в (3.6) и (3.5) записываются в виде

$$I_k = \langle J_f L_f | R^k | J_i L_i \rangle.$$

Импульсное распределение кластеров в ядре, определяемое, как Фурье - образ волновой функции относительного движения фрагментов и нормированное на единицу при переданном импульсе $q = 0$ может быть записано [13-19]

$$P^2 = \sum_L P_L^2(q) / \sum_L P_L^2(0) , \quad P_L(q) = \int u_L j_L(qr) r dr ,$$

где $j_L(x)$ - сферическая функция Бесселя, u_L - радиальная ВФ СС ядра. Для расчетов продольных кулоновских формфакторов можно использовать, например, известное определение [3,117,118]

$$F(q) = 1/Z \langle \Psi_f | \Sigma (1/2+t_{zk}) \exp(iqr_k) | \Psi_i \rangle .$$

Аналогично запишем формфакторы кластеров

$$F_{1,2}(q) = 1/Z_{1,2} \langle \Phi_{1,2} | \Sigma (1/2+t_{zn}) \exp(iqr_n) | \Phi_{1,2} \rangle ,$$

где t_{zk} - проекция изоспина k - й частицы. Используя векторные соотношения двухкластерной модели, для формфактора ядра находим [119]

$$F(q) = Z_1/Z F_1(q) \langle \Psi_f | \exp(iq_1 R) | \Psi_i \rangle + Z_2/Z F_2(q) \langle \Psi_f | \exp(iq_2 R) | \Psi_i \rangle$$

Здесь $q_1 = -qM_2/M$ и $q_2 = qM_1/M$, а $F_{1,2}(q)$ - собственные формфакторы ассоциаций в свободном состоянии.

Разлагая плоские волны по функциям Бесселя и интегрируя по углам [120], квадрат кулоновского формфактора можно представить в виде [13-19]

$$F_J^2 = \frac{1}{Z^2} V_J^2 B_J , \quad (3.7)$$

$$B_J = (2J_f + 1)(2J_i + 1)(2L_i + 1)(L_i - J_i)(L_i + J_i)^2 \left\{ \begin{matrix} L_i & S & J_i \\ J_f & J & L_f \end{matrix} \right\}^2 ,$$

где $L_{i,f}$ и $J_{i,f}$ - орбитальные и полные моменты начального i и конечного f состояния ядра, J - мультипольность формфактора, S и Z - спин и заряд ядра, фигурная скобка - $6j$ символ Вигнера [120] и V_J - структурный множитель, зависящий от характеристик фрагментов и их взаимного движения

$$V_J = Z_1 F_1 I_{2,J} + Z_2 F_2 I_{1,J} , \quad (3.8)$$

где $I_{k,J}$ - радиальные матричные элементы по функциям начального и конечного состояния от сферических функций Бесселя

$$I_{k,J} = \langle L_f J_f | j_j(g_k r) | L_i J_i \rangle \quad (3.9)$$

Здесь $k = 1$ для первого и 2 для второго кластера, $g_k = (M_k/M)q$, q - переданный импульс, $j_j(g_k r)$ - сферическая функция Бесселя.

Формфакторы ^3H , ^3He , ^4He кластеров представляются в виде следующей параметризации [13-19]

$$F_\alpha = [1 - (aq^2)^n] \exp(-bq^2) \quad ,$$

где $a = 0.09985 \text{ Фм}^2$, $b = 0.46376 \text{ Фм}^2$ и $n = 6$ для ^4He , $a = 0.0785 \text{ Фм}^2$, $b = 0.4075 \text{ Фм}^2$ и $n = 5.46$ для ^3H и $a = 0.0872 \text{ Фм}^2$, $b = 0.481 \text{ Фм}^2$ и $n = 7.9$ для ^3He . Для дейтрона используется другая форма параметризации

$$F_d = \exp(-aq^2) + bq^2 \exp(-cq^2) \quad ,$$

с параметрами $a = 0.49029 \text{ Фм}^2$, $b = 0.01615 \text{ Фм}^2$ и $c = 0.16075 \text{ Фм}^2$. Приведенные выше параметризации позволяют аппроксимировать формфакторы до 20 Фм^2 .

При вычислении неупругих формфакторов, когда конечное состояние лежит в непрерывном спектре собственных значений, волновые функции рассеяния при резонансных энергиях необходимо нормировать на асимптотику вида [118]

$$U_L = \exp(-\delta_L) [F_L \text{Cos}(\delta_L) + G_L \text{Sin}(\delta_L)] \quad (3.10)$$

Вероятность $E2$ - переходов и зарядовый радиус могут быть определены на основе кулоновских формфакторов [13-19,115,118] мультипольности CJ

$$B(E2) = \frac{225Z^2}{4\pi} \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{F_{C2}^2(q)}{q^4} \right) \quad (3.11)$$

$$R_f^2 = 6 \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{1 - F_{C0}(q)}{q^2} \right) \quad (3.12)$$

3.3 Вариационные методы решения уравнения Шредингера

Волновые функции в матричных элементах (3.9) для основных и резонансных состояний представимы в виде разложения по не ортогональному гауссовому базису вида [23]

$$R_L(r) = N r^L \sum_i C_i \exp(-\alpha_i r^2) \quad , \quad (3.13)$$

где α_i и C_i - вариационные параметры и коэффициенты разложения, которые находятся вариационным методом для связанных состояний или аппроксимацией гауссойдами численных волновых функций резонансных уровней [23,105].

Сами вариационные параметры α_i могут быть, например, получены из квадратурной сетки вида [23,105]

$$\alpha_i = \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \left\{ \pi (2i - 1) / 4N \right\} \quad .$$

Для определения спектра собственных энергий и волновых функций в стандартном вариационном методе при разложении ВФ по ортогональному базису решается матричная задача на собственные значения [121]

$$\sum_i (H_{ij} - EI_{ij}) C_i = 0 \quad ,$$

где H - симметричная матрица гамильтониана, I - единичная матрица, E - собственные значения и C - собственные вектора задачи. В данном случае, при не ортогональном базисе гауссойд, мы приходим к обобщенной задаче типа [122]

$$\sum_i (H_{ij} - EL_{ij}) C_i = 0 \quad ,$$

где L - симметричная матрица интегралов перекрывания, которая не сводится к единичной матрице. При использовании ВФ вида (3.13) можно найти выражения для всех этих матричных элементов [13-19,23]

$$H_{ij} = T_{ij} + V_{ij} + \langle i | Z_1 Z_2 / r | j \rangle + \langle i | \hbar^2 L(L+1) / 2\mu r^2 | j \rangle \quad ,$$

$$N_0 = \left[\sum C_i C_j L_{ij} \right]^{-1/2} \quad ,$$

$$T_{ij} = - \frac{\hbar^2 \sqrt{\pi} (2L-1)!!}{2\mu 2^{L+1} \alpha_{ij}^{L+1/2}} \left\{ L(2L+1) - L^2 - \frac{\alpha_i \alpha_j (2L+1)(2L+3)}{\alpha_{ij}^2} \right\} \quad ,$$

$$V_{ij} = \int V(r) r^{2L+2} \exp(-\alpha_{ij} r^2) dr \quad ,$$

$$L_{ij} = \frac{\sqrt{\pi}(2L+1)!!}{2^{L+2}\alpha_{ij}^{L+3/2}}, \quad (3.14)$$

$$\langle i | Z_1 Z_2/r | j \rangle = \frac{Z_1 Z_2 L!}{2\alpha_{ij}^{L+1}},$$

$$\langle i | \hbar^2 L(L+1)/2\mu r^2 | j \rangle = \frac{\sqrt{\pi}(2L-1)!! L(L+1)\hbar^2}{2^{L+1}\alpha_{ij}^{L+1/2} 2\mu},$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j.$$

В случае гауссова потенциала межкластерного взаимодействия

$$V(r) = V_0 \exp(-\beta r^2)$$

матричный элемент потенциала V_{ij} определяется в аналитическом виде

$$V_{ij} = V_0 \frac{\sqrt{\pi}(2L+1)!!}{2^{L+2}(\alpha_{ij} + \beta)^{L+3/2}}.$$

Для приведенного выше вариационного разложения волновой функции, матричные элементы формфактора также вычисляются аналитически и, например, для ядра ${}^6\text{Li}$ имеют вид [13-19]

$$I_{k,0}(C0) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{i,j} C_i C_j W_{ij} / \alpha_{ij}^{3/2}, \quad (3.15)$$

$$I_{k,2}(C2) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \sum_{i,j} C_i C_j g_k^2 W_{ij} / \alpha_{ij}^{7/2}.$$

Аналогичные выражения можно получить для форматоров ядра ${}^7\text{Li}$

$$J_0 = 3/2; \quad I_{k,0}(C0) = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \sum_{i,j} C_i C_j W_{ij} \left(3 - \frac{g_k^2}{2\alpha_{ij}} \right) / \alpha_{ij}^{5/2},$$

$$J_0 = 3/2; 1/2; \quad I_{k,2}(C2) = \frac{\sqrt{\pi}}{16} \sum_{i,j} C_i C_j g_k^2 W_{ij} / \alpha_{ij}^{7/2}, \quad (3.16)$$

$$J_0 = 7/2; \quad I_{k,2}(C2) = \frac{\sqrt{\pi}}{32} \sum_{i,j} C_i C_j g_k^2 W_{ij} \left(7 - \frac{g_k^2}{2\alpha_{ij}} \right) / \alpha_{ij}^{9/2},$$

$$J_0 = 7/2; \quad I_{k,4}(C4) = \frac{\sqrt{\pi}}{64} \sum_{i,j} C_i C_j g_k^4 W_{ij} / \alpha_{ij}^{11/2},$$

где

$$W_{ij} = \exp\left(-\frac{g_k^2}{4\alpha_{ij}}\right), \quad \alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j, \quad g_k = \frac{M_k}{M} q.$$

Используя разложение волновой функции по гауссоидам, для вероятности E2 переходов, имеем

$$B(E2) = \frac{1}{4\pi} W(M, Z)^2 R_0^4 B_2, \quad (3.17)$$

$$Q = -\frac{2}{5} W(M, Z) R_0^2,$$

где

$$W(M, Z) = \frac{M_1^2 Z_2 + M_2^2 Z_1}{M^2},$$

$$R_0^2 = \frac{(2L+3)!!\sqrt{\pi}}{2^{L+3}} \sum_{i,j} C_i C_j \alpha_{ij}^{-(L+5/2)},$$

а величина B_2 была определена в выражении (3.7).

3.4 Методы решения обобщенной задачи на собственные значения

Будем и сходить из стандартного уравнения Шредингера в общем виде [61]

$$H\chi = E\chi,$$

где H - гамильтониан системы и χ - волновые функции задачи. Разлагая эти волновые функции по некоторому вариационному базису

$$\chi = \sum_i C_i \phi_i ,$$

подставляя их в исходную систему, умножая ее слева на комплексно сопряженную ϕ_i^* базисную функцию и интегрируя по всем переменным, получим матричную систему вида [123]

$$(H - EL)C = 0 . \quad (3.18)$$

Если разложение ВФ выполнялось по ортогональному базису, матрица интегралов перекрывания L превращается в единичную матрицу I , и мы имеем стандартную задачу на собственные значения, для решения которой существует множество методов [68]. Если разложение выполнено по не ортогональному базису [23], то получаем обобщенную задачу на собственные значения [68].

Представляя, в таком случае, матрицу L в виде произведения нижней N и верхней V треугольных матриц [68]

$$L = NV$$

находим

$$HC = ENVC$$

или

$$H'C = EIC' , \quad (3.19)$$

где

$$H' = N^{-1}HN^{-1} , \quad C' = VC \quad (3.20)$$

или

$$C = V^{-1}C'$$

и I - единичная матрица.

Тем самым, мы получаем стандартную матричную систему для задачи поиска собственных функций и значений [68,123] вида

$$(H' - EI)C' = 0 ,$$

которую можно решать известными методами [68] в общем матричном виде. Процедура перехода, от обобщенной к стандарт-

ной задаче, называется ортогонализацией по Шмидту [124].

Вначале находим матрицы N и V , выполняя триангуляризацию симметричной матрицы L [68]. Затем находим обратные матрицы N^{-1} и V^{-1} и вычисляем элементы матрицы $H' = N^{-1}H V^{-1}$. Находим далее полную матрицу $H' - EI$ и вычисляем ее детерминант $|H' - EI|$ при некоторой энергии E . Та энергия, которая приводит к нулю детерминанта является собственной энергией задачи, а соответствующие ей вектора C' - собственные вектора матричной системы. Зная C' , не трудно найти и собственные вектора исходной задачи C , поскольку матрица V^{-1} уже известна.

Однако в некоторых задачах при некоторых значениях вариационных параметров процедура нахождения обратных матриц оказывается неустойчивой и при работе компьютерной программы выдается переполнение. Далее мы рассмотрим не стандартный метод, решения обобщенной задачи на собственные значения, который не приводит к таким переполнениям в компьютерных программах.

Рассмотрим вначале общий случай матричного уравнения стандартного вида

$$Ax = b \quad , \quad (3.21)$$

где b и x - матрицы столбцы размерности N , а A - квадратная матрица размерности $N \times N$. Матрицу A можно разложить на треугольные матрицы

$$A = BC \quad ,$$

где B - нижняя треугольная матрица и C - верхняя треугольная матрица, в главной диагонали которой стоят единицы. Нахождение нижней и верхней треугольных матриц выполняется по следующей схеме (метода Халецкого) [68]

$$\begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1} \quad , \quad (3.22) \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \quad , \end{aligned}$$

где $i \geq j > 1$ и

$$\begin{aligned} c_{1j} &= a_{1j} / b_{11} \quad , \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad , \end{aligned}$$

при $1 < i < j$. Такой метод позволяет определить и детерминант исходной матрицы A [68]

$$\det(A) = \det(B)\det(C) .$$

Известно, что детерминант треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, а поскольку

$$\det(C) = 1 ,$$

то

$$\det(A) = \det(B) = (b_{11}b_{22}....b_{nn}) .$$

Приведем теперь пример программы, которая реализует описанный выше метод разложения, и находит детерминант исходной матрицы.

```

SUB TRIAN(A(20),B(20),C(20),DET,N)
REM ***** РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ "А" НА ДВЕ ТРЕ-
УГОЛЬНЫЕ A=B*C И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА /A/
*****
DIM AN(N,N)
FOR I=1 TO N: C(I,I)=1: B(I,1)=A(I,1): C(1,I)=A(1,I)/B(1,1)
NEXT I: FOR I=2 TO N: FOR J=2 TO N: S=0: IF J>I GOTO 551
FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K: B(I,J)=A(I,J)-S
GOTO 552
551 S=0: FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K
C(I,J)=(A(I,J)-S)/B(I,I)
552 NEXT J: NEXT I
REM ----- ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА -----
DET=1: FOR K=1 TO N: DET = DET *B(K,K): NEXT K
REM ----- ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК -----
SS=0: FOR I=1 TO N: FOR J=1 TO N: S=0: FOR K=1 TO N
S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K: AN(I,J)=S-A(I,J): SS=SS+AN(I,J)
NEXT J: NEXT I: PRINT "          N = A - B*C ": FOR I=1 TO N
PRINT: FOR J=1 TO N: PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";AN(I,J);
NEXT J: NEXT I: PRINT "          DET=";
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ "; DET;
PRINT "          NEV=";: PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";SS
END SUB

```

Для оценки точности решения т.е. точности разложения исходной матрицы на две треугольные, использован метод невязок

[68]. После разложения матрицы A на треугольные, вычисляется матрица невязок [68], как разность исходной матрицы A и

$$S = BC$$

где B и C найденные таким образом численные матрицы. Теперь берется разность по всем элементам с исходной матрицей A

$$AN = S - A$$

Матрица AN невязок дает отклонение приближенной величины BC , найденной численными методами, от истинного значения каждого элемента исходной матрицы A .

После разложения матрицы A на треугольные, решение матричной системы можно записать в виде

$$By = b, \quad Cx = y,$$

где сами решения находятся из следующих простых выражений [68]

$$y_1 = a_{1,n+1}/b_{11}, \quad (3.23)$$

$$y_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k}{b_{ii}} \quad \text{при } i > 1$$

и

$$x_n = y_n,$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k \quad \text{при } i < n,$$

где $a_{i,n+1}$ - элементы матрицы - столбца b (здесь i меняется от 1 до N - размерности матрицы A). В такой задаче все треугольные матрицы и решения X определяются вполне однозначно.

Вернемся теперь к рассмотрению обобщенной матричной задачи на собственные значения и собственные вектора прежнего вида (3.18) [123]

$$(H - EL)C = 0. \quad (3.24)$$

Это однородная система уравнений и она имеет не тривиальное решение, только если ее детерминант

$$\det(H - EL) = 0 \quad (3.25)$$

Значения E , которые приводят к нулевому детерминанту, называются собственными значениями. Решения S системы при найденных собственных значениях являются собственными векторами исходной матрицы.

Для численных методов, реализуемых на компьютере, не обязательно разлагать матрицу L на треугольные и находить новую матрицу H' и новые вектора X' , определяя обратные матрицы, как это было описано ранее. Мы можем сразу разлагать на треугольные недиагональную матрицу $(H - EL)$ и численными методами искать энергии, которые приводят к нулю ее детерминанта.

Для этого сама матрица $(H - EL)$ разлагается на две треугольные

$$A = H - EL = BC \quad ,$$

как описано выше, и вычисляется ее детерминант

$$\det(A) = \det(B) \quad ,$$

по нулю, которого ищутся собственные значения энергии E системы.

Здесь мы имеем довольно простую задачу поиска нуля некоторого функционала одной переменной

$$F(E) = 0 \quad ,$$

решение, которой не представляет большой сложности.

Такой метод показал свою полную работоспособность, как для контрольных задач, в качестве которых выбиралась нуклон – нуклонная система с классическим потенциалом Рейда, так для реальных расчетов физических характеристик связанных состояний кластеров в атомных ядрах [2].

Если функция $F(E)$ непрерывная на отрезке $[a,b]$ и $F(a)F(b) < 0$, т.е. такой отрезок включает корень функции, то для его поиска можно использовать метод половинного деления. Для поиска корня уравнения делим этот отрезок пополам $x = (b + a)/2$ и вычисляем $F(x)$. Если $F(x) = 0$, то x и есть корень уравнения. Если $F(x)$ не равно нулю, то выбираем ту половину $[a,x]$ $[x,b]$, на концах которой функция имеет разные знаки, например, $F(x)F(a) < 0$ и снова делим его пополам. Эта процедура выполняется до тех пор, пока значение функции в некоторой точке "у" не станет меньше заданного числа ϵ , которое определяет точность нахождения корня функции [68].

Приведем теперь текст компьютерной программы, реализующей описанный метод поиска корня функции. Здесь PN - нижний предел поиска корня, PV - верхний предел, H - шаг поиска, EP - точность поиска и X - значение корня.

SUB NULFUN(PN,PV,H,EP,X)

REM ***** ПОИСК НУЛЯ ФУНКЦИИ *****

A2=PN: B2=PN+H: CALL FUN(A2,D12)

51 CALL FUN(B2,D11): IF D12*D11>0 GOTO 4

44 A3=A2: B3=B2

11 C3=(A3+B3)/2: IF ABS(A3-B3)<EP GOTO 151: CALL FUN(C3,F2)

IF D12*F2>0 GOTO 14: B3=C3: D11=F2: GOTO 15

14 A3=C3: D12=F2

15 IF ABS(F2)>EP GOTO 11

151 X=C3: GOTO 7

4 IF ABS(D11*D12)<EP GOTO 44: A2=A2+H

B2=B2+H: D12=D11: IF B2-PV<0 GOTO 51

7 END SUB

SUB FUN(X,F)

F=COS(X)

END SUB

Приведем результаты поиска корня функции Cos(x) при точности 10^{-15} , в пределах 0 - 2 с шагом 0.1.

KOR = 1.570796326794897

$\pi/2$ = 1.570796326794897

FUN = -3.828317871046316E-016

Здесь первое число KOR - значение найденного корня, второе число – его истинное значение, которое известно и равно $\pi/2$, FUN - значение функции при найденном значении корня, которое должно быть меньше заданной величины, а именно, 10^{-15} .

После нахождения собственного значения (обычно это первое или второе собственное значение) решаем известную систему для поиска собственных векторов X, которая имеет вид

$$AX = BCX = (H - EL)X = 0 \quad .$$

Такая система линейных уравнений относительно N неизвестных X может быть решена при E, которое равно собственному значению. Равенство нулю ее детерминанта означает линейную зависимость одного из уравнений системы, т.е. ее ранг R меньше по-

SV).

```

SUB SV(E,H(),AL(),C(), B(),Y(),D(),X(),SV(),N)
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТ-
РИЧНОГО УРАВНЕНИЯ *****
DIM AN(N): REM ----- ВЕКТОРА СИСТЕМЫ N-1 УРАВНЕНИЙ --
Y(1)=D(1)/B(1,1): FOR I=2 TO N: S=0: FOR K=1 TO I-1
S=S+B(I,K)*Y(K): NEXT K: Y(I)=(D(I)-S)/B(I,I): NEXT I
X(N)=Y(N): FOR I=N-1 TO 1 STEP -1: S=0: FOR K=I+1 TO N
S=S+C(I,K)*X(K): NEXT K: X(I)=Y(I)-S: NEXT I
REM -- ВЕКТОРА ПОЛНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ --
FOR I=1 TO N: SV(I)=X(I): NEXT I: N=N+1: SV(N)=1: S=0
FOR I=1 TO N: S=S+SV(I)^2: NEXT I: FOR I=1 TO N
SV(I)=SV(I)/SQR(S): NEXT I
REM ----- ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК -----
FOR I=1 TO N: S=0: SS=0: FOR J=1 TO N: S=S+H(I,J)*SV(J)
SS=SS+E*AL(I,J)*SV(J): NEXT J: AN(I)=S-SS: NEXT I
PRINT: PRINT "          НЕВЯЗКИ      AN=H*X-E*L*X"
PRINT: FOR I=1 TO N: PRINT USING " +#.#####^" AN(I);
NEXT I: END SUB
    
```

Если матрица A симметричная, можно применить и другой метод, позволяющий разложить ее на произведение транспонированных треугольных матриц вида (метод квадратного корня) [68]

$$A = T'T \quad ,$$

где

$$t_{11} = \sqrt{A_{11}} \quad , \quad t_{1j} = \frac{A_{1j}}{t_{11}} \quad ,$$

при $j > 1$ и

$$t_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \quad \text{при } 1 < i \leq n \quad , \quad (3.27)$$

$$t_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}} \quad \text{при } i < j \quad .$$

Здесь T - верхняя треугольная матрица, а T' - нижняя, которая равна транспонированной матрице T .

Используя такое разложение, решение системы линейных

уравнений $Ax = b$ можно представить в виде

$$T'y = b \quad , \quad Tx = y \quad ,$$

где

$$y_1 = b_1/t_{11} \quad , \quad (3.28)$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad \text{при } i > 1 \quad ,$$

где b_i - элементы матрицы - столбца b и

$$x_n = y_n/t_{nn} \quad ,$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n t_{ik} x_k}{t_{ii}}$$

при $i < n$.

Это разложение позволяет легко находить определители симметричных матриц

$$A = T'T \quad ,$$

где T - верхняя треугольная матрица. Тогда

$$\det(A) = \det(T')\det(T) = [\det(T)]^2 = (t_{11}t_{22}\dots t_{nn})^2 \quad .$$

Использование такого способа при решении задачи на компьютере оказывается не всегда возможным. Из-за ошибок округления, при численных расчетах, под корнем может оказаться малая отрицательная величина (например, -10^{-15}), что приводит к аварийной остановке работы программы. Поэтому во всех расчетах мы использовали предыдущий метод решения такой задачи.

3.5 Вариационная программа решения уравнения Шредингера

Приведем вариант вариационной программы для поиска собственной энергии и ВФ с использованием независимого варьирования параметров в разложении ВФ по гауссоидам для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системы ядра ${}^6\text{Li}$ с реальным ядерным потенциалом. Обозначения параметров приведены в самой программе.

РЕМ ВАРИАЦИОННАЯ ПРОГРАММА ПОИСКА ЭНЕРГИИ СВЯЗИ

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,L,J,N,M,K: NN=20: N=1000
DIM XP(NN), H(NN,NN), T(NN,NN), VN(NN,NN), VC(NN,NN),
AL1(NN,NN), VK(NN,NN)
DIM X(NN), Y(NN), B(NN,NN), C(NN,NN), D(NN), AD(NN,NN)
DIM SV(NN), AA(NN,NN), F1(N), FU(N), FF(N)
DIM AN(NN), AL(NN,NN), C0(5*NN), CW0(5*NN), CW(5*NN)
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *****
FAIL$="C:\BASICA\SOB-ALD.DAT"
NSAVE=0 : REM =0 - НЕТ ЗАПИСИ В ФАЙЛ, =1 - ЗАПИСЬ
Z1=1: Z2=2 : REM МАССЫ И ЗАРЯДЫ КЛАСТЕРОВ
AM1=2 AM2=4
R01=1.96 : REM РАДИУСЫ КЛАСТЕРОВ
R02=1.67
AM=AM1+AM2 : REM ВХОДНЫЕ КОНСТАНТЫ
PM=AM1*AM2/AM
GK=3.44476E-02*Z1*Z2*PM
A11=20.7343
A22=1.439975*Z1*Z2
P1=3.14159265
NF=N : REM ЧИСЛО ШАГОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ
R00=25
HFF=R00/NF : REM ШАГ ВЫЧИЛЕНИЯ ФУНКЦИИ
NP=10 : REM РАЗМЕРНОСТЬ БАЗИСА
NI=1 : REM ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ
NV=1 : REM =0 БЕЗ МИНИМИЗАЦИИ, =1 С МИНИМИЗАЦИЕЙ ПО ЭНЕРГИИ
EP=1.0D-09 : REM ТОЧНОСТЬ ПОИСКА ЭНЕРГИИ
ERP=1.0D-15 : REM ТОЧНОСТЬ ПОИСКА НУЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА
HC=0.123 : REM ШАГ ПОИСКА НУЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА
PNC=-1.6 : REM НИЖНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОИСКА НУЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА
PVC=3 : REM ВЕРХНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПОИСКА НУЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА
PHN=0.123 : REM ШАГ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АЛЬФА
REM ***** ПАРАМЕТРЫ ПОТЕНЦИАЛА *****
V0=-76.12: RN=0.2: LO=0: RC=0
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА *****
XP(1)=0.0108345: XP(2)=0.02535157: XP(3)=0.064665899
XP(4)=0.1456006: XP(5)=0.36370071: XP(6)=0.37917857
XP(7)=0.6401466: XP(8)=16.7174: XP(9)=0.95201183:
XP(10)=3.503041
    
```



```

REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ *****
C11=LO+1.5: C22=LO+0.5: PI=SQR(P1): C33=LO+1
N11=2*LO+3: S44=1: FOR K=1 TO N11 STEP 2
S44=S44*K: NEXT K: LK=LO*LO: S11=S44/(2*LO+3)
S22=S11/(2*LO+1): R1=1: FOR K=1 TO LO: R1=R1*K
NEXT K: B11=PI*S11/(2^(LO+2)): B22=B11*V0: B23=B11*V1
B33=LO*(LO+1)*PI*S22/(2^(LO+1)): B44=A22*R1/2
B55=PI/(2^(LO+1))
REM * ПОИСК ПАРАМЕТРОВ ВФ И ЭНЕРГИИ СВЯЗИ *
CALL VARMIN(ALA(),PHN,NP,NI,XP(),EP,B,NV,NN)
REM ***** ЯДЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ *****
PRINT: PRINT "----- ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ -----"
"
PRINT: PRINT "          E = ";
PRINT USING " +#.#####^" ";B
PRINT: PRINT "----- ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА -----"
"
PRINT: FOR I=1 TO NP
PRINT USING " +#.#####^" ";XP(I);
NEXT I: PRINT
REM ***** СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА *****
CALL SV(B,NP,XP())
REM ***** НОРМИРОВКА ВЕКТОРОВ *****
FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
AL(I,J)=PI*S11/(2^(LO+2))*(XP(I)+XP(J))^C11)
NEXT J: NEXT I: S=0
FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
S=S+SV(I)*SV(J)*AL(I,J)
NEXT J: NEXT I: ANOR=1/SQR(S)
PRINT: PRINT
PRINT "          СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА"
PRINT: FOR IJK=1 TO NP
SV(IJK)=ANOR*SV(IJK)
PRINT USING " +#.#####^" ";SV(IJK);
NEXT IJK: PRINT
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ВФ *****
INPUT FFFF: REM ЕСЛИ FFFF=0 ВФ НА ЭКРАН НЕ ВЫВО-
ДИТСЯ
FOR I=0 TO NF: R=HFF*I: S=0
FOR J=1 TO NP: RRR=R^2*XP(J): IF RRR>50 GOTO 9182
S=S+SV(J)*EXP(-RRR)
9182 NEXT J: FF(I)=R^(LO+1)*S: NEXT I
IF FFFF=0 GOTO 246: PRINT " R          F(R)"
FOR I=0 TO NF STEP NFF: R=I*HFF

```

```

PRINT USING " +#.###^^^ ";R;
PRINT USING "          +#.#####^^^ ";FF(I): NEXT I
246 REM ***** ПРОВЕРКА НОРМИРОВКИ *****
FOR I=0 TO NF: R=I*HFF: F1(I)=FF(I)^2: NEXT I
CALL SIM(F1(),NF,HFF,SIM): PRINT
PRINT "          NOR = ";
PRINT USING " +#.#####^^^ ";SIM
PRINT: REM ***** АСИМПТОТИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ *****
SKS=(ABS(B)*PM/A11): SS=SQR(ABS(SKS)): SQQ=SQR(2*SS)
GGG=GK/SS: M1=NF/4: M3=NF/20: M2=NF/2+NF/4
PRINT "          R          C0          CW0          CW"
K=0: FOR I=M1 TO M2 STEP M3: K=K+1: R=I*HFF
CALL ASIMP(R,SKS,GK,LO,I,C0,CW0,CW)
C0(K)=C0: CW0(K)=CW0: CW(K)=CW
PRINT USING "          +#.###^^^ ";R,C0,CW0,CW: NEXT I
REM ***** РАДИУС ЯДРА *****
SS=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
SS=SS+SV(I)*SV(J)/(XP(I)+XP(J))^(LO+2.5)
NEXT J: NEXT I: RR=PI*S44*SS/2^(LO+3): RRR=SQR(RR)
RCH=AM1*R01^2/AM+AM2*R02^2/AM+AM1*AM2*RR/AM^2
RCH=SQR(RCH): PRINT: PRINT "          (R^2)^(1/2) = ";
PRINT USING " +#.#####^^^ ";RCH
IF NSAVE=0 GOTO 4567
OPEN "O",1,FAIL$
PRINT#1,"          ЭНЕРГИЯ"
PRINT#1,"          "
PRINT#1,USING "          +#.#####^^^ ";B
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          КОЭФФИЦИЕНТЫ АЛЬФА "
PRINT#1,"          "
FOR I=1 TO NP: PRINT#1, USING " +#.#####^^^ ";XP(I)
NEXT I: PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА  SV"
PRINT#1,"          "
FOR IJK=1 TO NP: PRINT#1, USING " +#.#####^^^ ";SV(IJK);
NEXT IJK: PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          SV"
FOR I=1 TO NP: PRINT#1, USING " +#.#####^^^ ";E2(I);
NEXT I: PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          "
PRINT#1," R          C0          CW0          CW"
PRINT#1,"          "

```

```

KKK=0: FOR I=M1 TO M2 STEP M3: R=HFF*I
KKK=KKK+1: PRINT#1, USING " +#.##^#### ";R;
PRINT#1, USING "      +#.#####^#### ";C0(KKK); CW0(KKK);
CW(KKK)
NEXT      I:          PRINT#1,:          PRINT#1,"
"

PRINT#1, " МЕЖКЛАСТЕРНОЕ РАССТОЯНИЕ ";
PRINT#1, USING " +#.#####^#### ";RRR
PRINT#1,"
PRINT#1, "РАДИУС ЯДРА ";
PRINT#1, USING " +#.#####^#### ";RCH
PRINT#1,"
PRINT#1," R      F(I)"
PRINT#1,"
FOR I=1 TO NF: R=HFF*I: PRINT#1, USING " +#.##^#### ";R;
PRINT#1, USING "      +#.#####^#### ";FF(I): NEXT I
PRINT#1,"
PRINT#1,"
PRINT#1," : CLOSE
4567 END

SUB VARMIN(ALA(30), PHN, NP, NI, XP(30), EP, AMIN, NV,
NNN)
DIM XPN(NNN)
REM ***** ПОИСК МИНИМУМА *****
FOR I=1 TO NP: XPN(I)=XP(I): NEXT: NN=1
PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN);
PH=PHN: CALL DETNUL(XPN(),NP,ALA)
B=ALA: IF NV=0 GOTO 3012
PRINT USING "      +#.#####^#### ";ALA;
PRINT: REM -----
FOR IIN=1 TO NI: NN=0: GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+1: IN=0
2229 A=B: XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
IF XPN(NN)<0 GOTO 1159: IN=IN+1
REM -----
PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN);
CALL DETNUL(XPN(),NP,ALA)
B=ALA: PRINT USING "      +#.#####^#### ";ALA;
PRINT: REM -----
IF B<A GOTO 2229: C=A: XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF IN>1 GOTO 3339: PH=-PH: GOTO 5559

```

```

3339 IF ABS((C-B)/(B))<EP GOTO 4449: PH=PH*0.5
5559 B=C: GOTO 2229
4449 PH=PHN: B=C: IF NN<NP GOTO 1119: PH=PHN*0.1
3012 AMIN=B: NEXT IIN: FOR I=1 TO NP
XP(I)=XPN(I): NEXT: END SUB
SUB MAT(XP(20),NP)
REM ***** ВЫИСЛЕНИЕ МАТРИЦ *****
SHARED B44, B23, B11, B33, A11, PM, B55, S22, S44, C22, LO,
S11,LK,RC,PI,C11,C33,B22
SHARED T(),VC(),VN(),VK(),AL1(),H(),RN,RN1,F1()
FOR KK=1 TO NP: FOR JJ=1 TO NP: AL=XP(KK)+XP(JJ)
T(KK,JJ)=-B55*(LO*S11-LK*S22-
XP(KK)*XP(JJ)*S44/AL^2)/AL^C22
SF=1: SS1=1: IF RC=0 GOTO 7654: PF=RC*SQR(AL)
NFF=100: HF=PF/NFF: IF PF>3 GOTO 9765: FOR I=0 TO NFF
X=HF*I: F1(I)=EXP(-X^2): NEXT I: CALL SIM(F1(),NFF,HF,SIM)
SF=SIM*2/PI
9765 ALR=SQR(AL)*RC: ALR2=ALR^2: EX=EXP(-ALR2)
SS=PI*(9*ALR-15/(2*ALR))*SF: SS1=(15*EX+SS)/(8*ALR2)
7654 VK(KK,JJ)=B44/AL^C33*SS1: VN(KK,JJ)=B22/(AL+RN)^C11
VC(KK,JJ)=B33/AL^C22
H(KK,JJ) = (A11/PM)*(T(KK,JJ) + VC(KK,JJ)) + VN(KK,JJ) +
VK(KK,JJ)
AL1(KK,JJ)=B11/AL^C11: H(JJ,KK)=H(KK,JJ)
AL1(JJ,KK)=AL1(KK,JJ)
NEXT JJ: NEXT KK: END SUB
SUB DETNUL(XP(20),NP,ALA)
REM ***** ПОИСК НУЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА *****
SHARED EP,PNC,PVC,HC,EPP
REM ----- ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ -----
CALL MAT(XP(),NP)
REM ----- ПОИСК НУЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА -----
A2=PNC: B2=PNC+HC: CALL DETER(A2,D12,NP)
51 CALL DETER(B2,D11,NP)
REM -----
IF D12*D11>0 GOTO 4
44 A3=A2: B3=B2
11 C3=(A3+B3)/2: IF ABS(A3-B3)<EPP GOTO 151
CALL DETER(C3,F2,NP): IF D12*F2>0 GOTO 14
B3=C3: D11=F2: GOTO 15
14 A3=C3: D12=F2
15 IF ABS(F2)>EPP GOTO 11
151 ALA=C3: GOTO 7
REM -----

```

```

4 IF ABS(D11*D12)<EPP GOTO 44
A2=A2+HC: B2=B2+HC: D12=D11
IF B2-PVC<0.1 GOTO 51
7 END SUB
SUB DETER(AL,DET,NP)
REM *** ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕРМИНАНТА МАТРИЦЫ ***
SHARED H(),AL1(),AL(),B(),C()
FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
AL(I,J)=(H(I,J)-AL*AL1(I,J)): B(I,J)=0: C(I,J)=0
NEXT J: NEXT I: CALL TRIAN(AL(),B(),C(),DET,NP): END SUB
SUB SV(AL,NP,XP(20))
REM ***** СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА *****
SHARED AL1(), C(), B(), AD(), AL(), Y(), AN(), D(), X(), SV(), H()
REM ----- ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ -----
CALL MAT(XP(),NP)
REM ----- ПОДГОТОВКА МАТРИЦЫ -----
FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP: AL(I,J)=(H(I,J)-AL*AL1(I,J))
B(I,J)=0: C(I,J)=0: NEXT J: NEXT I
FOR I=1 TO NP-1: FOR J=1 TO NP-1: AD(I,J)=AL(I,J)
NEXT J: NEXT I: FOR I=1 TO NP-1: D(I)=-AL(I,NP)
NEXT I: NP=NP-1: CALL TRIAN(AD(),B(),C(),DET,NP)
REM ----- ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ -----
Y(1)=D(1)/B(1,1): FOR I=2 TO NP: S=0
FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*Y(K): NEXT K
Y(I)=(D(I)-S)/B(I,I): NEXT I: X(NP)=Y(NP)
FOR I=NP-1 TO 1 STEP -1: S=0: FOR K=I+1 TO NP
S=S+C(I,K)*X(K): NEXT K: X(I)=Y(I)-S: NEXT I
FOR I=1 TO NP: SV(I)=X(I): NEXT I: NP=NP+1: SV(NP)=1: S=0
FOR I=1 TO NP: S=S+SV(I)^2: NEXT I: FOR I=1 TO NP
SV(I)=SV(I)/SQR(S): NEXT I
REM ----- ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК -----
FOR I=1 TO NP: S=0: SS=0: FOR J=1 TO NP
S=S+H(I,J)*SV(J): SS=SS+AL*AL1(I,J)*SV(J): NEXT J
AN(I)=S-SS: NEXT I: PRINT
PRINT "          НЕВЯЗКИ      H*SV-LA*L*SV=0"
PRINT: FOR I=1 TO NP
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ";AN(I): NEXT I: END SUB
SUB TRIAN(AD(20),B(20),C(20),DET,NP)
REM РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ДВЕ ТРЕУГОЛЬНЫЕ
AD=B*C И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА
SHARED AA()
FOR I=1 TO NP: C(I,1)=1: B(I,1)=AD(I,1): C(I,1)=AD(I,1)/B(1,1)
NEXT I: FOR I=2 TO NP: FOR J=2 TO NP: S=0
IF J>I GOTO 551: FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J)

```

```

NEXT K: B(I,J)=AD(I,J)-S:GOTO 552
551 S=0: FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K
C(I,J)=(AD(I,J)-S)/B(I,I)
552 NEXT J: NEXT I: S=1: FOR K=1 TO NP: S=S*B(K,K)
NEXT K: DET=S
REM ----- ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК -----
SS=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP: S=0
FOR K=1 TO NP: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K
AA(I,J)=S-AD(I,J): SS=SS+AA(I,J): NEXT J: NEXT I
PRINT "          N = AD - B*C = 0"
FOR I=1 TO NP: PRINT: FOR J=1 TO NP
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";AA(I,J): NEXT J: NEXT I
PRINT "          DET=": PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";S;
PRINT "          NEV=": PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";SS;
PRINT
END SUB
SUB WW(SK,L,GK,R,WH)
REM ***** ФУНКЦИЯ УИТТЕКЕРА *****
DIM F(2000)
SS=SQR(ABS(SK)): AA=GK/SS: BB=L: NN=2000: HH=0.01
ZZ=1+AA+BB: AAA=1/ZZ: NNN=30000: FOR I=1 TO NNN
AAA=AAA*I/(ZZ+I): NEXT: GAM=AAA*NNN^ZZ
RR=R: CC=2*RR*SS: FOR I=0 TO NN: TT=HH*I
F(I)=TT^(AA+BB)*(1+TT/CC)^(BB-AA)*EXP(-TT): NEXT I
CALL      SIM(F(),NN,HH,SIM):          WH=SIM*EXP(-
CC/2)/(CC^AA*GAM)
END SUB
SUB SIM(V(5000),N,H,SIM)
REM ***** ИНТЕГРАЛ ПО СИМПСОНУ *****
A=0: B=0: FOR I=1 TO N-1 STEP 2: B=B+V(I)
NEXT I: FOR J=2 TO N-2 STEP 2: A=A+V(J)
NEXT J: SIM=H*(V(0)+V(N)+2*A+4*B)/3: END SUB
SUB ASIMP(R,SK,GK,L,N,C0,CW0,CW)
REM **** АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КОНСТАНТА *****
SHARED FF()
SS=SQR(ABS(SK)): SQ=SQR(2*SS): GG=GK/SS
CALL WW(SK,L,GK,R,WWW): CW=FF(N)/WWW/SQ
C0=FF(N)/(EXP(-SS*R)*SQ): CW0=C0*(R*SS*2)^GG: END SUB

```

Дадим теперь результаты контрольного счета по этой программе при числе вариационных параметров $N=10$, который сравним с другими результатами, полученными конечно – разностным методом, для реальной физической системы ${}^2\text{H}^4\text{He}$ ядра ${}^6\text{Li}$.

Потенциал взаимодействия представляется в виде гауссойды с

глубиной -76.12 МэВ и шириной 0.2 Фм⁻², кулоновский радиус и орбитальный момент основного состояния равны нулю. Асимптотические константы C_0 , CW_0 и CW определяются из сшивки ВФ с обычной экспонентой $\exp(-kr)$, асимптотикой функции Уиттекера и точной функцией Уиттекера. Для радиусов кластеров использованы величины - $R_d = 1.96$ Фм и $R_\alpha = 1.67$ Фм [13-19].

----- ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ -----

$E = -1.4711E+00$ - Энергия связи в МэВ.

----- ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА -----

+9.50186E-03 +2.53516E-02 +6.46659E-02 +1.45601E-01 +3.18966E-01
+3.79179E-01 +6.40147E-01 +2.08299E+01 +8.34914E-01 +3.50304E+00

НЕВЯЗКИ (H-LA*L)*SV=0

+0.00000E+00 +9.76996E-15 +7.99361E-15 +1.49880E-14 +9.23393E-15
-9.85323E - 16 -1.24900E -15 -1.90820E -17 +9.15934E-16 -4.32966E- 13

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА

+5.50487E-03 +5.13559E-02 +1.59658E-01 +2.67736E-01 +2.37404E-01
-9.26495E-01 -7.01996E-01 +9.98457E-03 +1.02114E-01 +2.05509E-02

NOR = +9.9999856E-01 - Нормировка ВФ.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

R	C0	CW0	CW
+6.250E+00	+1.991E+00	+2.977E+00	+3.225E+00
+7.500E+00	+1.905E+00	+3.008E+00	+3.223E+00
+8.750E+00	+1.837E+00	+3.038E+00	+3.228E+00
+1.000E+01	+1.781E+00	+3.064E+00	+3.235E+00
+1.125E+01	+1.723E+00	+3.070E+00	+3.224E+00
+1.250E+01	+1.663E+00	+3.057E+00	+3.198E+00
+1.375E+01	+1.612E+00	+3.051E+00	+3.179E+00
+1.500E+01	+1.582E+00	+3.072E+00	+3.192E+00
+1.625E+01	+1.569E+00	+3.121E+00	+3.235E+00
+1.750E+01	+1.562E+00	+3.176E+00	+3.284E+00
+1.875E+01	+1.542E+00	+3.202E+00	+3.304E+00

$(R^2)^{(1/2)} = 2.614E+00$ - Радиус ядра.

Из этих результатов видно, что элементы матрицы невязок не превышают величины 10^{-12} .

Приведем подобные результаты для системы $^3\text{H}^4\text{He}$ ядра ^7Li . Для па-

раметров гауссового потенциала использовано - $V_0 = 83.83$ МэВ, $R_0 = 0.15747$ Фм², $L=1$, $R_{cul} = 3.095$ Фм.

----- ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ -----

$$E = -2.4654E+00$$

----- ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА -----

+3.48871E-02 +2.53516E-02 +6.46659E-02 +1.45601E-01 +3.63701E-01
 +3.79179E-01 +7.82259E-01 +7.17400E-01 +9.52012E-01 +1.94769E+00

НЕВЯЗКИ $H*SV-LA*L*SV=0$

+8.88178E-15 +2.13163E-14 -6.30607E-14 -4.84057E-14 -1.56646E-14
 -1.95260E-14 -5.44009E-15 -4.88498E-15 +2.92821E-15 -4.35187E-12

СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА

-3.58270E-04 -2.53526E-03 -3.65097E-02 -1.86901E-01 -2.79804E+00
 +3.39896E+00 -5.11591E-01 +9.55986E-01 +4.50193E-02 +1.31924E-03

$$N = +1.00000000E+00$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

R	C0	CW0	CW
+6.250E+00	-3.169E+00	-4.984E+00	-3.897E+00
+7.500E+00	-2.925E+00	-4.825E+00	-3.908E+00
+8.750E+00	-2.720E+00	-4.672E+00	-3.886E+00
+1.000E+01	-2.584E+00	-4.594E+00	-3.900E+00
+1.125E+01	-2.503E+00	-4.590E+00	-3.961E+00
+1.250E+01	-2.383E+00	-4.492E+00	-3.928E+00
+1.375E+01	-2.142E+00	-4.140E+00	-3.661E+00
+1.500E+01	-1.779E+00	-3.518E+00	-3.141E+00
+1.625E+01	-1.355E+00	-2.736E+00	-2.462E+00
+1.750E+01	-9.443E-01	-1.944E+00	-1.762E+00
+1.875E+01	-6.027E-01	-1.263E+00	-1.152E+00

$$(R^2)^{(1/2)} = 2.471E+00$$

И здесь элементы матрицы невязок не превышают величины 10^{-11} , а нормировка N собственной функции равна единице с точностью до девятого знака. Из этих результатов видно, что в обоих случаях удается получить точность вычислений на уровне 10^{-11} , асимптотика ВФ остается устойчивой по крайней мере в области 6-13 Фм, а нормировка функции определена с точностью порядка 10^{-6}

3.6 Численные методы решения уравнения Шредингера

Уравнение Шредингера [57] для центральных потенциалов вида (3.1)

$$\chi''_L + [k^2 - V(r)] \chi_L = 0 \quad (3.29)$$

с тем или иным граничным условием при $k^2 < 0$ образует краевую задачу типа Штурма - Лиувилля и при переходе к конечным разностям [58]

$$u'' = [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}]/h^2$$

превращается в замкнутую систему линейных алгебраических уравнений [58,68]. Условие равенства нулю ее детерминанта позволяет определить энергию системы [126]

$$D_N = \begin{pmatrix} \theta_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha_2 & \theta_2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \theta_3 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \alpha_{N-1} & \theta_{N-1} & 1 \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \alpha_N & \theta_N \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

где N - число уравнений, $h = \Delta r/N$ - шаг конечно - разностной сетки, Δr - интервал решения системы, и

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1, & \alpha_N &= 2, & \theta_n &= k^2 h^2 - 2 - V_n h^2, \\ \theta_N &= k^2 h^2 - 2 - V_n h^2 + 2hf(\eta, L, Z_n), & Z_n &= 2kr_n, \\ r_n &= nh, & n &= 1, 2, \dots, N, & k &= \sqrt{|k^2|}, \\ f(\eta, L, Z_n) &= -k - 2k\eta/Z_n - 2k(L - \eta)/Z_n^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где $V_n = V(r_n)$ - потенциал взаимодействия кластеров в точке r_n . Такая форма записи граничных условий $f(\eta, L, Z_n)$ позволяет приближенно учитывать кулоновские взаимодействия, т.е. эффекты, которые дает учет функции Уиттекера.

Вид логарифмической производной ВФ во внешней области можно получить из интегрального представления функции Уиттекера [75]

$$f(\eta, L, Z) = -k - \frac{2k\eta}{Z} - \frac{2k(L-\eta)}{Z^2} S, \quad (3.32)$$

где

$$S = \frac{\int_0^{\infty} t^{L+\eta+1} (1+t/z)^{L-\eta-1} e^{-t} dt}{\int_0^{\infty} t^{L+\eta} (1+t/z)^{L-\eta} e^{-t} dt}.$$

Расчеты показывают, что величина S не превышает 1.05, и ее учет приводит к поправкам в энергию связи системы, порядка единицы четвертого знака после запятой.

Вычисление D_N проводится по рекуррентным формулам вида [58]

$$D_{-1} = 0, D_0 = 1, D_n = \theta_n D_{n-1} - \alpha_n D_{n-2}, \quad n = 1 \dots N. \quad (3.33)$$

Для нахождения формы волновых функций связанных состояний используется другой рекуррентный процесс [58]

$$\chi_0 = 0, \chi_1 = \text{const}, \chi_n = \theta_{n-1} \chi_{n-1} + \alpha_{n-1} \chi_{n-2}, \quad n = 2 \dots N \quad (3.34)$$

Тем самым, при заданной энергии системы удастся найти детерминант и волновую функцию связанного состояния. Энергия, приводящая к нулю детерминанта, считается собственной энергией системы, а волновая функция при этой энергии - собственной функцией задачи.

Приведенные выше выражения позволяют проводить расчеты многих характеристик связанных состояний атомных ядер в том случае, если межкластерные потенциалы имеют чисто центральный вид и не содержат слагаемых, зависящих от взаимной ориентации спинов частиц и их относительного расстояния.

Подобные ядерные силы называются тензорными и приводят к смешиванию орбитальных состояний с различным L . В частности, в дейтроне, такие силы смешивают орбитальные состояния S и D и приводят к появлению D компоненты в волновой функции системы. В следующем разделе мы перейдем к рассмотрению именно таких взаимодействий с изложением некоторых методов расчетов, применимые в данном случае.

3.6.1 Методы расчета Гамма функции

Для нахождения численных значений Гамма функции можно использовать ее интегральное представление [73]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

при $\text{Re } z > 0$. Или разложение вида

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \right) \quad (3.35)$$

при z не равном $0, -1, -2 \dots$. Существуют также полезные соотношения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad , \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad , \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

при $n = 1, 2, 3, \dots$. Выражение (3.35) можно использовать для численных расчетов значений Γ - функции.

Ниже приведена программа вычисления Гамма - функции таким способом.

```

SUB GAMMA(Z,GF)
C=1: N=100000
FOR I=1 TO N
C=C*I/(Z+I)
NEXT I
GF=C*N^Z/Z
END SUB
    
```

Здесь Z - значение переменной и GF - значение самой Гамма функции. В таблице 3.1 приведены результаты расчетов Гамма функции для различных N и Z и сравнение их с табличными данными [73].

Таблица 3.1 - Вычисление гамма - функции.

	$N=10^5$	$N=10^6$	Точные
Z	$\Gamma(z)$ из программы		$\Gamma(z)$ из таблиц
1/3	2.67 89 32	2.67 89 38	2.67 89 38
0.5	1.77 24 47	1.77 24 53	1.77 24 54

1	0.99 99 90	0.99 99 99	1
2	0.99 99 70	0.99 99 97	1
3	1.99 98 80	1.99 99 88	2
4	5.99 94 00	5.99 99 40	6

Из этих результатов видно, что уже при числе членов выражения (3.35) удается получить точность порядка 5×10^{-4} , даже при сравнительно больших значениях величины Z .

3.6.2 Методы расчета функций Уиттекера

Функция Уиттекера является решение уравнения Шредингера без ядерного потенциала [86]

$$\frac{d^2 W(\mu, \nu, z)}{dz^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{z} - \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) W(\mu, \nu, z) = 0, \quad (3.36)$$

которое можно привести к стандартному виду уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \chi(k, L, r)}{dr^2} - \left(k^2 + \frac{g}{r} + \frac{L(L+1)}{r^2} \right) \chi(k, L, r) = 0,$$

где $g = \frac{2\mu Z_1 Z_2}{\hbar^2} = 2k\eta$, $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2}{k\hbar^2}$ - кулоновский параметр,

$$z = 2kr, \quad \nu = -\frac{g}{2k} = -\eta \quad \text{и} \quad \mu = L + 1/2.$$

Для нахождения численных значений функции Уиттекера обычно используют ее интегральное представление

$$W(\mu, \nu, z) = \frac{z^\nu e^{-z/2}}{\Gamma(1/2 - \nu + \mu)} \int_0^\infty t^{\mu-\nu-1/2} (1+t/z)^{\mu+\nu-1/2} e^{-t} dt,$$

которое можно привести к виду

$$W(L, \eta, z) = \frac{z^{-\eta} e^{-z/2}}{\Gamma(L + \eta + 1)} \int_0^\infty t^{L+\eta} (1+t/z)^{L-\eta} e^{-t} dt.$$

Легко видеть, что при $L = 1$ и $\eta = 1$ приведенный интеграл превращается в $\Gamma(3)$, которая сокращается со знаменателем и остается

простое выражение [127]

$$W(1,1, z) = \frac{e^{-z/2}}{z},$$

которое можно использовать для контроля правильности вычислений функции Уиттекера при любых значениях z .

Ниже приведена программа для расчета функций Уиттекера, использующая ее интегральное представление [86].

SUB WH(V(5000),X,L,K,G,W)

```

REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ УИТТЕКЕРА *****
A=G/K: B=L: H=0.005: N=6000: Z=1+A+B
C=1: M=100000: FOR I=1 TO M: C=C*I/(Z+I)
NEXT I: GF=C*M^Z/Z: Z=2*X*K: FOR I=0 TO N
T=H*I: V(I)=T^(A+B)*(1+T/Z)^(B-A)*EXP(-T): NEXT I
A=0: B=0: FOR I=0 TO N STEP 2: A=A+V(I): NEXT I
FOR I=1 TO N STEP 2: B=B+V(I): NEXT I
S=H*(V(0)+4*A+2*B - V(N))/3
W=S*EXP(-Z/2)/(Z^A*GF): END SUB
    
```

Здесь $A = \frac{\mu Z_1 Z_2}{k \hbar^2} = G/k$ - кулоновский параметр, $G = \frac{\mu Z_1 Z_2}{\hbar^2}$,

$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2} = \frac{2\mu E}{41.4686}$ - волновое число в Фм^{-2} , если E - энергия выражена в МэВ, X - расстояние от центра, равное r в Фм , $Z=2kr$ - безразмерная переменная, L - орбитальный момент - 0,1,2 и т.д.

В таблице 3.2 приведены результаты расчета функции Уиттекера при $\eta = 1$ и $k = 1$ для разных орбитальных моментов и ее точные значения при $L = 1$ и $\eta = 1$.

Таблица 3.2 - Вычисление функции Уиттекера.

r	$L=0$	$L=1$	$L=1$ (точные значения)	$L=2$
1	1.020287E-01	1.839506E-01	1.839397E-01	5.518741E-01
5	5.684637E-04	6.738346E-04	6.737947E-04	9.434065E-04
10	2.071580E-06	2.270131E-06	2.269996E-06	2.724267E-06
15	9.577254E-09	1.019735E-08	1.019674E-08	1.155746E-08
20	4.912900E-11	5.153190E-11	5.152884E-11	5.668736E-11

Из этой таблицы видно, при наблюдается совпадение с точными

значениями функции на уровне порядка 5×10^{-4} , т.е. не хуже 0.05 %.

3.7 Численная программа решения уравнения Шредингера

Приведем теперь текст конечно - разностной программы для вычисления волновых функций и энергий связанных состояний, основанной на описанном выше методе [13-19]. Здесь использованы следующие обозначения: AM1 - Масса первой частицы в а.е.м., AM2 - Масса второй частицы в а.е.м., Z1 - Заряд первой частицы в единицах заряда "е", Z2 - Заряд второй частицы в единицах заряда "е", PM - Приведенная масса μ , A1 - Константа $\hbar^2/M_N = 41.4686$, где M_N - масса нуклона в а.е.м., равная 1, AK1 - Константа при кулоновском потенциале $1.439975Z_1Z_2 \cdot 2\mu/\hbar^2$, N - Число шагов при интегрировании уравнения Шредингера, H - Величина шага при интегрировании уравнения Шредингера, V0 - Глубина ядерного потенциала, R0 - Радиус ядерного потенциала, RCU - Кулоновский радиус, L - Орбитальный момент, SKS - Квадрат волнового числа, ESS - Энергия связи, GGG - Кулоновский параметр $3.44476 \cdot 10^{-2} Z_1Z_2 \mu/k$, RK1, RK2 - Радиусы частиц, SKN - Нижний предел поиска энергии связанного состояния, HC - Начальный шаг при поиске энергии, SKV - Верхний предел поиска энергии связанного состояния, EP - Точность вычисления энергии связи.

РЕМ ПРОГРАММА РАСЧЕТА ВФ И ЭНЕРГИИ СВЯЗИ

```

DEFDBL A - Z:DEFINT K,L,J,M,N,I:NN=4000:DIM U(NN),V(NN)
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ *****
RAD=1:ASSIMP=1:WFUN=0
REM *****
Z1=2: Z2=1: Z=Z1+Z2: AM1=4: AM2=2: AM=AM1+AM2
RK1=1.67: RK2=1.96: PI=3.1415926535899
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): A1=41.4686: B1=2*PM/A1
AK1=1.439975*Z1*Z2*B1: GK=3.44476E - 02*Z1*Z2*PM
REM *****
N=1000: H=0.02: SKN= - 2: HC=0.1: SKV=1: SKN=SKN*B1
SKV=SKV*B1: HC=HC*B1: EP=1.0E - 10
REM *****
V0=76.12: R0=.2: V1=0: R1=0: A2= - V0*B1: A33=V1*B1: RCU=0:
L=0
REM ***** ПОИСК ЭНЕРГИИ *****
CALL MIN(EP, B1, PM, SKN, SKV, HC, H, N, L, A2, R0, AK1,
RCU, GK, ESS, SKS): PRINT: PRINT " E=",: PRINT USING
"+#.####^ ^ ^ ^ ",ESS: PRINT
REM ***** ПОИСК ФУНКЦИИ *****

```

```

CALL FUN(U(),H,N,A2,R0,A33,R1,L,RCU,AK1,SKS)
REM * * * * * НОРМИРОВКА ВФ * * * * *
FOR I1=0 TO N: V(I1)=U(I1)*U(I1): NEXT I1
CALL SIM(V(),H,N,HN): HN1=1/SQR(HN): FOR I1=0 TO N
U(I1)=U(I1)*HN1: NEXT I1
REM * * * АСИМПТОТИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ * * *
SS=SQR(ABS(SKS)): SQQ=SQR(2*SS): GGG=GK/SS
IF ASSIMP=0 GOTO 9191: PRINT " R C0 CW0 CW"
FOR I=N/4 TO N STEP N/10: R=I*H
CALL WW(SKS,L,GK,R,WWW,V())
CW=U(I)/WWW/SQQ: C0=U(I)/EXP(-SS*R)/SQQ
CW0=C0*(2*R*SS)^GGG
PRINT USING " +#.#####^" ;R,C0,CW0,CW: NEXT I
9191 IF WFUN=0 GOTO 2233: PRINT: PRINT " R U"
PRINT: FOR I1=0 TO N STEP 40: X=H*I1
PRINT USING " +#.#####^" ;X,U(I1): NEXT I1
2233 REM * * * * * РАДИУС * * * * *
IF RAD=0 GOTO 7733: FOR I1=0 TO N: X=I1*H:
V(I1)=X^2*U(I1)^2
NEXT I1: CALL SIM(V(),H,N,RKV): AM=AM1+AM2
RK=AM1 / AM * RK1 ^ 2 + AM2 / AM * RK2 ^ 2 + AM1 * AM2 /
AM ^ 2 * RKV
RZ=Z1 / Z * RK1 ^ 2 + Z2 / Z * RK2 ^ 2 + (Z1 * AM2 ^ 2 + Z2 * AM1
^ 2) / AM ^ 2 / Z * RKV
PRINT: PRINT " (RM^2)^1/2= " ;: PRINT USING " #####^"
";SQR(RK);
PRINT " (RZ^2)^1/2= " ;: PRINT USING " #####^" ;SQR(RZ)
7733 PRINT
REM * * * * * ИМПУЛЬСНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ * * * * *
IF IMPULS=0 GOTO 8822: PRINT " Q P^2/P0^2
SQR(P^2/P0^2)"
PRINT: FOR IL=0 TO NP: Q=HP*IL+.000001: FOR I1=1 TO N
X=I1*H: V(I1)=(SIN(Q*X))*U(I1)/Q: NEXT I1
CALL SIM(V(),H,N,S): IF Q>0.01 GOTO 963: QQ=S^2
963 AIMP=S^2/QQ: PRINT USING " +#.#####^" ";Q;
AIMP;SQR(AIMP)
NEXT IL
8822 REM * * * * * ФОРМФАКТОР * * * * *
IF FORM=0 GOTO 6655: PRINT
PRINT " QK FC0K Q FC0"
FOR I1=0 TO NFOR: QK(I1)=QH*I1+QN: Q=SQR(QK(I1))
G1=AM1*Q/AM: G2=AM2*Q/AM
FK1=(1 - (FS11*QK(I1))^6)*EXP(-FS12*QK(I1))
FK2 = ABS(EXP(-FS21*QK(I1)) + FS22*QK(I1)*EXP(-

```

```

FS23*QK(II))
REM *****
FOR K=1 TO N: R=H*K: RQ1=R*G1: V(K)=U(K)^2*SIN(RQ1)/RQ1
NEXT K: CALL SIM(V(),H,N,SIM): AI1=SIM: F2=Z2*FK2*AI1
REM *****
FOR K=1 TO N: R=H*K: RQ2=R*G2: V(K)=U(K)^2*SIN(RQ2)/RQ2
NEXT K: CALL SIM(V(),H,N,SIM): AI2=SIM: F1=Z1*FK1*AI2
REM *****
FOR1(II)=(F1+F2)/(Z1+Z2): FKB(II)=FOR1(II)^2
IF QK(II)>0.01 GOTO 123: RA=6*(1-FOR1(II))/QK(II)
RA=(SQR(RA)): PRINT "          RF=";
PRINT USING "#.####^^^";RA: PRINT
123 PRINT USING " +#.####^^^"; QK(II); FKB(II); Q: FOR1(II)
NEXT II: PRINT " КОНЕЦ ПРОГРАММЫ": END
SUB MIN(EP, B1, PM, SKN, SKV, HC, H, N3, L, A22, R0, AK1, RCU, GK, E, SKS)
REM ***** ПОИСК ЭНЕРГИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ *****
SHARED A33,R1
DK=SKN: CALL
DET(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD,A33,R1)
D12=DD: B2=A2+HC
51 DK=B2: CALL
DET(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD,A33,R1)
D11=DD: IF D12*D11>0 GOTO 4
3 A3=A2: B3=B2
11 C3=(A3+B3)/2: IF (ABS(A3 - B3))<1D - 15 GOTO 151: DK=C3
CALL DET(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD,A33,R1)
F2=DD: IF D12*F2>0 GOTO 14: B3=C3: D11=F2: GOTO 155
14 A3=C3: D12=F2
155 IF ABS(F2)>EP GOTO 11
151 CO=C3: GOTO 7
4 REM IF ABS(D11*D12)<1D - 15 GOTO 3: A2=A2+HC
B2=B2+HC: D12=D11: IF B2 - SKV<0.1 GOTO 51
7 E=CO/B1: SKS=CO: END SUB
SUB DET(DK,GK,N,A2,R0,L,AK,RCU,H,DD,A3,R1)
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА *****
HK=H^2: S1=SQR(ABS(DK)): G2=GK/S1: D1=0: D=1
FOR II=1 TO N: X=II*H: A=A2*EXP( - X*X*R0)+A3*EXP( -
X*X*R1)
F=A+L*(L+1)/(X*X): IF X>RCU GOTO 67
F=F+AK/(2*RCU)*(3 - (X/RCU)^2): GOTO 66
67 F=F+AK/X
66 IF II=N GOTO 111: D2=D1: D1=D: OM=DK*HK - F*HK - 2
D=OM*D1 - D2: NEXT II

```



```

111 Z=2*X*S1: OM=DK*HK - F*HK - 2
W= - S1 - 2*S1*G2/Z - 2*S1*(L - G2)/(Z*Z)
OM=OM+2*H*W: DD=OM*D - 2*D1: END SUB
SUB WW(SK,L,GK,R,WH,V(4000))
REM ***** ФУНКЦИЯ УИТТЕКЕРА *****
SS=SQR(ABS(SK)): AA=GK/SS: BB=L: NN=2000: HH=0.01
ZZ=1+AA+BB: AAA=1/ZZ: NNN=30000: FOR I2=1 TO NNN
AAA=AAA*I2/(ZZ+I2): NEXT I2: GAM=AAA*NNN^ZZ
RR=R: CC=2*RR*SS: FOR I=0 TO NN: TT=HH*I
V(I)=TT^(AA+BB)*(1+TT/CC)^(BB - AA)*EXP(- TT): NEXT I
CALL SIM(V),HH,NN,SIM): WH=SIM*EXP(
CC/2)/(CC^AA*GAM)
END SUB
SUB FUN(U(4000),H,N,A2,R0,A3,R1,L,RCU,AK,SK)
REM ***** ПОИСК ФУНКЦИИ *****
U(0)=0: U(1)=0.001: HK=H*N: FOR K=1 TO N - 1: X=K*H
Q1=A2 * EXP(-R0 * X * X) + A3 * EXP(- R1 * X * X) + L * (L + 1)
/ (X * X)
IF X>RCU GOTO 1571
Q1=Q1+(3 - (X/RCU)^2)*AK/(2*RCU)
GOTO 1581
1571 Q1=Q1+AK/X
1581 Q2= - Q1*HK - 2*SK*HK: U(K+1)= - Q2*U(K) - U(K - 1)
NEXT K: END SUB
SUB SIM(V(4000),H,N,SIM)
REM ***** ИНТЕГРАЛ ПО СИМПСОНУ *****
A=0: B=0: FOR II=1 TO N - 1 STEP 2: B=B+V(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO N - 2 STEP 2: A=A+V(JJ): NEXT JJ
SIM=H*(V(0)+V(N)+2*A+4*B)/3: END SUB

```

Для контроля работы программы рассмотрим известный центральный нуклон – нуклонный потенциал простого гауссова типа

$$V(r) = -V_0 \exp(-kr^2)$$

с параметрами $V_0 = 46.8$ МэВ, $k = 0.2669$ Фм⁻². Известно [128], что он приводит к энергии связи дейтрона, равной -2.222 МэВ. Выполним теперь расчеты такой энергии по нашей программе конечно – разностным методом с разным числом шагов N и разной величиной шага H. Величина $R = NH$, показывает до какого расстояния вычисляется волновая функция, т.е. это расстояние считается уже асимптотикой, где ядерный потенциал практически равен нулю. Результаты контрольных расчетов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Сходимость конечно – разностного метода при вычислении дискретного собственного значения, т.е. энергии связи дейтрона.

N	H, Фм	R, Фм.	E, Мэв
200	0.1	20	-2.2264
200	0.05	10	-2.2230
500	0.01	5	-2.2203
500	0.02	10	-2.2220
1000	0.01	10	-2.2219
1000	0.02	20	-2.2220

Видно, что уже при 500 шагов и величине шага 0.02 Фм. наш результат с точностью до третьего знака после запятой совпадает с известным результатом для этого потенциала.

4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА В ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ТЕНЗОРНОЙ КОМПОНЕНТОЙ

В этой главе мы рассмотрим математические методы решения связанной системы уравнений Шредингера для дискретного спектра собственных значений, которые имеют отрицательные величины. Эта задача предназначена для рассмотрения связанных состояний ядерных частиц для потенциалов их взаимодействия с центральными и тензорными силами.

Для решения такой задачи предложена комбинация численных и вариационных методов для нахождения отрицательных собственных значений, т.е. энергий связи, которая позволяет определять их с большой точностью, контролируемой на основе метода невязок.

4.1 Общие методы решение уравнения Шредингера

Для расчетов энергии и волновых функций связанных состояний ядерной системы с тензорными потенциалами использовался такой же метод, как в работах [59,60,90]. Исходим из обычных уравнений Шредингера для тензорных потенциалов

$$u''(r) + [k^2 - V_c(r) - V_{cul}(r)]u(r) = \sqrt{8} V_t(r)w(r) , \quad (4.1)$$

$$w''(r) + [k^2 - V_c(r) - 6/r^2 - V_{cul}(r) + 2 V_t(r)]w(r) = \sqrt{8} V_t(r)u(r) .$$

Решением этой системы являются четыре волновые функции, получающиеся с начальными условиями типа (3.2), которые образуют линейно независимые комбинации, представляемые в виде (для S и D орбитальных состояний)

$$\chi_0 = C_1 u_1 + C_2 u_2 = \exp(-kr) , \quad (4.2)$$

$$\chi_2 = C_1 w_1 + C_2 w_2 = [1 + 3/kr + 3/(kr)^2] \exp(-kr) ,$$

или с учетом кулоновских сил

$$\chi_0 = C_1 u_1 + C_2 u_2 = W_{\eta,0}(2kr) , \quad (4.3)$$

$$\chi_2 = C_1 w_1 + C_2 w_2 = W_{\eta,2}(2kr) ,$$

где k - волновое число, определяемое энергией связи ядра в

рассматриваемом канале, η - кулоновский параметр и χ - функция Уиттекера.

Волновые функции связанных состояний нормированы на единицу следующим образом

$$\int [\chi_0^2 + \chi_2^2] dr = 1 \quad ,$$

а интеграл от квадрата волновой функции D состояния определяет ее вес, обычно выражаемый в процентах.

Орбитальные состояния системы при наличии тензорных потенциалов смешиваются, так что сохраняется только полный момент, который определяется векторной суммой орбитального и спинового моментов [57]

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$$

Откуда для орбитального момента можно получить выражение

$$|J - S| \leq L \leq |J + S|$$

В частности для дейтрона, полный момент равен единице, спин также единица, а орбитальный момент может принимать значения 0 и 2.

4.2 Физические результаты для связанных состояний

Изложенный метод можно использовать для рассмотрения кластерной системы ${}^4\text{He}^2\text{H}$, когда в потенциале взаимодействия присутствует тензорная компонента, например, гауссова вида [129]

$$\begin{aligned} V(r) &= V_c(r) + V_t(r) S_{12} \quad , & S_{12} &= [6(Sn)^2 - 2S^2] \quad , \\ V_c(r) &= -V_0 \exp(-\alpha r^2) \quad , & V_t(r) &= -V_1 \exp(-\beta r^2) \quad . \end{aligned}$$

Здесь S - полный спин системы, n - единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором межкластерного расстояния, S_{12} - тензорный оператор.

Под тензорным потенциалом, в рассматриваемой системе, следует понимать взаимодействие, оператор которого зависит от взаимной ориентации полного спина системы и межкластерного расстояния. Математическая форма записи такого оператора полностью совпадает с оператором двухнуклонной задачи, поэтому и потенциал, по аналогии, будем называть тензорным [22,130,131].

В проведенных расчетах, квадрупольный момент ${}^6\text{Li}$ в ${}^4\text{He}^2\text{H}$ кластерной модели, вычислялся с учетом момента дейтрона Q_d следующим образом [13-19,22]

$$Q = Q_d + Q_0 \quad ,$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} C_{\alpha d} \sum_{LL'} I_{LL'} R_{LL'} \quad , \quad (4.4)$$

где

$$C_{\alpha d} = \frac{Z_\alpha M_d^2 + Z_d M_\alpha^2}{M^2} \quad ,$$

$$R_{LL'} = \langle \chi_L | r^2 | \chi_{L'} \rangle \quad , \quad \Phi_L = \chi_L / r \quad ,$$

$$I_{LL'} = (-1)^{J+L+S} \sqrt{\frac{5(2L+1)(2J+1)}{4\pi}} (L020|L'0)(JJ20|JJ) \left\{ \begin{matrix} L & S & J \\ J & 2 & L' \end{matrix} \right\} \quad .$$

Здесь χ_L - радиальные ВФ СС, L и L' - могут принимать значения 0 и 2, Z и M - заряды и массы кластеров и ядра.

В конечном итоге для величины Q_0 получаем [13-19,22]

$$Q_0 = \frac{4\sqrt{2}}{15} \int r^2 (\chi_0 \chi_2 - \frac{1}{\sqrt{8}} \chi_2^2) dr \quad . \quad (4.5)$$

Импульсное распределение кластеров, нормированное на единицу при переданном импульсе $q = 0$, определялось в виде [13-19,22]

$$P^2 = \sum_L P_L^2(q) \quad , \quad P_L(q) = \int \chi_L j_L(qr) dr \quad . \quad (4.6)$$

Здесь q - переданный импульс, j_L - сферическая функция Бесселя, $L = 0, 2$.

Магнитный момент ядра в двухкластерной системе в случае, когда только один из кластеров имеет магнитный момент μ_d и спин 1 может быть представлен [13-19,22]

$$\mu = \mu_d J + \frac{1}{2(j+1)} (B_{\alpha d} - \mu_d) (\hat{J} + \hat{L} - \hat{S}) P_D \quad , \quad \hat{A} = A(A+1) \quad ,$$

где P_D - величина примеси D состояния, $L=2$ и

$$B_{\alpha d} = \frac{1}{M} \left(\frac{Z_{\alpha} M_d}{M_{\alpha}} + \frac{Z_d M_{\alpha}}{M_d} \right) .$$

Магнитный момент дейтрона равен $0.857\mu_0$, а ядра ${}^6\text{Li}$ несколько меньше $0.822\mu_0$. Поэтому для получения, в рассматриваемой модели, правильного момента ядра необходимо допустить примерно 6.5% примеси D состояния.

При расчетах кулоновских формфакторов использовалось выражение [13-19]

$$F^2 = \frac{1}{Z^2} \sum_J V_J^2 , \quad V_J = Z_1 F_1 I_{2,J} + Z_2 F_2 I_{1,J} ,$$

где интегралы от радиальных функций СС представляются в виде

$$I_{k,0} = \int (\chi_0^2 + \chi_2^2) j_0(g_k r) dr , \quad I_{k,2} = 2 \int \chi_2 (\chi_0 - \frac{1}{\sqrt{8}} \chi_2) j_2(g_k r) dr . \quad (4.7)$$

Здесь $k = 1$ или 2 и обозначает ${}^2\text{H}$ или ${}^4\text{He}$, $g_k = (M_k/M)q$, J - мультипольность формфактора, равная 0 или 2 , j_J - сферическая функция Бесселя, q - переданный импульс.

Для вычисления асимптотических констант C_L^0 , C_L^{W0} и C_L^W использовались известные выражения [107,114]

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \frac{\sqrt{2k}}{r} C_L^0 A_L \exp(-kr) , \quad A_0 = 1 , \quad A_2 = [1 + 3/kr + 3/(kr)^2] , \\ \Phi_L &= \frac{\sqrt{2k}}{r} C_L^{W0} A_L W_{-\gamma, l+1/2}^0(2kr) , \\ \Phi_L &= \frac{\sqrt{2k}}{r} C_L^W W_{-\gamma, l+1/2}^W(2kr) , \end{aligned} \quad (4.8)$$

где k - волновое число, определяемое энергией связи ядра в рассматриваемом канале, η - кулоновский параметр, $W_{-\gamma, l+1/2}^W(2kr)$ - функция Уиттекера и

$$W_{-\gamma, l+1/2}^0(2kr) = (2kr)^{-\gamma} \exp(-kr) \quad (4.9)$$

- ее асимптотика. Для нуклон - нуклонной системы рассматривается и отношение

$$\eta = C_{2/C_0}^W .$$

Радиус ядра вычислялся двумя способами. В кластерной модели его можно представить в виде [13-19]

$$R_r^2 = \frac{M_d}{M} R_d^2 + \frac{M_\alpha}{M} R_\alpha^2 + \frac{M_d M_\alpha}{M^2} R_{\alpha d}^2 , \quad (4.10)$$

$$R_{\alpha d}^2 = \int r^2 (\chi_0^2 + \chi_2^2) dr .$$

А из кулоновского формфактора он определяется следующим образом

$$R_f^2 = 6 \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{1 - F_{C0}(q)}{q^2} \right) .$$

Для радиусов кластеров использовались значения $R_\alpha=1.67$ Фм, $R_d=1.96$ Фм.

В случае нуклон - нуклонной задачи с тензорными силами несколько меняются формулы для формфакторов, которые принимают следующий вид [132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma_M}{d\Omega} \right) \left[A + B \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] ,$$

$$A = G_0^2 + G_2^2 + \frac{2}{3} \eta (1 + \eta) G_M^2 ,$$

$$B = \frac{4}{3} \eta (1 + \eta)^2 G_M^2 ,$$

$$G_0 = 2G_E C_E ,$$

$$G_2 = 2G_E C_Q ,$$

$$G_M = \frac{M_d}{M_p} (2G_{M0} C_S + G_E C_L) ,$$

$$\eta = \frac{(\hbar c q)^2}{4M_d^2} = 0.002767q^2 ,$$

$$2G_E = G_{E_p} + G_{E_n}, \quad 2G_{M0} = G_{M_p} + G_{M_n} ,$$

$$C_E = \int (u^2 + w^2) j_0(x) dr ,$$

$$C_Q = 2 \int w \left(u - \frac{w}{\sqrt{8}} \right) j_2(x) dr ,$$

$$C_L = \frac{3}{2} \int w^2 (j_0(x) + j_2(x)) dr ,$$

$$x = \frac{qr}{2} ,$$

$$C_S = \int \left(u^2 - \frac{w^2}{2} \right) j_0(x) dr + \frac{1}{\sqrt{2}} \int w \left(u + \frac{w}{\sqrt{2}} \right) j_2(x) dr .$$

Здесь $u(r)$ и $w(r)$ - волновые функции связанного состояния для орбитальных моментов 0 и 2, а j_i - функции Бесселя i -го порядка.

Для масс нуклонов использовались значения $M_p=938.28$ МэВ и $M_n=939.57$ МэВ [147], масса дейтрона принималась равной 1875.63 МэВ. Зарядовый формфактор нейтрона считался равным нулю, а в качестве зарядового формфактора протона использовалась параметризация [147]

$$G_{E_p} = \frac{1}{(1 + 0.054844q^2)^2} .$$

Здесь переданный импульс q измеряется в Фм^{-1} . Магнитные формфакторы нуклонов находились на основе “масштабного закона” [147]

$$G_{M_p} = \mu_p G_{E_p}, \quad G_{M_n} = \mu_n G_{E_p} ,$$

а в качестве магнитных моментов нуклонов использовались следующие величины

$$\mu_p = 2.7928 \mu_0, \quad \mu_n = -1.9131 \mu_0 .$$

4.3 Численные методы решения системы уравнений Шредингера

Для нахождения энергий и ВФ связанных состояний системы

с тензорным потенциалом использовалась комбинация численных и вариационных методов.

При некоторой заданной энергии связанного состояния (которая не является собственным значением задачи) численным методом находилась ВФ системы (4.37). Для этого использовался обычный метод Рунге - Кутта, описанный выше. Затем система уравнений представлялась в конечно - разностном виде [59]

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} + h^2 [k^2 - V_c - V_{cul}]u_i = h^2 \sqrt{8} V_t w_i , \quad (4.11)$$

$$w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} + h^2 [k^2 - V_c - 6/r^2 - V_{cul} + 2 V_t]w_i = h^2 \sqrt{8} V_t u_i$$

или

$$u_{i+1} + h^2 [-2/h^2 + k^2 - V_c - V_{cul}]u_i + u_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t w_i = 0$$

$$w_{i+1} + h^2 [-2/h^2 + k^2 - V_c - 6/r^2 - V_{cul} + 2V_t]w_i + w_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t u_i = 0$$

и полученная численная ВФ подставлялась в эту систему уравнений. Левая часть этих уравнений будет равна нулю только в случае, когда энергия и ВФ являются собственными решениями такой задачи. При произвольной энергии и найденной по ней ВФ левая часть будет отлична от нуля, и можно говорить о методе невязок [148], который позволяет оценить степень точности нахождения собственных функций и собственных значений.

Из уравнений

$$N_{si} = u_{i+1} + h^2 [-2/h^2 + k^2 - V_c - V_{cul}]u_i + u_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t w_i , \quad (4.12)$$

$$N_{ti} = w_{i+1} + h^2 [-2/h^2 + k^2 - V_c - 6/r^2 - V_{cul} + 2V_t]w_i + w_{i-1} - h^2 \sqrt{8} V_t u_i$$

вычислялась сумма невязок в каждой точке численной схемы

$$N_s = \sum_i N_{si} , \quad N_t = \sum_i N_{ti} .$$

Варьируя энергию связи (или k^2), проводилась минимизация значений всех невязок

$$\delta [N_s(k^2) / N_t(k^2)] = 0 . \quad (4.13)$$

Энергия, дающая минимум невязок, считалась собственной

энергией k_0^2 , а функции u и w , приводящие к этому минимуму - собственными функциями задачи, т.е. ВФ связанного состояния системы.

Этот метод прекрасно показал свою работоспособность, как для контрольных задач, в качестве которых выбиралась нуклон – нуклонная система с классическим потенциалом Рейда, так для реальных расчетов физических характеристик связанных состояний кластеров в атомных ядрах [2].

4.4 Численная программа решения уравнения Шредингера

Программа для вычисления ядерных характеристик дейтрона и связанных состояний в ${}^4\text{He}^2\text{H}$ системе, приведенная ниже, написана на алгоритмическом языке “Basic” и использовалась для расчетов в среде компилятора “Turbo Basic” фирмы “Borland International Inc.” [149].

Описание параметров программы

НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ - задание входных начальных условий необходимых для решения системы уравнений и физических параметров:

AM1=2 - масса первой частицы,

AM2=4 - масса второй частицы,

Z1=1 - заряд первой частицы,

Z2=2 - заряд второй частицы,

AM=AM1+AM2 - сумма масс,

PM=AM1*AM2/AM - приведенная масса μ ,

A1=41.4686/(2*PM) - константа \hbar^2/μ ,

AKK=1.439975*Z1*Z2 - константа для кулоновского потенциа-

ла,

GK=0.0344476*Z1*Z2*PM - кулоновский параметр,

AKK=AKK/A1 - константа $\hbar^2/2m_N$, определяемая через массу нуклона,

PI=3.14159265 - число π ,

A5=SQR(8) - константа $\sqrt{8}$,

VC0= - 72.266 - глубина центральной части потенциала в МэВ,

RNC=0.2 - параметр ширины центральной части потенциала в Фм^2 (Ферми),

VT0= - 27 - глубина тензорной части потенциала в МэВ,

RNT=1.12 - параметр ширины тензорной части потенциала в Фм^2 ,

EP5=1D - 7 - абсолютная точность вычисления энергии,

RH5= - 1D - 5 - шаг по энергии, с которым ведется поиск энер-

гии связи,

AL0= - 1.4735 - начальное значение энергии в МэВ с которого начинаются вычисления,

MIN=1E30 - условное число для поиска минимума невязок,

MINE=MIN - условное число для поиска энергии,

N=1000 - начальное число шагов для интегрирования системы уравнений,

H0=0.02 - начальный шаг интегрирования системы в Фм.

Описание блоков основной программы

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ - блок решения исходных уравнений. Происходит обращение к подпрограмме RRUN, которая решает систему уравнений Шредингера с тензорными потенциалами методом Рунге - Кутта, как описано выше в тексте второй главы.

НОРМИРОВКА ФУНКЦИИ - проводится нормировка найденной функции на, приведенные в тексте второй главы, граничные условия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСА D ВОЛНЫ - вычисляются веса функций с орбитальным моментом 0 и 2, как описано в тексте второй главы.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА - определяется радиус кластерной системы на основе приведенных в тексте второй главы формул.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРУПОЛЬНОГО МОМЕНТА - вычисляется квадрупольный момент системы ядерных кластеров по формулам второй главы.

ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОНСТАНТЫ - находятся три асимптотические константы, определяющие поведение волновых функций на больших расстояниях.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ - вычисляются импульсные распределения кластеров в ядре, как описано в тексте второй главы.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗАРЯДОВОГО ФОРМФАКТОРА - вычисление зарядового кулоновского упругого формфактора ядра на основе кластерной модели.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА И КВАДРУПОЛЬНОГО МОМЕНТА ИЗ ФОРМФАКТОРА - поиск зарядового радиуса и квадрупольного момента из найденных кулоновских формфакторов.

Описание подпрограмм для основной программы

ПОДПРОГРАММА ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ - КУТТА - подпрограмма интегрирования исходных уравнений методом Рунге - Кутта с автоматическим выбором шага (этот блок приведен в основной программе) по

заданной точности для энергии связи.

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА В ПЕРВОМ УРАВНЕНИИ - вычисление потенциалов в первом уравнении для использования в подпрограмме RRUN.

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ВО ВТОРОМ УРАВНЕНИИ - вычисление потенциалов во втором уравнении для использования в подпрограмме RRUN.

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕВЯЗОК - подпрограмма вычисления невязок в исходной систем уравнений, как описано в тексте второй главы.

ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ УИТТЕКЕРА - вычисление функций Уиттекера на основе интегрального представления [73].

ПОДПРОГРАММА ИНТЕГРИРОВАНИЯ - вычисление интегралов методом Симпсона.

Текст компьютерной программы

Ниже приведена распечатка программы расчета энергий и других ядерных характеристик для связанных состояний в кластер - кластерной и нуклон - нуклонной системе для потенциалов с тензорной компонентой.

РЕМ ПРОГРАММА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СВЯЗАННОГО ДВУХЧАСТИЧНОГО СОСТОЯНИЯ С ТЕНЗОРНЫМИ СИЛАМИ

```
DEFDBL A - Z: DEFINT K,J,L,I,N,M: NN=4000
DIM V1(NN), W1(NN), V(NN), W(NN), FE(50), FC(50), FQ(50),
FCK(50), QK(50), Q(50)
FW$="C:\ WAVE.DAT": F$="C:\ FORM.DAT"
P$="C:\ IMPUL.DAT": A$="          E          DELA          DELB
EPS"
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ *****
AM1=2: AM2=4: Z1=1: Z2=2: AM=AM1+AM2: PM=AM1*AM2/AM
A1=41.4686/(2*PM): AKK=1.439975*Z1*Z2:
GK=0.0344476*Z1*Z2*PM
AKK=AKK/A1: PI=3.14159265: A5=SQR(8): VC0= - 71.979:
RNC=0.2
VT0= - 27: RNT=1.12: EP5=1D - 7: PH5= - 1D - 5: AL0= - 1.4735
MIN=1E30: MINE=MIN: AL00=AL0*PH5: YSCH=0: KK=2: N=1000
H0=0.02: N0=KK*N: H00=H0/KK: H=H00: N1=N0: HK=H^2
REM ***** РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ *****
60 AL0=AL0+AL00: SK=AL0/A1: S=SQR(ABS(SK)): SSV=S:
SQ=SSV
```

```

PRINT " E= "; AL0;
5 VA1=0: WA1=0: PA1=1E - 01: QA1=0: VA2=0: WA2=0: PA2=0
QA2=1E - 01: KKK=1: FOR J=0 TO N1: IF J>0 GOTO 3: X0=1D - 07:
GOTO 4
3 X0=0
4 X=H*(J)+X0
CALL RRUN(VB1, WB1, VB2, WB2, PB1, QB1, PB2, QB2, VA1,
WA1, VA2, WA2, PA1, QA1, PA2, QA2)
VA1=VB1: WA1=WB1: VA2=VB2: WA2=WB2: PA1=PB1:
QA1=QB1
PA2=PB2: QA2=QB2: IF H0*KKK<>H*J GOTO 777: V(KKK)=VA2
W(KKK)=WA2: V1(KKK)=VA1: W1(KKK)=WA1: KKK=KKK+1
777 NEXT J: H=0.5*H: N1=2*N1: IF N1=<N0 GOTO 5
REM ***** НОРМИРОВКА ФУНКЦИИ *****
HF=H0: NF=N: X=H0*(NF): AA=EXP( - SSV*X)
BB=AA*(1+3/SSV/X+3/SSV^2/X^2)
C2=(BB - AA*W1(NF) / V1(NF)) / (W(NF) - V(NF) * W1(NF) /
V1(NF))
C1=(AA - C2*V(NF))/V1(NF): FOR I=0 TO NF: X=H0*(I)
V(I)=C1*V1(I)+C2*V(I): W(I)=C1*W1(I)+C2*W(I): W1(I)=0: NEXT
I
FOR I=0 TO NF: V1(I)=W(I)^2+V(I)^2: NEXT I
CALL SIMP(V1(),NF,HF,VV): NOR=1/SQR(VV): FOR I=0 TO NF
X=HF*I: V(I)=V(I)*NOR: W(I)=W(I)*NOR
REM PRINT USING " +#.###^ ^ ^ ^ ";X;V(I);W(I): NEXT I
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕВЯЗОК *****
GOSUB 1000
REM *****
H=H00: N1=N0: F00=ABS(SS)+ABS(SD): IF F00=<MIN GOTO 61
YSCH=YSCH+1: AL0=AL0 - AL00: AL00= - AL00/2: GOTO 60
61 MIN=F00: AL0M=AL0: IF ABS(AL0 - MINE)<ABS(EP5) GOTO
71
MINE=AL0: GOTO 60
71 PRINT "E = ";: PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";AL0M;
PRINT USING " +#.###^ ^ ^ ^ ";MIN
REM ***** ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСА D ВОЛНЫ *****
NF=N: FOR I=0 TO NF: V1(I)=W(I)^2+V(I)^2: NEXT I
CALL SIMP(V1(),NF,HF,VV): NOR=1/SQR(VV): FOR I=0 TO NF
X=HF*I: V(I)=V(I)*NOR: W(I)=W(I)*NOR: NEXT I: FOR I=0 TO NF
V1(I)=V(I)^2: NEXT I: CALL SIMP(V1(),NF,HF,UU): FOR I=0 TO
NF
V1(I)=W(I)^2: NEXT I: CALL SIMP(V1(),NF,HF,WW)
PRINT "VAWE D = ";WW*100;" VAWE S = ";UU*100
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА *****

```

```

FOR I=0 TO NF: X=HF*I: V1(I)=X^2*(V(I)^2+W(I)^2): NEXT I
CALL SIMP(V1(),NF,HF,RR): PRINT " R = ";
RCH=2/6*(1.96)^2+4/6*(1.67)^2+8*RR/36: RCH=SQR(RCH)
PRINT USING " +#.#####^" ;RCH
REM ***** КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ *****
FOR I=0 TO NF: X=HF*I: V1(I)=X^2*(V(I)*W(I) - W(I)^2/SQR(8))
NEXT I
CALL SIMP(V1(),NF,HF,RR): QQQ=4*SQR(2)*RR/15
PRINT " Q = " ; PRINT USING " +#.#####^" ;QQQ
REM ***** АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КОНСТАНТА *****
PRINT " R C0 ETA0 CW ETA - W" ; MM=NF/4: MMM=NF/10:
KK=0
FOR IJ=MM TO NF STEP MMM: KK=KK+1: X=HF*IJ
AA=SQR(2*SQ)*EXP(-SQ*X): C0=V(IJ)/AA
BB=AA*(1+3/X/SQ+3/X^2/SQ^2)
C2=W(IJ)/BB: L=0: CALL WH(X,L,SK,GK,WH0)
AA=SQR(2*SQ)*WH0
CW0=V(IJ)/AA: L=2: CALL WH(X,L,SK,GK,WH2)
BB=SQR(2*SQ)*WH2
CW2=W(IJ)/BB: PRINT USING " +#.##^" ;X;
PRINT USING " +#.#####^" ;C0;C2/C0;CW0;CW2/CW0: NEXT IJ
WFSAVE=0: IF WFSAVE=0 GOTO 4443: OPEN "O",1, FW$
FOR I=0 TO N: X=I*H0: PRINT#1, USING " +#.###^" ;
X;V(I);W(I)
NEXT I: CLOSE
4443 REM ***** ИМПУЛЬСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ *****
IMPULS=0: IF IMPULS=0 GOTO 4444
PRINT " Q P1^2/P10^2 P2^2/P20^2
(P1^2+P2^2)/P20^2"
HP=0.1: NP=20: FOR IL=0 TO NP: Q=HP*IL+1D - 05: V1(0)=0
FOR I1=1 TO NF: X=I1*HF: V1(I1)=SIN(Q*X)*V(I1)/Q: NEXT I1
CALL SIMP(V1(),NF,HF,S): FE(IL)=S^2: FOR I1=1 TO NF: X=I1*HF
XX=X*Q: J2=(3/XX^3 - 1/XX)*SIN(XX) - 3/XX^2*COS(XX)
V1(I1)=X*J2*W(I1): NEXT I1
CALL SIMP(V1(),NF,HF,S): FC(IL)=S^2: IF Q>0.01 GOTO 9632
QQ2=FE(IL)+FC(IL)
9632 FQ(IL)=(FE(IL)+FC(IL))/QQ2: FC(IL)=FC(IL)/QQ2
FE(IL)=FE(IL)/QQ2
PRINT USING " +#.###^" ;Q;FE(IL);FC(IL);FQ(IL): NEXT IL
IMPSAVE=0: IF IMPSAVE=0 GOTO 4444: OPEN "O",1,P$
FOR I=0 TO NP: Q=I*HP
PRINT#1, USING " +#.###^" ;Q;FE(I);FC(I);FQ(I): NEXT I
4444 REM ***** ФОРМФАКТОР *****
FORM=0: IF FORM=0 GOTO 5151

```

```

PRINT " Q FC0^2 FC2^2 FC0^2+FC2^2"
HQ=.5: NFOR=50: NQ=.001: FOR II=0 TO NFOR:
QK(II)=HQ*II+NQ
Q(II)=SQR(QK(II)): G1=AM1*Q(II)/AM: G2=AM2*Q(II)/AM
FK1=ABS(EXP(-0.49029*QK(II))+0.01615*QK(II)*EXP(-0.16075*
QK(II)))
FK2=ABS(1-(0.09986*QK(II))^6)*EXP(-0.46376*QK(II))
FOR K=1 TO NF: R=HF*K: XX=R*G1
V1(K)=(V(K)^2+W(K)^2)*SIN(XX)/XX
J2=(3/XX^3 - 1/XX)*SIN(XX) - 3/XX^2*COS(XX)
W1(K)=J2*(W(K)*(V(K) - W(K)/SQR(8))): NEXT K
CALL SIMP(V1(),NF,HF,SIM): F2=Z2*FK2*SIM
CALL SIMP(W1(),NF,HF,SIM): F22=2*Z2*FK2*SIM: V1(0)=0:
W1(0)=0
FOR K=1 TO NF: R=HF*K: XX=R*G2
V1(K)=(V(K)^2+W(K)^2)*SIN(XX)/XX
J2=(3/XX^3 - 1/XX)*SIN(XX) - 3/XX^2*COS(XX)
W1(K)=J2*(W(K)*(V(K) - W(K)/SQR(8))): NEXT K
CALL SIMP(V1(),NF,HF,SIM): F1=Z1*FK1*SIM
CALL SIMP(W1(),NF,HF,SIM)
F11=2*Z1*FK1*SIM: FC(II)=(F1+F2)/(Z1+Z2): FCK(II)=FC(II)^2
FE(II)=(F11+F22)/(Z1+Z2): FQ(II)=FE(II)^2
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА И КВАДРУПОЛЬНОГО
МОМЕНТА ИЗ ФОРМФАКТОРА *****
IF QK(II) - 0.1>0 GOTO 123: RA=6*(1 - FC(II))/QK(II):
RA=(SQR(RA))
QF=9*SQR(2)*FE(II)/QK(II): PRINT " RF QF";
PRINT USING "#.###^####";RA;QF
123 PRINT USING " +#.###^####"; Q(II); FCK(II); FQ(II);
FCK(II)+FQ(II)
NEXT II: FORSAVE=0: IF FORSAVE=0 GOTO 5151
OPEN "O",1,F$: FOR I=0 TO NFOR
PRINT#1, USING "#.###^#### "; Q(I); FCK(I); FQ(I); FCK(I)+FQ(I)
NEXT I: CLOSE
5151 STOP
SUB RRUN(VB1, WB1, VB2, WB2, PB1, QB1, PB2, QB2, VA1,
WA1, VA2, WA2, PA1, QA1, PA2, QA2)
REM ПОДПРОГРАММА ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ
УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РУНГЕ - КУТТА
SHARED H,X
X0=X: CALL F(X0,VA1,WA1,FK1): CALL F(X0,VA2,WA2,SK1)
CALL GG(X0,VA1,WA1,FM1): CALL GG(X0,VA2,WA2,SM1)
FK1=FK1*H: SK1=SK1*H: FM1=FM1*H: SM1=SM1*H:
X0=X0+H/2

```

```

V1=VA1+PA1*H/2: W1=WA1+QA1*H/2: V2=VA2+PA2*H/2
W2=WA2+QA2*H/2: CALL F(X0,V1,W1,FK2): CALL
F(X0,V2,W2,SK2)
CALL GG(X0,V1,W1,FM2): CALL GG(X0,V2,W2,SM2)
FK2=FK2*H: SK2=SK2*H: FM2=FM2*H: SM2=SM2*H
V1=VA1+PA1*H/2+FK1*H/4: W1=WA1+QA1*H/2+FM1*H/4
V2=VA2+PA2*H/2+SK1*H/4: W2=WA2+QA2*H/2+SM1*H/4
CALL F(X0,V1,W1,FK3): CALL F(X0,V2,W2,SK3)
CALL GG(X0,V1,W1,FM3): CALL GG(X0,V2,W2,SM3)
FK3=FK3*H: SK3=SK3*H: FM3=FM3*H: SM3=SM3*H:
X0=X0+H/2
V1=VA1+PA1*H+FK2*H/2: W1=WA1+QA1*H+FM2*H/2
V2=VA2+PA2*H+SK2*H/2: W2=WA2+QA2*H+SM2*H/2
CALL F(X0,V1,W1,FK4): CALL F(X0,V2,W2,SK4)
CALL GG(X0,V1,W1,FM4): CALL GG(X0,V2,W2,SM4)
FK4=FK4*H: SK4=SK4*H: FM4=FM4*H: SM4=SM4*H
VB1=VA1+PA1*H+(FK1+FK2+FK3)*H/6
VB2=VA2+PA2*H+(SK1+SK2+SK3)*H/6
PB1=PA1+(FK1+2*FK2+2*FK3+FK4)/6
PB2=PA2+(SK1+2*SK2+2*SK3+SK4)/6
WB1=WA1+QA1*H+(FM1+FM2+FM3)*H/6
WB2=WA2+QA2*H+(SM1+SM2+SM3)*H/6
QB1=QA1+(FM1+2*FM2+2*FM3+FM4)/6
QB2=QA2+(SM1+2*SM2+2*SM3+SM4)/6: END SUB
SUB F(X,Y,Z,F)
REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА В ПЕР-
ВОМ УРАВНЕНИИ
SHARED SK,A1,A5,VC0,RNC,VT0,RNT,AKK
X2=X^2: VC=VC0*EXP(-RNC*X2): VT=VT0*EXP(-RNT*X2)
UC=VC/A1: UT=VT/A1: F=UT*A5*Z-(SK-AKK/X-UC)*Y: END
SUB
SUB GG(X,Y,Z,GG)
REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ВО
ВТОРОМ УРАВНЕНИИ
SHARED SK,A1,A5,VC0,RNC,VT0,RNT,AKK
X2=X^2: VC=VC0*EXP(-RNC*X2): VT=VT0*EXP(-RNT*X2)
UC=VC/A1: UT=VT/A1
GG=UT*A5*Y-(SK-6/X^2-AKK/X-UC+2*UT)*Z:END SUB
1000 REM
REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕВЯЗОК
HFK=HF^2: SS=0: SD=0: FOR KK=1 TO NF: X=HF*KK: X2=X^2
VCCC=VC0*EXP(-RNC*X2): VVTT=VT0*EXP(-RNT*X2)
VVCC=VCCC/A1: VVTT=VVTT/A1: A=SK-VVCC-AKK/X
C=A-6/X^2+2*VVTT: B=SQR(8)*VVTT

```



```

SS=SS+ABS(V(KK+1)-B*HFK*W(KK)+(HFK*A-2)* V(KK)+V(KK -
1))
SD=SD+ABS(W(KK+1)-B*HFK*V(KK)+(HFK*C-2)*
W(KK)+W(KK- 1))
NEXT KK: RETURN
SUB WH(X,L,SK,GK,WH)
REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ УИТТЕКЕ-
РА
DIM V(1000)
SS=SQR(ABS(SK)): AA=GK/SS: BB=L: H=0.02: N=1000:
ZZ=1+AA+BB
AAA=1/ZZ: NNN=30000: FOR I=1 TO NNN: AAA=AAA*I/(ZZ+I)
NEXT I: GAM=AAA*NNN^ZZ: CC=2*X*SS: FOR I=0 TO N
TT=H*I: V(I)=TT^(AA+BB)*(1+TT/CC)^(BB - AA)*EXP( - TT)
NEXT I: CALL SIMP(V(),N,H,SIM)
WH=SIM*EXP( - CC/2)/(CC^AA*GAM):END SUB
SUB SIMP(V(),N,H,SIM)
REM ***** ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО СИМПСОНУ *****
A=0: B=0: FOR I=2 TO N-2 STEP 2: A=A+V(I): NEXT I
FOR I=1 TO N-1 STEP 2: B=B+V(I): NEXT I
SIM=H*(V(0)+2*A+4*B+V(N))/3: END SUB
    
```

Программа тестировалась на нуклон - нуклонном потенциале Рейда [90] и сравнение результатов, полученных в его работе другими методами, с найденными по разработанной нами программе, приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 - Сравнение характеристик дейтрона и пр рассеяния для нуклон - нуклонного взаимодействия Рейда.

Характеристики дейтрона	Расчет Рейда (RSCA) [90]	Наш расчет для потенциала Рейда
E_d , МэВ	2.22464	2.22458
Q_d , ФМ ²	0.2762	0.2757
P_d , %	6.217	6.217
A_S	0.87758	0.875(2)
$\eta=A_D/A_S$	0.02596	0.0260(2)
a_t , ФМ	5.390	5.390
r_t , ФМ	1.720	1.723
a_s , ФМ	-17.1	-17.12
r_s , ФМ	2.80	2.810
R_d , ФМ	1.956	1.951

Из этих результатов видно, что совпадение наших и предыдущих расчетов по энергии связанного состояния дейтрона имеет величину порядка нескольких тысячных процента. Совпадение результатов по другим характеристикам находится примерно на таком же уровне.

5. МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОЙ ТРЕХТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

В этой главе рассмотрены математические методы решения трехчастичной вариационной задачи на связанные состояния с разложением волновой функции по не ортогональному гауссовому базису. Приведена математическая модель решения такой задачи с использованием не стандартного метода, который приводит к исключительно устойчивому алгоритму решения обобщенной матричной задачи на собственные значения.

Для примера рассмотрена трехтельная модель ядра ${}^7\text{Li}$ и ее возможности по описанию некоторых характеристик связанного состояния ${}^4\text{He}^2\text{Hn}$ кластеров.

5.1 Общие методы трехтельной модели

В работах [23-25] были подробно рассмотрены возможности трехтельной модели ядра ${}^6\text{Li}$ и показана ее способность правильно описывать почти все наблюдаемые характеристики, включая электромагнитные формфакторы, если выполнить антисимметризацию волновой функции [150,151,152,153,154]. Исключение составляет только квадрупольный момент ядра, который во всех расчетах получается положительным, в то время как экспериментальные измерения дают отрицательную величину. Учет антисимметризации волновой функции позволил существенно улучшить качество описания поперечных формфакторов [150], но мало изменил другие характеристики ядра.

Этот результат может объяснить определенные успехи простых двухкластерных моделей легких ядер с запрещенными состояниями, в частности ${}^2\text{H}^4\text{He}$ и ${}^3\text{H}^4\text{He}$ моделей ядер ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$, в которых получается хорошее описание многих экспериментальных характеристик, но плохо воспроизводятся поперечные формфакторы при больших переданных импульсах [155,156].

Антисимметризация волновой функции, выполненная в [150], затрагивает в основном внутреннюю область ядра и заметно изменяет волновую функцию на малых расстояниях, которые определяют поведение высокоимпульсной компоненты формфакторов. Область больших расстояний при этом меняется мало, что не приводит к существенным изменениям других расчетных характеристик, зависящих в основном от поведения волновой функции периферийной области ядра. Поэтому, вполне можно предположить, что проведение антисимметризации волновой функции в двухкластерных моделях ${}^7\text{Li}$ или ${}^6\text{Li}$ с тензорными силами, которые позволяют передать квадрупольный момент ядра ${}^6\text{Li}$ [157,158] может заметно улучшить описание поперечных формфакторов при больших пере-

данных импульсах.

Ядро ${}^7\text{Li}$, не смотря на вполне успешное описание многих его характеристик на основе простой двухкластерной системы [17-19,38,11,29-36,159], можно рассматривать в трехтельной $n^2\text{H}^4\text{He}$ модели, которая имеет больше возможностей и, в частности, позволяет выделять различные двухчастичные каналы.

Рассмотрим такую модель более подробно и будем считать, что в основании треугольника из трех частиц находятся ${}^2\text{H}$ кластеры (частицы 23) с радиус - вектором относительного расстояния $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{23}$ и орбитальным моментом относительного движения λ , которые находятся в дублетном спиновом состоянии. Ядро ${}^4\text{He}$ (частица 1) находится в вершине треугольника и его положение относительно центра масс двухкластерной системы определяется вектором $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(23),1}$ и моментом l . Полный орбитальный момент системы равен $\mathbf{L} = \mathbf{l} + \lambda$, а полный спин $\mathbf{S} = \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2$, ($S_1 = 0$) может принимать значения $1/2$ и $3/2$, т.е. система $n^2\text{H}$ может находиться в дублетном и квартетном состояниях, первое из которых соответствует основному состоянию ядра лития при $\lambda=0$.

Полный момент основного состояния ядра ${}^7\text{Li}$ равен $3/2^-$ и, поскольку $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$, может быть получен из комбинации $L = 1$ и $S = 1/2$, которая приводит к $J = 1/2$ и $3/2$ с отрицательной четностью. Основному состоянию ядра соответствует момент $3/2$, а первому возбужденному состоянию при энергии 0.478 МэВ момент $1/2$.

Полный орбитальный момент системы $L = 1 + \lambda$, равный единице может быть получен из комбинации $l = 1$ и $\lambda = 0$, которая позволяет рассматривать систему ${}^2\text{H}$, как связанное состояние ядра лития в дублетном спиновом состоянии [160].

В качестве парных межкластерных потенциалов выбирались взаимодействия гауссовой формы с отталкивающим кором, позволяющие правильно передавать соответствующие фазы рассеяния. В паре частиц (13) используется чистый по схемам Юнга $n^4\text{He}$ потенциал для S - волны ($l_{13} = 0$) с параметрами, описывающими экспериментальную фазу [161], как показано на рисунке 5.1.

В паре (12) использован P_0 - потенциал ${}^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия ($l_{12} = 1$), параметры которого уточнялись по трехтельной энергии, поскольку P_0 – фазы, показанные на рисунке 5.2 и полученные в разных работах [91-98] имеют большую неоднозначность.

В паре частиц (23) взято чистое по орбитальным симметриям $n^2\text{H}$ дублетное S - взаимодействие ($l_{23} = \lambda = 0$) с отталкиванием, параметры которого фиксированы по характеристикам связанного состояния ядра лития, а фазы показаны на рисунке 5.3 в сравнении с извлеченными из эксперимента чистыми фазами [98].

В каждой паре частиц использован только один потенциал для

определенной парциальной волны и спинового состояния. Это представляется вполне оправданным, если потенциалы для остальных парциальных волн (в каждой паре) вносят меньший вклад и приводят только к небольшим поправкам к расчетным характеристикам ядра.

В отличие от трехчастичной модели ядра ${}^6\text{Li}$ [23], где потенциалы в NN и $N^4\text{He}$ системах хорошо определены по экспериментальным фазам рассеяния, имеющим сравнительно малые ошибки, параметры ${}^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия имеют заметную неопределенность из-за различия результатов разных фазовых анализов.

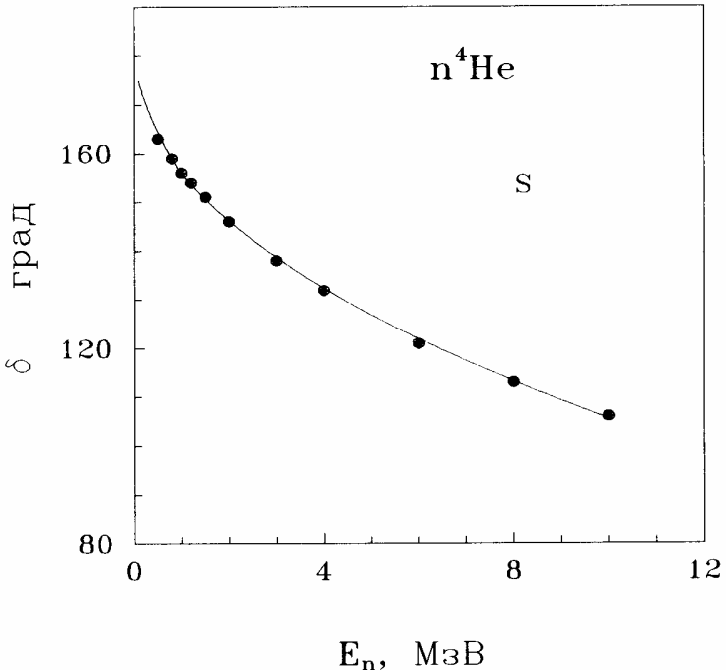


Рисунок 5.1 - Фазы упругого $n^4\text{He}$ S - рассеяния [91-98] при низких энергиях для потенциала из таблицы 5.1.

Поэтому представляется интересным выяснить - можно ли в трехтельной ${}^4\text{He}^2\text{Hn}$ модели согласовать, в пределах имеющихся экспериментальных неоднозначностей по фазам ${}^2\text{H}^4\text{He}$ рассеяния, параметры этих двухкластерных потенциалов с энергией связи ядра ${}^7\text{Li}$ в трехтельном канале.

Парные межкластерные потенциалы взаимодействия принимались в следующем виде

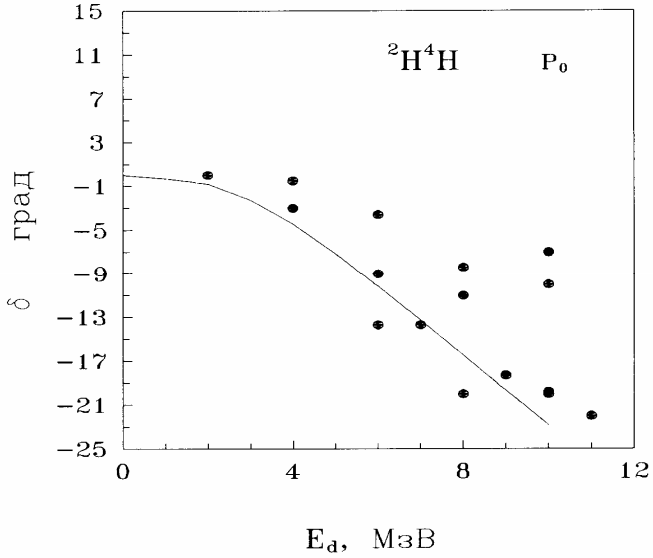


Рисунок 5.2 - Фазы ${}^4\text{He}^2\text{H}$ упругого P - рассеяния [91-98] при низких энергиях для потенциала из таблицы 5.1.

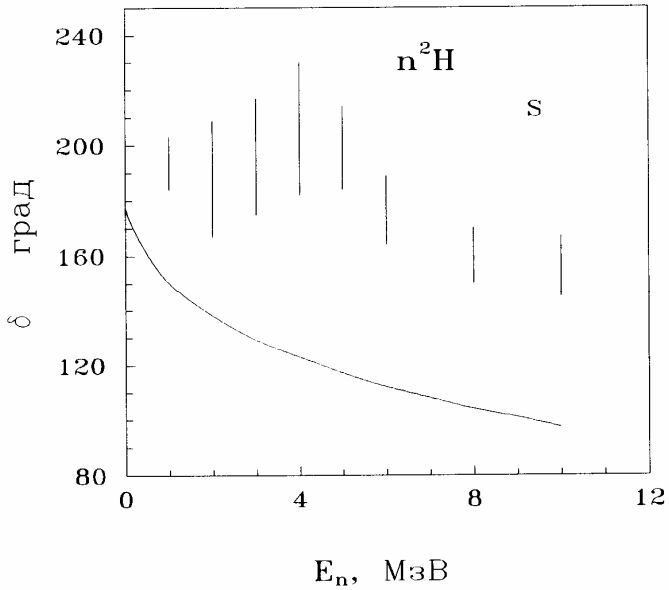


Рисунок 5.3 - Чистые со схемой Юнга {3} дублетные фазы упругого $n^2\text{H}$ S - рассеяния [98] при низких энергиях для потенциала из таблицы 5.1.

$$V(r) = V_1 \exp(-\gamma r^2) + V_2 \exp(-\delta r^2), \quad (5.1)$$

а их параметры даны в таблице 5.1.

Таблица 5.1 - Параметры парных межкластерных потенциалов.

Система	L	V ₁ , МэВ	γ, Фм ⁻²	V ₂ , МэВ	δ, Фм ⁻²
² H ⁴ He	1	-10.0	0.1	72.0	0.2
n ⁴ He	0	-115.5	0.16	500	1.0
n ² H	0	-78.78	0.3	200	2

Потенциал основного состояния n²H системы дает энергию связи -6.25 МэВ, асимптотическую константу C₀=2.0(1) в хорошем соответствии с экспериментом [162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175] и среднеквадратичный радиус 2.12 Фм, который несколько больше известной величины 1.70(3) Фм [176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186]. Здесь не удастся полностью согласовать n²H потенциал со всеми наблюдаемыми [98] - расчетная фаза лежит заметно ниже извлеченных из эксперимента чистых по схеме Юнга {3} фаз, а радиус ядра завышен.

Последнее вполне объяснимо, поскольку дейтрон имеет радиус больше, чем тритий и не может находиться внутри него без деформаций, т.е. дейтронному кластеру в такой системе нельзя полностью сопоставлять характеристики свободного дейтрона [98]. Для того, чтобы получить правильный радиус трития необходимо деформировать дейтрон, уменьшив его радиус примерно на 27% и принять 1.42 Фм, что приводят к расчетному зарядовому радиусу трития 1.70 Фм в хорошем согласии с экспериментом.

Для нахождения энергии трехкластерной системы использовался неортогональный вариационный метод [23]. Полная трехтельная волновая функция имеет вид

$$\Psi(r, R) = \sum_{1,\lambda} \Phi_{1,\lambda}(r, R) Y_{LS}^{JM}(\hat{r}, \hat{R}),$$

где угловая часть записывается

$$Y_{LS}^{JM}(\hat{r}, \hat{R}) = \sum_{M_S M_L} \langle LM_L SM_S | JM \rangle Y_{LM_L}(\hat{r}, \hat{R}) \chi_{SM_S}(\sigma).$$

Здесь L – орбитальный момент, S – спин, J – полный момент

системы частиц, M – их проекции, Y_{LS}^{JM} – спин – угловая функция, $\Phi_{l,\lambda}$ – радиальная волновая функция, r и R – скалярные расстояния между частицами, r и R со шляпкой – углы между направлениями векторов \mathbf{r} и \mathbf{R} и осью z , Y_{LM} – сферическая функция, χ_{SM} – спиновая функция системы, зависящая от спина σ , угловые скобки обозначают коэффициенты Клебша - Гордона.

Радиальная волновая функция представляется в форме разложения по гауссойдам так же, как в трехтельной модели ядра ${}^6\text{Li}$ [23]

$$\Phi_{l,\lambda}(r, R) = N r^\lambda R^l \sum_i C_i \exp(-\alpha_i r^2 - \beta_i R^2) = N \sum_i C_i \Phi_i . \quad (5.2)$$

Здесь выражение

$$\Phi_i = r^\lambda R^l \exp(-\alpha_i r^2 - \beta_i R^2)$$

называется базисной функцией. Исходное радиальное уравнение Шредингера системы трех частиц запишем в форме [59,60]

$$(H - E) \Phi_{l,\lambda} = 0 , \quad (5.3)$$

где

$$H = T + V , \quad T = T_1 + T_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r - \frac{\hbar^2}{2\mu_0} \Delta_R ,$$

$$V = V_{12} + V_{23} + V_{13} ,$$

$$\mu = \frac{m_2 m_3}{m_{23}} , \quad \mu_0 = \frac{m_1 m_{23}}{m} , \quad m_{23} = m_2 + m_3 ,$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

Здесь m и μ – массы и приведенные массы частиц, Δ – оператор Лапласа, \hbar^2 – постоянная Планка, T и V – операторы кинетической и потенциальной энергии, H – гамильтониан и E – энергия системы.

Подставляя разложение (2.52) в уравнение (2.53), домножая слева это уравнение на базисную функцию Φ_j , и интегрируя по всем переменным, приводим (2.53) к матричному виду

$$\sum_i (H_{ij} - E L_{ij}) C_i = 0$$

или

$$KC = 0, \quad (5.4)$$

где матрица K определяется в виде

$$K = H - EL.$$

В этих выражениях H - матрица гамильтониана, L - матрица интегралов перекрывания, которая при использовании ортогонального базиса переходит в единичную матрицу I . Отметим, что матрица K не диагональна по энергии и вместо обычной задачи на собственные значения мы имеем обобщенный вариант этой задачи. Поскольку уравнение (2.54) однородное, оно будет иметь не тривиальные решения только тогда, когда детерминант матрица K равен нулю. Условие равенства нулю ее детерминанта позволяет найти все собственные значения E системы (при заранее заданных параметрах α_i и β_i), а по ним все собственные вектора C , а значит и саму радиальную функцию $\Phi_{1,\lambda}$ в выражении (2.52).

Для решений обобщенной задачи на собственные значения матрица интегралов перекрывания L обычно разлагается на верхнюю V и нижнюю N треугольные матрицы, найти которые можно методом Халецкого. Затем, определяют обратные им матрицы и, с их помощью, новую матрицу гамильтониана, которая приводит к стандартной, диагональной задаче на собственные значения, как было подробно описано в третьей главе. Такая процедура обычно называется ортогонализацией по Шмидту.

Но если в двухтельной задаче с одним вариационным параметром такой метод оказывается сравнительно устойчив, то в трехтельной системе, при некоторых значениях двух вариационных параметров, метод нахождения обратным матриц приводит к существенной неустойчивости и переполнению при работе компьютерной программы.

Поэтому, мы предложили не стандартный метод вычисления детерминанта для обобщенной задачи на собственные значения, который заключается в разложении всей недиагональной по E матрицы K на треугольные, а не только матрицы интегралов перекрывания, как это делается обычно. Теперь, как и прежде, ищется ноль детерминанта нижней треугольной матрицы, который равен произведению ее диагональных элементов, зависящих от E . Предложенный метод позволил получить устойчивый алгоритм решения этой задачи, не приводящий к переполнению при работе компьютерных программ, поскольку уже не нужно определять обратные к V и N матрицы.

При каждом значении вариационных параметров α_i и β_i находим некоторую энергию системы (которая дает ноль детерминанта), а затем, варьируя эти параметры, проводим поиск минимума этой энергии. Затем увеличивается размерность базиса N и повторяем все вычисления, до тех пор пока величина собственного значения, т.е. энергии связи E_N , на очередном шаге N не станет отличаться от предыдущего значения E_{N-1} на величину ϵ , которая обычно задается на уровне 0.5-1.0%. В соответствии с теоремой Хилерааса – Ундгейма [60] эта минимальная энергия и будет реальной энергией связи в такой трехчастичной системе, т.е. энергией связи атомного ядра ${}^7\text{Li}$.

Матричные элементы гамильтониана системы и интегралов перекрывания, вычисленные по базисным функциям Φ_i , имеют вид [187, 188]

$$T_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda}} \frac{\hbar^2}{m_N} \alpha_{ij}^{-\lambda-1/2} \beta_{ij}^{-l-1/2} G_{ij} \quad ,$$

$$G_{ij} = \frac{B_{ij}(\alpha, \lambda)}{\mu \beta_{ij}} + \frac{B_{ij}(\beta, l)}{\mu_0 \alpha_{ij}} \quad ,$$

$$B_{ij}(\delta, \nu) = \frac{\nu^2}{2\nu+1} + \frac{\delta_i \delta_j}{\delta_{ij}^2} (2\nu+3) - \nu \quad ,$$

$$L_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda}} \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-l-3/2} \quad ,$$

$$(V_{23})_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda}} V_{23}(r) (\alpha_{ij} + \gamma)^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-l-3/2} \quad ,$$

$$N = \left(\sum_{ij} C_i C_j L_{ij} \right)^{-1/2} \quad ,$$

$$[(V_{\text{нб}})_R]_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 l(l+1) \frac{(2l-1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda}} \frac{\hbar^2}{\mu_0} \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-l-1/2} \quad ,$$

$$[(V_{\text{нб}})_r]_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \lambda(\lambda+1) \frac{(2l+1)!!(2\lambda-1)!!}{2^{l+\lambda}} \frac{\hbar^2}{\mu} \alpha_{ij}^{-\lambda-1/2} \beta_{ij}^{-l-3/2} \quad ,$$

$$[(V_k)_r]_{ij} = Z_2 Z_3 \frac{\pi}{16} N^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(2l+1)!!}{2^l} \frac{\lambda!}{\alpha_{ij}^{\lambda+1} \beta_{ij}^{l+3/2}} \quad ,$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j \quad , \quad \beta_{ij} = \beta_i + \beta_j \quad .$$

Далее, например, при значениях $l = 1$ и $\lambda = 0$ (набор моментов для ${}^4\text{He}^2\text{Hn}$ системы в ядре ${}^7\text{Li}$) имеем

$$(V_{12})_{ij} = \frac{\pi}{32} N^2 \frac{3}{A^{3/2}(\beta_{ij} + \gamma)} \left[\frac{a^2 \gamma^2}{A} + 1 \right] V_{12}(r_{12}) \quad ,$$

$$A = \alpha_{ij} \beta_{ij} + \gamma(\alpha_{ij} + a^2 \beta_{ij}) \quad , \quad a = m_3 / m_{23} \quad .$$

В случае $l = 0$ и $\lambda = 0$ (для ядра ${}^3\text{H}$ или ${}^3\text{He}$) для этой части потенциала будем иметь

$$(V_{12})_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \left[\alpha_{ij} \beta_{ij} + \gamma(\alpha_{ij} + a^2 \beta_{ij}) \right]^{-3/2} V_{12}(r_{12}) \quad .$$

Здесь величина γ является параметром ширины гауссового потенциала между частицами с номерами 1 и 2.

Среднеквадратичный массовый радиус ядра в такой модели представляется в виде [187, 189]

$$\langle r^2 \rangle_m = m_1 / m \langle r^2 \rangle_{m1} + m_2 / m \langle r^2 \rangle_{m2} + m_3 / m \langle r^2 \rangle_{m3} + A / m \quad (5.5)$$

$$A = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda+1}} \sum_{i,j} C_i C_j \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-l-3/2} \left(\frac{2\lambda+3}{\alpha_{ij}} \mu + \frac{2l+3}{\beta_{ij}} \mu_0 \right)$$

где

$$\mu = \frac{m_2 m_3}{m_{23}}; \quad \mu_0 = \frac{m_1 m_{23}}{m}; \quad m_{23} = m_2 + m_3; \quad m = m_1 + m_2 + m_3$$

Квадрупольный момент ядра с учетом момента дейтрона записывается [22,157]

$$Q = Q_d - \frac{2}{5} B \quad , \quad (5.6)$$

$$B = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda+1}} \sum_{i,j} C_i C_j \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-l-3/2} \left(\frac{2l+3}{\beta_{ij}} C + \frac{2\lambda+3}{\alpha_{ij}} D \right) +$$

$$+ N^2 E \sum_{i,j} C_i C_j \frac{(\lambda+1)!(l+1)!}{2\alpha_{ij}^{\lambda+2} \beta_{ij}^{l+2}} \quad ,$$

$$C = \frac{Z_1 m_{23}^2 + Z_{23} m_1^2}{m^2}, \quad D = \frac{Z_2 m_3^2 + Z_3 m_2^2}{m_{23}^2},$$

$$E = \frac{m_1}{m m_{23}} (Z_3 m_2 - Z_2 m_3),$$

$$Z_{23} = Z_1 + Z_2.$$

Среднеквадратичный зарядовый радиус имеет вид [23]

$$\langle r^2 \rangle_z = Z_1 / Z \langle r^2 \rangle_{z1} + Z_2 / Z \langle r^2 \rangle_{z2} + Z_3 / Z \langle r^2 \rangle_{z3} + B / Z. \quad (5.7)$$

В качестве зарядовых радиусов кластеров принимались величины $\langle r \rangle_{mn} = 0.8$ Фм, $\langle r \rangle_{zn} = 0$ Фм, $\langle r \rangle_{md} = \langle r \rangle_{zd} = 1.96$ Фм, $\langle r \rangle_{m\alpha} = \langle r \rangle_{z\alpha} = 1.67$ Фм, а квадрупольный момент дейтрона 2.86 мб. [162-186]. Экспериментальное значение квадрупольного момента ${}^7\text{Li}$, равное -36.6(3) мб, приведено в работах [190, 191].

Для нахождения волновой функции относительного движения и вероятности двухкластерной ${}^3\text{H}^4\text{He}$ конфигурации использовалась волновая функция ядра ${}^3\text{H}$ в $p^2\text{H}$ модели в виде простого разложения по гауссоидам

$$\varphi(r) = N_0 \sum_j B_j \exp(-\chi_j r^2). \quad (5.8)$$

Здесь параметры χ_j и коэффициенты разложения B_j находились на основе $p^2\text{H}$ потенциала основного состояния, приведенного в таблице.

При использовании волновых функций ${}^3\text{H}$ вида (2.58) функция относительного движения двух кластеров в ${}^3\text{H}^4\text{He}$ канале ядра ${}^7\text{Li}$ при $l=1$ и $\lambda=0$ может быть представлена в виде [192]

$$X(R) = \int \Phi(r, R) \varphi(r) r^2 dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4} R \sum_i C_i \exp(-\beta_i R^2) \sum_j B_j (\alpha_i + \chi_j)^{-3/2} \quad (5.9)$$

Интеграл от квадрата модуля этой волновой функции дает вероятность двухкластерной конфигурации в трехтельной модели [192]

$$P = \frac{3\pi^{3/2}}{16 \cdot 8} \sum_{i,k} C_i C_k \beta_{ik}^{-5/2} \sum_{j,n} B_j B_n [(\alpha_i + \chi_j)(\alpha_k + \chi_n)]^{-3/2} . \quad (5.10)$$

Получив волновую функцию двухчастичной системы (2.59), можно использовать ее для расчетов среднеквадратичных радиусов ${}^7\text{Li}$ в обычной двухкластерной модели, которые записываются [23]

$$\langle r^2 \rangle_m = m_1 / m \langle r^2 \rangle_{m_1} + m_2 / m \langle r^2 \rangle_{m_2} + \frac{m_1 m_2}{m^2} R_{1,2}^2 , \quad (5.11)$$

$$\langle r^2 \rangle_z = Z_1 / Z \langle r^2 \rangle_{z_1} + Z_2 / Z \langle r^2 \rangle_{z_2} + \frac{(Z_1 m_2^2 + Z_2 m_1^2)}{Z m^2} R_{1,2}^2 .$$

Здесь первая масса и заряд относятся, например, к ${}^4\text{He}$, вторая к ${}^3\text{H}$, m и Z - полная масса и заряд ${}^7\text{Li}$, а R^2 матричный элемент вида

$$R_{1,2}^2 = \langle X(R) | R^2 | X(R) \rangle ,$$

который определяет относительное межкластерное расстояние для выделяемой пары частиц.

При поиске энергии связи ядра в трехтельной модели начальные значения вариационных параметров α_i и β_i находились из линейной сетки вида [23]

$$\alpha_i = i/30 , \quad \beta_i = 2\alpha_i .$$

Затем проводилось независимое варьирование каждого из них так, чтобы минимизировать энергию системы с точностью до 10^{-3} МэВ, т.е. параметры изменяются до тех пор, пока изменение энергии не станет меньше этой заданной величины.

5.2 Вариационная программа трехтельной модели

Приведем теперь текст компьютерной программы на языке Turbo Basic, которая предназначена для расчета энергии трехтельной системы на основе описанных выше методов.

REM ПРОГРАММА ДЛЯ РАСЧЕТА ЭНЕРГИИ N^2H^4He СИСТЕМЫ

DEFDBL A-Z: DEFINT J,K,L,N,I

DIM XP(30), H(30,30), T(30,30), VN(30,30), VC(30,30), L1(30,30),

```

FF(500), FU(500)
DIM A(30,30),X(30),Y(30),B(30,30),C(30,30),D(30),Y1(30,30),
SV(30),A1(30)
DIM P(30), Q(30), AA(30,30), AAA(30,30), LA(30), N(30,30),
NO(30,30), LLL(30,30)
DIM V(30,30), OV(30,30), E(30,30), E1(30,30), VK(30,30), C1(30,30),
E2(40), L(30,30)
DIM C0(30),CW(30),PH5(20)
ALD$="C:\BASICA\TRITON\ALDN1.DAT"
ALD1$="C:\BASICA\TRITON\TRIT\ALDN.DAT"
ALD2$="C:\BASICA\SOB\SOB-ND2.DAT"
Z1=2: Z2=1: Z3=0: M1=4: M2=2: M3=1
Z=Z1+Z2+Z3: M23=M3+M2: PM23=M3*M2/M23
AM0=M1+M2+M3: PM0=M1*M23/AM0
NF=200: NFF=4: NS=1: HFF=0.1: PN=.5: PH=.05: NI=0: NNP=1
NV=0: NSM=0: EP=1D-04: EPP=1D-04: NITER=2: PH=1: B=1E30
HC=1: PNC=-10: PVC=10: A11=41.4686: A12=1.439975*Z1*Z2
A13=1.439975*Z1*Z3: A23=1.439975*Z3*Z2: P1=3.14159265: PI=SQR
(P1)
REM -----
REM 1 - AL; 2 - D; 3 - N; L - AL-D - 1, AL-N -0, D-N - 0
REM N-D
V231=-78.78 : REM J= 1 ; L=0
R231=.3
V232=200. : REM J= 1 ; L=0
R232=2
REM AL-N
V131=-115.5 : REM J=1/2 ; L=0
R131=.16
V132=500 : REM J=1/2 ; L=0
R132=1
REM AL-D
V121=-10. : REM J=1/2 ; L=1
R121=.1
V122=72 : REM J=1/2 ; L=1
R122=.2
REM -----
NP=9: FOR I=1 TO NP: XP(I)=(I^1)/30: XP(I+NP)=XP(I)*2: NEXT I
REM GOTO 5454: OPEN "I",1,ALD1$: FOR I=1 TO NP
INPUT1, XP(I),XP(I+NP),SV(I): NEXT I: CLOSE
5454 REM ВАРИАЦИОННАЯ ТОЧНОСТЬ: EP=1D-04
REM ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЕТЕРМИН: EPP=1D-04
NITER=2: PH=.091234: NP2=2*NP: FOR ITER=1 TO NITER
N55=0: PH5=PH/ITER
    
```

```

50 FMIN=B: FOR IJK=1 TO NP2: PH5(IJK)=XP(IJK)*PH5
60 XP(IJK)=XP(IJK)+PH5(IJK): IF XP(IJK)<0 GOTO 619
PRINT ITER;IJK;: PRINT USING " +#.#####^" ;XP(IJK);
ZYS=0: GOSUB 5000: F=LA: IF PH=0 GOTO 7654: C=B
B=F: IF F-C<0 GOTO 60
619 XP(IJK)=XP(IJK)-PH5(IJK): NEXT IJK: N55=N55+1
PRINT "*****"
PRINT "          E = "; ENER=F
PRINT USING " +#.#####^" ;F: FOR II=1 TO NP
PRINT USING " +#.#####^" ;XP(II);: NEXT II
PRINT: FOR II=NP+1 TO NP2
PRINT USING " +#.#####^" ;XP(II);: NEXT II
PRINT: IF N55=1 GOTO 5522: PH5=-PH5/2: GOTO 6611
5522 PH5=-PH5
6611 IF ABS(FMIN-F)>EP GOTO 50: NEXT ITER
7654 PRINT "*****"
PRINT "          E = "; ENER=F
PRINT USING " +#.#####^" ;F: PRINT "          AL-
FA"
FOR I=1 TO NP2: PRINT USING " +#.#####^" ;XP(I);: NEXT I
899 REM -----
LLA=F: ZYS=1: GOSUB 5000
REM -----
CN=-1.5: BN=-2.5: S=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
AL=XP(I)+XP(J):          BT=XP(I+NP)+XP(J+NP):
L(I,J)=AL^CN*BT^BN
S=S+SV(I)*SV(J)*L(I,J):          NEXT J:          NEXT I:
ANOR=SQR(2^5/3/P1/S)
PRINT "          SV": FOR IJK=1 TO NP
SV(IJK)=ANOR*SV(IJK):          PRINT USING " +#.#####^"
";SV(IJK);
NEXT IJK: REM ***** ПРОВЕРКА НОРМИРОВАКИ
*****
SSS=0: FOR JJ=1 TO NP: FOR KK=1 TO NP: AL=XP(JJ)+XP(KK)
BT=XP(JJ+NP)+XP(KK+NP): FOR I=0 TO NF: R=HFF*I
RRR=R^2*AL
IF RRR>100 GOTO 9182: A=R^2*EXP(-RRR)
9182 FF(I)=A: NEXT I: AA=0; BB=0: FOR I=1 TO NF-1 STEP 2
BB=BB+FF(I): NEXT I: FOR J=2 TO NF-2 STEP 2: AA=AA+FF(J)
NEXT J: SIM1=HFF*(FF(0)+FF(NF)+2*AA+4*BB)/3: FOR I=0 TO
NF
R=HFF*I: RRR=R^2*BT: IF RRR>100 GOTO 9183
A=R^4*EXP(-RRR)
9183 FF(I)=A: NEXT I: AA=0; BB=0: FOR I=1 TO NF-1 STEP 2

```

```

BB=BB+FF(I): NEXT I: FOR J=2 TO NF-2 STEP 2: AA=AA+FF(J)
NEXT J: SIM2=HFF*(FF(0)+FF(NF)+2*AA+4*BB)/3
SS=SV(JJ)*SV(KK)*SIM1*SIM2: SSS=SSS+SS: NEXT KK: NEXT
JJ
PRINT: PRINT "  NORM =";: PRINT USING "  +#.#####^ ^^
";SSS;
6622 REM GOTO 6319
PRINT "          INPUT 1 FOR PRINT ASSIMPTOTIC CON-
STANTS"
INPUT A:IF A<>1 GOTO 6319
REM ***** РАЧЕТ ВФ В N-6LI КАНАЛЕ *****
NPI=9:OPEN "I",1,ALD2$: FOR I=1 TO NPI: INPUT#1, E2(I),C0(I)
REM PRINT USING "  +#.####^ ^^ ";E2(I); C0(I); XP(I); XP(I+NP);
SV(I)
NEXT I: CLOSE: FOR K=1 TO NF: R=HFF*K: SS=0
FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NPI: BIK=XP(I+NP): DIJ=XP(I)+E2(J)
SS=SS+C0(J)*SV(I)*DIJ^(-1.5)*EXP(-BIK*R^2): NEXT J: NEXT I
FF(K)=PI/4*SS*R^2: FU(K)=FF(K)^2*R^2: NEXT K
FU(0)=0: AA=0: BB=0: FOR I=1 TO NF-1 STEP 2: BB=BB+FU(I)
NEXT I: FOR J=2 TO NF-2 STEP 2: AA=AA+FU(J): NEXT J
PP=HFF*(FU(0)+FU(NF)+2*AA+4*BB)/3: PRINT SQR(PP)
RRM=4/7*(1.67)^2+3/7*(1.7)^2+12/49*PP
RRZ=2/3*(1.67)^2+1/3*(1.7)^2+(2*9+1*16)/49/3*PP
PRINT 12/49;(2*9+16)/49/3
PRINT "P(ALT)= ";PP;"; RM(ALT)= ";SQR(RRM);"; RZ(ALT)= ";
SQR(RRZ)
SKS=2*PM0*2.47/A11: SS=SQR(ABS(SKS)): SQQ=SQR(2.*SS)
GK=3.44476E-02*Z1*(Z2+Z3)*PM0: GGG=GK/SS
PRINT "  R      C0      CW0      CW"
FOR I=NF/5 TO NF/2 STEP NF/30: R=I*HFF
CALL WW(SKS,1,GK,R,NF,HFF,WWW)
CW=FF(I)/WWW/SQQ: C0=FF(I)/(EXP(-SS*R)*SQQ)
CW0=C0*(R*SS^2)^GGG: PRINT USING "  +#.####^ ^^
";R,C0,CW0,CW
NEXT I
6319 REM ***** НОРМИРОВКА *****
CN=-1.5: BN=-2.5: SS=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
AL=XP(I)+XP(J): BT=XP(I+NP)+XP(J+NP): L(I,J)=AL^CN*BT^BN
SS=SS+SV(I)*SV(J)*L(I,J): NEXT J: NEXT I:
SSS=SQR(3*PI/2^5*SS)
PRINT "  N= ";: PRINT SSS
REM ***** РАДИУС МАССЫ *****
S=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP: AL=XP(I)+XP(J)
BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)

```



```

S=S+SV(I)*SV(J)*BT^BN*AL^CN*(3*PM23/AL+5*PM0/BT);
NEXT J
NEXT I: RM=P1*3*S/2^6
RRR=M1/AM0*(1.67)^2 + M2/AM0*(1.)^2 + M3/AM0*(.8)^2 +
1/AM0*RM
RS=SQR(RRR): REM PRINT: PRINT " RM = ";
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";RS;: REM PRINT " RMM =
";
REM PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";RM
REM ***** РАДИУС ЗАРЯДА *****
AA=(Z1*M23^2+Z2*M1^2+Z3*M1^2)/AM0^2
BB=(Z2*M3^2+Z3*M2^2)/M23^2: CC=-M1/AM0/M23*(Z2*M3-
Z3*M2)
S=0: SS=0: SSS=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
AL=XP(I)+XP(J): BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)
S=S+SV(I)*SV(J)*AA*5/(BT^(3.5)*AL^(1.5))
SS=SS+SV(I)*SV(J)*BB*3/(BT^(2.5)*AL^(2.5))
SSS=SSS+SV(I)*SV(J)*CC/(BT^3*AL^2): NEXT J: NEXT I
RM=3/2^6*P1*(S+SS)+SSS
RRR=Z1/Z*(1.67)^2+Z2/Z*(1.42)^2+Z3/Z*(0.)^2+RM/Z:
RZ=SQR(RRR)
PRINT " RZ = ";: PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";RZ;
PRINT " RZM = ";: PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";RM
REM ***** КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ *****
AA=(Z1*M23^2+(Z2+Z3)*M1^2)/AM0^2
BB=(Z2*M3^2+Z3*M2^2)/M23^2: CC=-M1/AM0/M23*(Z2*M3-
Z3*M2)
S=0: SS=0: SSS=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP
AL=XP(I)+XP(J): BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)
S=S+SV(I)*SV(J)*AA*5/(BT^(3.5)*AL^(1.5))
SS=SS+SV(I)*SV(J)*BB*3/(BT^(2.5)*AL^(2.5))
SSS=SSS+SV(I)*SV(J)*CC/(BT^3*AL^2): NEXT J: NEXT I
RM=-2/5*(P1/16*3/4*(S+SS)+SSS)*10: QQ=RM+2.86
PRINT " Q = ";: PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";QQ
REM ***** ВЕРОЯТНОСТЬ N-6LI КОНФИГУРАЦИИ *****
NPI=9: OPEN "I",1,ALD2$: FOR I=1 TO NPI: INPUT#1, E2(I),C0(I)
REM PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";E2(I); C0(I); XP(I); XP(I+NP);
SV(I)
NEXT I: CLOSE: SS=0: FOR I=1 TO NP: FOR K=1 TO NP
S=0: FOR J=1 TO NPI: FOR N=1 TO NPI: DIJ=XP(I)+E2(J)
DKN=XP(K)+E2(N): S=S+C0(J)*C0(N)*DIJ^(-1.5)*DKN^(-1.5)
NEXT N: NEXT J: BIK=XP(I+NP)+XP(K+NP)
SS=SS+SV(I)*SV(K)*S*BIK^(-2.5): NEXT K: NEXT I
PP=3*P1^(1.5)/16/8*SS: PRINT "PP= ";PP

```

```

REM ***** COULUMB ENERGY *****
SS11=0: CN=-1.5: BN=-2.5: S=0: SS=0: SSS=0: SSDD=0: SSSS=0
S1=0: S3=0: S2=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP:
AL=XP(I)+XP(J)
BT=XP(I+NP)+XP(J+NP): VK12=2*A12/PI/AL^(3/2)/BT^2*P1/16
VK13=2*A13/PI/AL^(3/2)/BT^2*P1/16:
VK23=3*A23/PI/AL/BT^(5/2)*P1/16
VK=(VK12+VK13+VK23): S=S+SV(I)*SV(J)*VK
S1=S1+SV(I)*SV(J)*VK12
S2=S2+SV(I)*SV(J)*VK13: S3=S3+SV(I)*SV(J)*VK23
VCB=A11*(AL*BT)^(-1.5)/PM0*P1/16
SS=SS+SV(I)*SV(J)*VCB: AL1=XP(I)*XP(J)
BT1= XP(I+NP)*XP(J+NP)
H1=3/2*3*A11*AL1/PM23*(AL*BT)^BN
H2=3/2*A11/PM0/(AL*BT)^(1.5)*(5*BT1/BT^2-2/3)
TTT=(H1+H2)*P1/16: SSS=SSS+SV(I)*SV(J)*TTT
L1=3/2/BT*(AL*BT)^CN*P1/16: SSDD=SSDD+SV(I)*SV(J)*L1
AA=AL*BT+R121*(AL+(M3/M23)^2*BT)
BB=(M3/M23)^2*R121^2:
VN12=3/2*V121*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R121)
AA=AL*BT+R122*(AL+(M3/M23)^2*BT)
BB=(M3/M23)^2*R122^2
VN12=VN12+3/2*V122*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R122)
AA=AL*BT+R131*(AL+(M2/M23)^2*BT):
BB=(M2/M23)^2*R131^2
VN13=3/2*V131*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R131)
AA=AL*BT+R132*(AL+(M2/M23)^2*BT):
BB=(M2/M23)^2*R132^2
VN13=VN13+3/2*V132*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R132)
VN231=3/2*V231*BT^BN*(AL+R231)^CN
VN232=3/2*V232*BT^BN*(AL+R232)^CN: VN23=VN231+VN232
SSSS=SSSS+SV(I)*SV(J)*(VN12+VN13+VN23)*P1/16: NEXT J
NEXT I
SS11=SSS+S+SS+SSSS: PRINT
PRINT "COUL. ENERGY= ";"VK";S;"12";S1;"13";S2;"23";S3
PRINT "CENTROB. ENERGY= ";SS
PRINT "KINETICH. ENERGY= ";SSS
PRINT "M.E. OT E* L1= ";SSDD
PRINT "POTENS. ENERGY= ";SSSS
PRINT "POLNAY ENERGY= ";SS11
REM *****
OPEN "O",1,ALD$
PRINT#1," ЭНЕРГИЯ"
PRINT#1," "

```

```

PRINT#1,USING "          +#.#####^ ^ ^ ^ ";ENER
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"      ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА И КОЕФ. РАЗЛОЖЕНИЯ"
PRINT#1,"          "
FOR I=1 TO NP
PRINT#1, USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";XP(I);XP(I+NP);SV(I)
NEXT I: PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          "
REM PRINT#1,"      КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ
SV"
REM PRINT#1,"          "
REM FOR IJK=1 TO NP
REM PRINT#1, USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";SV(IJK);
REM      NEXT      IJK:      REM      PRINT#1,"
"
REM PRINT#1,"          "
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"      НЕВЯЗКИ ПО НАЙДЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ
H*SV-LA*L*SV=0:          PRINT#1,"
"
FOR IJK=1 TO NP: PRINT#1, USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";E2(IJK);
NEXT IJK: PRINT#1,"          "
GOTO 2345: PRINT#1,"          "
PRINT#1,"      R          C0          CW"
PRINT#1,"          "
KKK=0: FOR I=MM TO NF STEP MMM: R=HFF*I
KKK=KKK+1: PRINT#1, USING " +#.##^ ^ ^ ^ ";R;
PRINT#1, USING "          +#.#####^ ^ ^ ^ ";C0(KKK); CW0(KKK);
CW(KKK)
NEXT I
2345 PRINT#1,
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"РАДИУС МАССЫ ";
PRINT#1, USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";RS
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"ЗАРЯДОВЫЙ РАДИУС ";
PRINT#1, USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";RZ
PRINT#1,"          "
PRINT#1,"КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ ";
PRINT#1, USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";QQ
PRINT#1,"          ": CLOSE
END

```

4000 REM ----- ГАММА ФУНКЦИЯ -----
A1(0)=1: A1(1)=0.57721566490153286: A1(2)=-

0.65587807152025388

A1(3)=-0.04200263503409523: A1(4)=0.1665861138229148
 A1(5)=-0.04219773455554433: A1(6)=-0.00962197152787697
 A1(7)=0.00721894324666309: A1(8)=-0.00116516759185906
 A1(9)=-0.00021524167411495: A1(10)=0.00012805028238811
 A1(11)=-0.00002013485478078: A1(12)=-0.00000125049348214
 A1(13)=0.0000013302723198: A1(14)=-0.00000020563384169
 A1(15)=0.00000000611609510: A1(16)=0.00000000500200764
 A1(17)=-0.00000000118127457: A1(18)=0.0000000001044267
 A1(19)=0.00000000000778226: A1(20)=-0.0000000000069681
 Z=ET+LO: S=0: FOR I=0 TO 20: S=S+A1(I)*Z^I: NEXT I
 GA=1/S: RETURN

5000 REM ----- ПОИСК НУЛЯ ДЕТЕРМИНАТА -----

CN=-1.5: BN=-2.5: FOR KK=1 TO NP: FOR JJ=KK TO NP
 AL=XP(KK)+XP(JJ): AL1=XP(KK)*XP(JJ)
 BT=(XP(KK+NP)+XP(JJ+NP)): BT1=XP(KK+NP)*XP(JJ+NP)
 H1=3/2*3*A11*AL1/PM23*(AL*BT)^BN
 H2=3/2*A11/PM0/(AL*BT)^(1.5)*(5*BT1/BT^2-2/3):
 T(KK,JJ)=H1+H2
 L1(KK,JJ)=3/2/BT*(AL*BT)^CN:
 AA=AL*BT+R121*(AL+(M3/M23)^2*BT)
 BB=(M3/M23)^2*R121^2
 VN12(KK,JJ)=3/2*V121*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R121)
 AA=AL*BT+R122*(AL+(M3/M23)^2*BT):
 BB=(M3/M23)^2*R122^2
 VN12(KK,JJ)=VN12(KK,JJ)+3/2*V122*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R
 122)
 AA=AL*BT+R131*(AL+(M2/M23)^2*BT):
 BB=(M2/M23)^2*R131^2
 VN13(KK,JJ)=3/2*V131*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R131)
 AA=AL*BT+R132*(AL+(M2/M23)^2*BT):
 BB=(M2/M23)^2*R132^2
 VN13(KK,JJ)=VN13(KK,JJ)+3/2*V132*(AA^CN)*(BB/AA+1)/(BT+R
 132)
 VN231(KK,JJ)=3/2*V231*BT^BN*(AL+R231)^CN: REM L=1,
 LAM=0
 VN232(KK,JJ)=3/2*V232*BT^BN*(AL+R232)^CN: REM L=1,
 LAM=0
 VN23(KK,JJ)=VN231(KK,JJ)+VN232(KK,JJ)
 VK12=2*A12/PI/AL^(3/2)/BT^2: VK13=2*A13/PI/AL^(3/2)/BT^2
 VK23=3*A23/PI/AL/BT^(5/2): VCB=A11*(AL*BT)^CN/PM0
 H(KK,JJ)=T(KK,JJ)+VN23(KK,JJ)+VN12(KK,JJ)+VN13(KK,JJ)+VC
 B+VK12+VK13+VK23: H(JJ,KK)=H(KK,JJ): L1(JJ,KK)=L1(KK,JJ)
 NEXT JJ: NEXT KK: IF ZYS=1 THEN GOSUB 1000

```

IF ZYS=1 THEN RETURN
REM -----
I1=0
100 A2=PNC: B2=PNC+HC
REM -----
LLA=A2: GOSUB 2000: D12=S
REM -----
51 LLA=B2: GOSUB 2000: D11=S
REM -----
IF D12*D11>0 GOTO 4
44 I1=I1+1: A3=A2: B3=B2
11 C3=(A3+B3)/2: IF ABS(A3-B3)<EPP GOTO 151
REM -----
LLA=C3: GOSUB 2000: F2=S
REM -----
IF D12*F2>0 GOTO 14: B3=C3: D11=F2: GOTO 15
14 A3=C3: D12=F2
15 IF ABS(F2)>EPP GOTO 11
151 CO=C3
REM -----
LA=CO
REM -----
IF NSM=0 GOTO 2002: PNC=CO+ABS(0.1*CO)
2002 IF I1<NS GOTO 100: GOTO 7
4 IF ABS(D11*D12)<1.D-30 GOTO 44: A2=A2+HC: B2=B2+HC
D12=D11: IF B2-PVC<0.1 GOTO 51: YS=PVC: GOTO 8
7 YS=NS
8 PRINT USING " +#.##^ ^ ^ ^ ";F2;: FOR I=1 TO NS
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";LA: NEXT I: RETURN
2000 REM ПОИСК ДЕТЕРМИНАНТА МАТРИЦЫ
FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP: LLL(I,J)=(H(I,J)-LLA*L1(I,J))
B(I,J)=0: C(I,J)=0: NEXT J: NEXT I: GOTO 234: PRINT
FOR II=1 TO NP: FOR KK=1 TO NP
PRINT USING " +#.##^ ^ ^ ^ ";LLL(II,KK);: NEXT KK: PRINT:
NEXT II
234 REM -----
FOR I=1 TO NP: C(I,I)=1: B(I,1)=LLL(I,1): C(1,I)=LLL(1,I)/B(1,1)
NEXT I: FOR I=2 TO NP: FOR J=2 TO NP: S=0: IF J>I GOTO 1
FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K
B(I,J)=LLL(I,J)-S: GOTO 2
1 S=0: FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K
C(I,J)=(LLL(I,J)-S)/B(I,I)
2 NEXT J: NEXT I
REM -----

```

```

SS=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP: S=0: FOR K=1 TO NP
S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K: AAA(I,J)=S-LLL(I,J):
SS=SS+AAA(I,J)
NEXT J: NEXT I: GOTO 678: PRINT " -|-|-|- N=LLL-B*C
=0"

```

```

FOR I=1 TO NP: PRINT: FOR J=1 TO NP
PRINT USING " +#.#####^" AAA(I,J): NEXT J: NEXT I: PRINT
678 S=1: FOR K=1 TO NP: S=S*B(K,K): NEXT K: GOTO 991
PRINT " E=": PRINT USING " +#.#####^" LLA:
PRINT " DET=": PRINT USING " +#.#####^" S:
PRINT " NEV=": PRINT USING " +#.#####^" SS
991 RETURN

```

1000 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

```

FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP: LLL(I,J)=(H(I,J)-LLA*L1(I,J))
B(I,J)=0: C(I,J)=0: NEXT J: NEXT I: FOR I=1 TO NP-1
FOR J=1 TO NP-1
I1=I: J1=J: AD(I,J)=LLL(I1,J1): NEXT J: NEXT I: I1=1: I2=NP-1
J=NP: FOR I=I1 TO I2: D(I)=-LLL(I,J): NEXT I: NP=NP-1: GOSUB
3000

```

```

REM -----
Y(1)=D(1)/B(1,1): FOR I=2 TO NP: S=0: FOR K=1 TO I-1
S=S+B(I,K)*Y(K)
NEXT K: Y(I)=(D(I)-S)/B(I,I): NEXT I: X(NP)=Y(NP)
FOR I=NP-1 TO 1 STEP -1: S=0: FOR K=I+1 TO NP:
S=S+C(I,K)*X(K)
NEXT K: X(I)=Y(I)-S: NEXT I: FOR I=1 TO NP: SV(I)=X(I)
NEXT I: NP=NP+1: SV(NP)=1: S=0: FOR I=1 TO NP: S=S+SV(I)^2
NEXT I: SS=0: FOR I=1 TO NP: SV(I)=SV(I)/SQR(S): NEXT I
AN=1: PRINT " H*SV-LA*L*SV=0: FOR I=1 TO NP
S=0: SS=0: FOR J=1 TO NP: SV(J)=SV(J)*AN: S=S+H(I,J)*SV(J)
SS=SS+LLA*L1(I,J)*SV(J): NEXT J: E2(I)=S-SS: NEXT I
FOR I=1 TO NP: PRINT USING " +#.#####^" E2(I): NEXT I
PRINT: RETURN

```

3000 REM РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ТРЕУГОЛЬНЫЕ

```

FOR I=1 TO NP: C(I,I)=1: B(I,1)=AD(I,1): C(1,I)=AD(1,I)/B(1,1)
NEXT I: FOR I=2 TO NP: FOR J=2 TO NP: S=0: IF J>I GOTO 551
FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K: B(I,J)=AD(I,J)-S
GOTO 552

```

```

551 S=0: FOR K=1 TO I-1: S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K
C(I,J)=(AD(I,J)-S)/B(I,I)

```

```

552 NEXT J: NEXT I

```

```

REM -----
SS=0: FOR I=1 TO NP: FOR J=1 TO NP: S=0: FOR K=1 TO NP
S=S+B(I,K)*C(K,J): NEXT K: AAA(I,J)=S-AD(I,J): SS=SS+AAA(I,J)

```

```

NEXT J: NEXT I: GOTO 578
PRINT "          NEV = AD - B*C =0": FOR I=1 TO NP
FOR J=1 TO NP: PRINT USING " +#.#####^"^";AAA(I,J);: NEXT J
NEXT I
578 S=1: FOR K=1 TO NP: S=S*B(K,K): NEXT K: GOTO 9753
PRINT "          DET=";: PRINT USING " +#.#####^"^";S;
PRINT "          NEV=";: PRINT USING " +#.#####^"^";SS
9753 PRINT: RETURN
SUB WW(SK,L,GK,R,N,H,WH)
DIM V(500)
SS=SQR(ABS(SK)); AA=GK/SS; BB=L; NN=500; HH=.02
ZZ=1+AA+BB; AAA=1/ZZ; NNN=2000: FOR I2=1 TO NNN
AAA=AAA*I2/(ZZ+I2): NEXT I2: GAM=AAA*NNN^ZZ
RR=R; CC=RR*SS*2: FOR I=0 TO NN: TT=HH*I
V(I)=TT^(AA+BB)*(1+TT/CC)^(BB-AA)*EXP(-TT): NEXT I
A=0; B=0: FOR II=1 TO NN-1 STEP 2: B=B+V(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO NN-2 STEP 2: A=A+V(JJ): NEXT JJ
SIM=HH*(V(0)+V(NN)+2*A+4*B)/3
WH=SIM*EXP(-CC/2)/(CC^AA*GAM): END SUB

```

Для проверки метода расчета и компьютерной программы рассматривалась модельная задача для трех частиц, взаимодействующих в потенциале Афнана - Танга [193] с усреднением триплетных и синглетных состояний. Для энергии такой системы в [193] получено -7.74 МэВ, а в работах [194,195], где использовался неортогональный вариационный метод с изменением параметров волновой функции на основе тангенциальной сетки, найдено -7.76 МэВ. Здесь, при независимом варьировании всех параметров и размерности базиса $N=5$, получено -7.83 МэВ, т.е. энергия изменилась примерно на 1% относительно результатов [193,194].

5.3 Физические результаты трехтельных расчетов

Приведем теперь распечатки результатов расчета трехтельной энергии связи ядра ${}^7\text{Li}$ при $N=9$, 11 и реальными ядерными потенциалами, описанными выше.

E= -8.678E+00 МэВ (N=9)

ALFA

+1.75758E-01 +5.98566E-02 +2.41148E-01 +1.04891E-01 +1.78012E-01
+1.67172E-01 +2.23184E-01 +7.05920E-01 +1.21380E+00

BETA

+7.57214E-02 +6.43507E-02 +1.75199E-01 +2.80843E-01 +6.60368E-01

+8.13208E-01 +4.77234E-01 +3.71087E-01 +9.66861E-02

(H-LA*L)SV=0

-5.68434E-14 +2.27374E-13 +2.84217E-14 -8.52651E-14 -7.10543E-15
+1.77636E-15 -3.01981E-14 -1.42109E-14 +1.68490E-03

SV

-4.41044E-02 -1.20457E-02 -1.31495E-01 +6.08814E-02 -7.79223E-01
+3.40193E-01 +6.20480E-01 -1.05539E-01 +5.58986E-02

NORM = 1.00000000E+00

RM = 2.62E+00 ФМ, RZ = 2.38E+00 ФМ, Q = -3.45E+01 мб.

CENTRIFUGAL ENERGY= 1.926781715339702 МэВ

KINETIC ENERGY= 15.63147355849597 МэВ

POTENTIAL ENERGY= -27.01378556133874 МэВ

TOTAL ENERGY= -8.678288314964876 МэВ

E= -8.713E+00 (N=11)

ALFA

+3.09996E-02 +8.90401E-02 +2.57654E-01 +1.39035E-01 +2.02704E-01
+1.38880E-01 +2.21892E-01 +2.40877E-01 +1.24262E+00 +2.48192E-01
+9.59501E-01

BETA

+3.53874E-02 +7.40006E-02 +5.08743E-02 +2.92684E-01 +1.70156E-01
+4.59418E-01 +2.75673E-01 +7.54029E-01 +8.35727E-02 +6.74060E-01
+4.50788E-01

(H-LA*L)SV=0

+0.00000E+00 -2.27374E-13 +3.41061E-13 -7.10543E-15 +0.00000E+00
+2.84217E-14 +2.84217E-14 +2.35367E-14 -2.13163E-14 -2.66454E-15
-2.71238E-03

SV

+8.61351E-04 +2.56716E-02 +1.37998E-02 -2.73826E-01 +2.02813E-01
+2.09360E-01 -5.46337E-02 +5.40009E-01 -4.51367E-02 -6.87519E-01
+8.04027E-02

NORM = +1.00000000E+00

RM = +2.64E+00 RZ = +2.39E+00 Q = -3.555E+01

COUL. ENERGY= 0.7728061981754414 12

CENTROB. ENERGY= 1.910695580740683

KINETICH. ENERGY= 15.49351258590982

POTENS. ENERGY= -26.88993422313928

$$\text{TOTAL ENERGY} = -8.71291985831334$$

Результаты расчета вариационной энергии ядра ${}^7\text{Li}$, полученные изложенным методом, с использованием потенциалов из предыдущей таблицы и в зависимости от размерности вариационного базиса даны в таблице 5.2.

Таблица 5.2 -Результаты вычисления трехтельной энергии.

N	3	5	7	9	10	11
$E({}^7\text{Li})$, МэВ	-7.68	-8.63	-8.66	-8.678	-8.706	-8.713

Экспериментальная трехтельная энергия ядра в этом канале составляет -8.725 МэВ [190]. Из таблицы видно, что при размерности $N=9-11$ энергия системы практически сходится, и дальнейшее увеличение базиса может привести, по - видимому, к изменению энергии на величину порядка 0.01 - 0.02 МэВ. Как уже говорилось, параметры взаимодействия в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системе из - за различия разных экспериментальных данных имеют большую неоднозначность. Однако теперь становится ясно, что в пределах этой неопределенности можно найти параметры, позволяющие правильно воспроизвести энергию связи ядра ${}^7\text{Li}$.

С полученными волновыми функциями для массового и зарядового трехтельных среднеквадратичных радиусов найдено 2.78 Фм и 2.51 Фм соответственно, что несколько больше эксперимента [162-186], где для зарядового радиуса получены величины 2.39(3) и 2.35(10) Фм.

Однако, здесь использовался $n^2\text{H}$ потенциал, приводящий к завышенному радиусу трития, что повлияло и на радиус самого ядра ${}^7\text{Li}$. Тем самым, дейтронный кластер нужно деформировать, как в ядре трития, так и в ${}^7\text{Li}$, поскольку в свободном состоянии дейтрон очень "рыхлая" система. Для того чтобы получить правильный зарядовый радиус ядра 2.39 Фм необходимо уменьшить радиус дейтронного кластера и принят его равным 1.42 Фм, т.е. уменьшить его на те же 27%, как это было для ядра трития. Для массового радиуса, в таком случае, находим 2.64 Фм. Тем самым получаем, что дейтронный кластер примерно одинаково деформирован, как в тритии, так и в ядре ${}^7\text{Li}$, что хорошо согласуется с ${}^3\text{H}^4\text{He}$ моделью этого ядра.

Другой возможной причиной завышения зарядового радиуса ядра ${}^7\text{Li}$ без деформаций дейтрона может быть отсутствие учета, в разных парах частиц, потенциалов для других парциальных волн. Например, наряду с P волной в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системе можно учитывать S взаимодействие, а в $n^4\text{He}$ канале - P волну.

Но поскольку радиус ядра, без деформации дейтрона, завышен всего на 4 - 5%, а квадрупольный момент оказывается равен -35.5 мб, что меньше экспериментальной величины только на 3 - 4%, можно, по - видимому, считать, что учет дополнительных парциальных волн в парных потенциалах приведет только к небольшим поправкам для полученных величин.

Найденная вероятность двухчастичного ${}^3\text{H}^4\text{He}$ канала 98.1%, вполне объясняет успешное использование простой двухкластерной модели, позволяющей получить хорошие результаты для многих характеристик ядра ${}^7\text{Li}$ [162-186, 91].

Для двухчастичных радиусов на основе (3.59) найдено 2.68 Фм и 2.63 Фм соответственно, что несколько больше экспериментальной величины и результатов, получаемых в двухкластерной модели с запрещенными состояниями [162-186,91]. Кулоновская энергия ядра, которая представляется в виде среднего от кулоновского матричного элемента, оказалась равна 0.77 МэВ.

Для энергии связи ядра ${}^7\text{Be}$, если рассматривать его с теми же параметрами волновой функции, но учесть кулоновское взаимодействие между частицами (13) и (23) найдено -7.15 МэВ, что только на 1% отличается от экспериментальной величины -7.08 МэВ [190].

Таким образом, видно, что описанные методы и компьютерная программа позволяет воспроизвести известные ранее результаты, что говорит об их работоспособности. А рассмотренная трехкластерная модель ядра ${}^7\text{Li}$ позволяет получить новые результаты, хорошо передающие экспериментальные данные по основным характеристикам ядра ${}^7\text{Li}$ и приводящие к большой вероятности ${}^3\text{H}^4\text{He}$ канала. Именно использованные парные взаимодействия дают наибольший вклад в рассмотренные характеристики, а учет деформаций дейтрона приводит к правильному зарядовому радиусу ядра [187].

6. МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЙ ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЯ

В этой главе рассматриваются математические численные методы расчета дифференциальных сечений упругого рассеяния ядерных частиц с различным спином. В таких задачах не требуется решения уравнения Шредингера, но все эти методы использованы в следующей главе при рассмотрении фазового анализа, основанного на многопараметрическом вариационном методе.

Когда известны дифференциальные сечения, определяемые экспериментальным путем, почти всегда можно найти определенный набор ядерных фаз (т.е. некоторых параметров), который способен, с той или иной точностью, передать форму этих сечений. Качество описания экспериментальных данных на основе некоторой функции (функционала нескольких переменных) можно оценить по методу χ^2 - квадрат, который записывается в виде [57]

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i^t(\theta) - \sigma_i^e(\theta)}{\Delta \sigma_i^e(\theta)} \right]^2 ,$$

где σ_e и σ_t – экспериментальное и теоретическое, т.е. расчетное при некоторых заданных значениях фаз $\delta_{s,L}^J$ рассеяния сечение упругого рассеяния ядерных частиц для i – го угла рассеяния.

6.1 Система частиц с нулевым полным спином

Наиболее простые формулы для сечений ядерного рассеяния получаются в случае рассеяния частиц со спином ноль, поскольку отсутствует спин - орбитальное расщепление фаз. Если частицы не тождественны, например, ${}^4\text{He}^{16}\text{O}$ или ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$, то сечение определяется наиболее просто и записывается, как квадрат модуля амплитуды рассеяния [57]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 , \quad (6.1)$$

где сама амплитуда представляется в виде суммы кулоновской (с) и ядерной (N) амплитуд

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f_N(\theta) , \quad (6.2)$$

которые выражаются через ядерные $\delta_L \rightarrow \delta_L + i\Delta_L$ и кулоновские σ_L фазы рассеяния

$$f_c(\theta) = - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0\} ,$$

$$f_N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L - 1] P_L(\cos\theta) . \quad (6.3)$$

Здесь $S_L(k) = \eta_L(k) \exp[2i\delta_L(k)]$ - матрица рассеяния, которая может быть представлена в виде

$$\frac{(S_L - 1)}{2i} = \eta_L \sin\delta_L \exp(i\delta_L) ,$$

а $\eta_L(k) = \exp[-2\Delta_L(k)]$ - параметр неупругости, зависящий от мнимой части ядерной фазы $\text{Im } \delta_L = \Delta_L(k)$, $P_L(x)$ - полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n ,$$

η - кулоновский параметр, μ - приведенная масса, k - волновое число относительного движения частиц - $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$, E - энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс.

Из (6.3) легко получить полное сечение упругого рассеяния при $f_c = 0$. Взяв квадрат модуля от f_N , интегрируя по углам и учитывая ортогональность полиномов Лежандра ($x = \cos\theta$) [57]

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 P_L(x) P_{L'}(x) dx d\varphi = \frac{4\pi\delta_{LL'}}{2L+1}$$

будем иметь

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_L [(2L+1)(1 - |S_L|^2)] = \frac{4\pi}{k^2} \sum_L (2L+1) \eta_L^2 \sin^2\delta_L . \quad (6.4)$$

Полное сечение реакций или неупругих процессов можно представить в виде [57,102]

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_L [(2L+1)(1 - |S_L|^2)]$$

и при подстановке выражения для матрицы рассеяния полу-

чим

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_L (2L+1)(1-\eta_L^2) \quad (6.5)$$

Для нахождения полиномов Лежандра можно использовать начальные значения и рекуррентное соотношение [73]

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x, \\ P_L(x) &= (2L-1)x/LP_{L-1}(x) - (L-1)/LP_{L-2}(x), \end{aligned}$$

где значения L начинаются с 2. Кулоновскую амплитуду рассеяния (6.3), используя выражение

$$A = \text{Sin}^{-2}(\theta/2) = 2/[1 - \text{Cos}(\theta)] \quad ,$$

можно записать в виде

$$f_c = -\eta A/2k [\text{Cos}(B) + i\text{Sin}(B)] \quad , \quad (6.6)$$

где $B = 2\sigma_0 + \eta \ln A$. Ядерная амплитуда (6.3) может быть представлена в следующей форме

$$f_n = \frac{1}{2k} \sum_L \hat{L} \left\{ [\beta \text{Cos}(2\sigma_L) + \alpha \text{Sin}(2\sigma_L)] + i[\beta \text{Sin}(2\sigma_L) - \alpha \text{Cos}(2\sigma_L)] \right\} P_L(x) \quad (6.7)$$

где $x = \text{Cos}(\theta)$, $\hat{L} = 2L+1$, а $\alpha = \eta_L \text{Cos}(2\delta_L) - 1$ и $\beta = \eta_L \text{Sin}(2\delta_L)$ зависят только от ядерных фаз, параметра неупругости и орбитального момента.

Кулоновские фазы рассеяния выражаются через Гамма - функцию [84]

$$\sigma_L = \arg\{\Gamma(L+1+i\eta)\}$$

и удовлетворяют рекуррентному процессу

$$\sigma_L = \sigma_{L+1} - \text{Arctg}\left(\frac{\eta}{L+1}\right) \quad .$$

Откуда сразу можно получить следующее выражение для кулоновских фаз

$$\alpha_L = \sigma_L - \sigma_{L-1} = \sum_{n=1}^L \text{Arctg}\left(\frac{\eta}{n}\right), \quad \alpha_0 = 0. \quad (6.8)$$

Величина α_L используется в преобразованных выражениях (6.3), если вынести общий множитель $\exp(2i\sigma_0)$. Тогда $\sigma_L \rightarrow \alpha_L$ с $\alpha_0 = 0$, что избавляет от необходимости вычислять кулоновские фазы в явном виде, а кулоновская амплитуда принимает вид

$$f_c(\theta) = -\left(\frac{\eta}{2k\text{Sin}^2(\theta/2)}\right) \exp\{i\eta \ln[\text{Sin}^{-2}(\theta/2)]\}.$$

В случае рассеяния тождественных бозонов, например, при рассеянии ядер ${}^4\text{He}^4\text{He}$, формула сечения (6.1) преобразуется к виду [196, 197, 198]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2, \quad (6.9)$$

где $f(\theta)$ определено формулами (6.2) и (6.3). Такая запись позволяет учитывать эффекты, которые дает симметризация волновых функций системы тождественных частиц.

Поскольку $\text{Cos}(\pi - \theta) = -\text{Cos}\theta = -x$ и $P_L(-x) = (-1)^L P_L(x)$, то величина ядерной амплитуды просто удваивается. Суммирование в (6.3) идет только по четным L , поскольку нечетные парциальные волны не дают вклада в суммарное сечение.

В кулоновской амплитуде выполняется преобразование величины A к виду

$$A = \text{Sin}^{-2}[(\pi - \theta)/2] = 2/[1 - \text{Cos}(\pi - \theta)] = 2/[1 + \text{Cos}(\theta)]$$

Формулы (6.1) - (6.3) можно использовать для расчета синглетных сечений (при полном спине $S = 0$) в системах, когда обе частицы имеют спин $1/2$, например, для пр, ${}^3\text{H}^3\text{He}$ или N^3He , N^3H и т.д.

Приведем пример программы для вычисления сечений упругого рассеяния тождественных и не тождественных бозонов с нулевым спином. Здесь приняты следующие обозначения: NN=0 - Нижнее значение энергии, NV=0 - Верхнее значение энергии, LN=0 - Нижнее значение момента, LV=12 - Верхнее значение момента, LH=2 - Шаг по значениям момента, TMI=10 - Нижнее значение угла рассеяния, TMA=90 - Верхнее значение угла рассеяния, TH=1 - Шаг по углу, AM1, AM2, Z1, Z2 - Массы и заряды частиц,

E1(0) - Лабораторная энергия частиц, FR(0) - Реальная часть фазы рассеяния, FM(0) - Мнимая часть фазы рассеяния [199].

REM CROSS SECTION CALCULATE FOR COMPLEX PHASE SHIFTS OF SYSTEM WITH 0 SPIN

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: N=200
DIM E(N), DE(N), E1(N), ETA(N), SEC(N), SECE(N), FM(N/10),
FR(N/10)
REM *****
ISAVE=0:      REM =0 - NO SAVE, =1 - SAVE IN FILE
G$="C:\BASICA\SEC\SECALAL.DAT"
REM ***** INPUT PARAMETERS *****
PI=4*ATN(1): NN=0: NV=0: LN=0: LV=12: LH=2: TMI=10:
TMA=90
TH=1: AM1=4: AM2=4: Z1=2: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
B1=2*PM/A1
REM ***** ENERGY IN LAB SYSTEM *****
E1(0)=53.4: E1(6)=119.86
REM ***** PHASE SHIFTS *****
REM ***** FOR AL-AL ON E=53.4 *****
FR(0)=-75.2: FR(2)=47.9: FR(4)=137.9: FR(6)=27.5: FR(8)=2:
FR(10)=0
FM(0)=12.1: FM(2)=22.1: FM(4)=16.3: FM(6)=3.2: FM(8)=0:
FM(10)=0
REM ***** FOR AL-AL ON E=119.9 *****
GOTO 111
FR(0)=-161.5: FR(2)=-16: FR(4)=130.3: FR(6)=93.8: FR(8)=26:
FR(10)=7
FR(12)=1.7: FM(0)=15.7: FM(2)=15.6: FM(4)=13.8
FM(6)=26.6: FM(8)=18.3: FM(10)=3.7: FM(12)=0.
111 REM ***** ПЕРЕВОД ФАЗ В РАДИАНЫ *****
FOR L=LN TO LV STEP LH: FM(L)=FM(L)*PI/180
FR(L)=FR(L)*PI/180
NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SIGMAR=0: SIGMAS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: A=FR(L): ETA(L)=EXP(-2*FM(L))
SIGMAR=SIGMAR+(2*L+1)*(1-(ETA(L))^2)
SIGMAS=SIGMAS+(2*L+1)* (ETA(L))^2 *(SIN(A))^2
NEXT L: SIGMA=10*4*PI*SIGMA/SK

```

```

PRINT "          SIGR -TOT = ";
PRINT USING " #####.### ";SIGMAR
PRINT "          SIGS -TOT = ";
PRINT USING " #####.### ";SIGMAS: NEXT J: PRINT
REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL SEC (FR(), GG, SS, TMI, TMA, TH, SEC(), ETA(), LN,
LV,LH, IUSLOV)
FOR T=TMI TO TMA/3 STEP TH
PRINT USING " #####.### "; T; SEC(T); T+20; SEC(T+20); T+40;
SEC(T+40); T+60; SEC(T+60): NEXT
REM ***** SAVE IN FILE *****
IF ISAVE=0 GOTO 221
OPEN "O",1,G$: PRINT#1, "          ALPHA - ALPHA FOR LAB
E=";
PRINT#1, E1(NN): FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " #####^ ^ ^ ";T;SEC(T): NEXT
221 END
SUB SEC (F(100), GG, SS, TMI, TMA, TH, S(100),E (100), LMI,
LMA, LH, NYS)
REM ----- CROSS SECTIONS -----
SHARED PI: DIM S0(20),P(20)
RECU1=0: AIMCU1=0: CALL CULFAZ(GG,S0())
FOR TT=TMI TO TMA STEP TH: T=TT*PI/180: X=cos(T): A=2/(1-
X)
S0=2*S0(0): BB=-GG*A: ALO=GG*LOG(A)+S0
RECU=BB*cos(ALO)
AIMCU=BB*sin(ALO): IF NYS=0 GOTO 555
A1=2/(1+X): BB1=-GG*A1
ALO1=GG*LOG(A1)+S0: RECU1=BB1*cos(ALO1)
AIMCU1=BB1*sin(ALO1)
555 RENU=0: AIMNU=0: FOR L=LMI TO LMA STEP LH
AL=E(L)*cos(2*F(L))-1: BE=E(L)*sin(2*F(L)): LL=2*L+1
SL=2*S0(L)
CALL POLLEG(X,L,P())
RENU=RENU+LL*(BE*cos(SL)+AL*sin(SL))*P(L)
AIMNU=AIMNU+LL*(BE*sin(SL)-AL*cos(SL))*P(L): NEXT
L
IF NYS=0 GOTO 556: AIMNU=2*AIMNU: RENU=2*RENU
556 RE=RECU+RECU1+RENU
AIM=AIMCU+AIMCU1+AIMNU
S(TT)=10*(RE^2+AIM^2)/4/SS^2: NEXT TT: END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2): NEXT: END SUB

```


SUB CULFAZ(G,F(20))

```

REM ----- COULOMB PHASE SHIFTS -----
C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5
S=S+A: NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ
FOR I=1 TO 20: F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB
    
```

Контрольный счет по этой программе выполнен для сечений упругого рассеяния в $^4\text{He}^4\text{He}$ системе при энергии 29.5 МэВ с данными из работы [200]. В работе приведены экспериментальные сечения σ_e вместе со своими ошибками, показанные в таблице 6.1 в зависимости от угла рассеяния θ и результаты фазового анализа, которые даны в таблице 6.2 для $E = 29.5$ МэВ.

Таблица 6.1 - Сечения рассеяния

θ , град	E = 29.5 МэВ			E = 18.0 МэВ		
	σ_e , мб/ст [200]	$\Delta\sigma_e$, мб/ст [200]	σ_t , мб/ст [200]	σ_e , мб/ст [200]	$\Delta\sigma_e$, мб/ст [200]	σ_t , мб/ст [200]
22	1523	11.9	1521.64	961.9	3.6	950.59
30	422.6	5.7	425.14	557.6	3.1	559.08
40	44.68	0.25	44.51	219.2	1.5	221.06
50	135.58	0.7	134.30	79.81	0.6	81.03
60	107.83	0.8	108.36	55.79	0.3	55.52
70	33.77	0.2	33.70	97.20	0.6	96.96
80	124.20	1.0	121.70	165.18	0.78	165.32
90	211.20	1.1	211.67	199.16	0.84	199.22

Таблица 6.2 - Фазы рассеяния

E, МэВ	δ_0 , град	δ_2 , град	δ_4 , град	δ_6 , град	δ_8 , град
29.5	-29.12±0.17	86.90±0.13	121.19±0.17	2.20±0.11	0.11±0.08

Ниже приведены подробные результаты расчета сечений σ_t при 29.5 МэВ с точными значениями углов рассеяния и табличными фазами, вычислением χ_i^2 на каждую точку (экспериментальные ошибки из [200]) и среднего χ^2 по всем точкам по нашей программе.

$$\chi^2 = 1.086$$

$$\sigma_s = 1044.66 \text{ мб}$$

θ	σ_t	σ_e	χ_i^2	θ	σ_t	σ_e	χ_i^2
22.04	1514.27	1523.00	0.54	56.09	140.40	139.86	0.58

24.05	1167.29	1164.00	0.10	58.10	126.34	127.10	0.84
26.05	869.26	885.90	3.53	60.10	107.33	107.83	0.39
28.05	620.34	616.10	0.35	62.10	86.08	86.66	0.52
30.06	419.86	422.60	0.23	64.10	65.55	66.12	0.70
32.06	268.10	270.00	0.22	66.10	48.53	48.43	0.04
34.06	160.37	160.20	0.00	68.11	37.33	37.43	0.10
36.07	91.26	91.50	0.02	70.11	33.71	33.77	0.11
38.07	55.13	55.53	0.29	72.11	38.34	38.34	0.00
40.07	44.49	44.68	0.61	74.11	51.05	50.74	0.33
42.08	52.11	52.96	2.96	76.11	70.77	70.82	0.00
44.08	70.83	71.74	1.53	78.11	95.64	95.55	0.01
46.08	94.23	95.44	2.13	80.11	123.24	124.20	0.89
48.08	116.95	118.46	3.42	82.11	150.84	153.40	5.83
50.09	134.96	135.58	0.84	84.11	175.70	177.50	3.06
52.09	145.40	145.62	0.16	86.11	195.31	197.00	2.71
54.09	147.16	147.60	0.36	88.11	207.72	209.74	4.40

В работе [200] для среднего χ^2 была получена величина 0.68. Однако нельзя напрямую сравнивать ее, с приведенным выше значением, поскольку в [200] использовались несколько другие методы расчета χ^2 , которые учитывают некоторый весовой множитель. Если учесть весовые множители из [200] и разделить среднее χ^2 на степени свободы, как это делается в работе [200], то можно получить величину 0.6, вполне согласующуюся с результатами [200].

6.2 Система частиц с полным спином 1/2

Рассмотрим теперь рассеяние в системе частиц с полным спином 1/2, т.е. одна частица имеет нулевой, а вторая полуцелый спин и учтем спин - орбитальное расщепление фаз. Такое рассеяние имеет место в ядерных системах типа $N^4\text{He}$, $^3\text{H}^4\text{He}$ и т.д.

Сечение упругого рассеяния таких частиц представляется в виде [57]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |A(\theta)|^2 + |B(\theta)|^2, \quad (6.10)$$

где

$$A(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} \{(L+1)S_L^+ + LS_L^- - (2L+1)\} \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos\theta),$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} (S_L^+ - S_L^-) \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos\theta). \quad (6.11)$$

Здесь $S_L^\pm = \eta_L^\pm \exp(2i\delta_L^\pm)$ - матрица рассеяния, η_L^\pm - параметры неупругости, а знаки “ \pm ” соответствуют полному моменту системы $J = L \pm 1/2$, f_c - кулоновская амплитуда, описанная выше (6.2), $P_n^m(x)$ - присоединенные полиномы или функции Лежандра [73]

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

которые можно вычислять по рекуррентным формулам вид

$$P_{L+1}^1(x) = \frac{(2L+1)x}{L} P_L^1(x) - \frac{L+1}{L} P_{L-1}^1(x)$$

с начальными значениями

$$P_0^1(x) = 0, \quad P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}, \quad P_2^1(x) = 3xP_1^1(x).$$

Через величины А и В можно выразить и поляризацию в упругом рассеянии таких частиц [57]

$$P(\theta) = \frac{2\text{Im}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2}. \quad (6.12)$$

Расписывая выражение (6.11) для В получим

$$\text{Re } B = \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [a\text{Sin}(2\sigma_L) + b\text{Cos}(2\sigma_L)] P_L^1(x), \quad (6.13)$$

$$\text{Im } B = \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [b\text{Sin}(2\sigma_L) - a\text{Cos}(2\sigma_L)] P_L^1(x),$$

где

$$a = \eta_L^+ \text{Cos}(2\delta_L^+) - \eta_L^- \text{Cos}(2\delta_L^-)$$

$$b = \eta_L^+ \text{Sin}(2\delta_L^+) - \eta_L^- \text{Sin}(2\delta_L^-).$$

Аналогичным способом для амплитуды А можно найти следующие выражения [201]

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A &= \operatorname{Re} f_c + \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [c \sin(2\sigma_L) + d \cos(2\sigma_L)] P_L(x) , \\ \operatorname{Im} A &= \operatorname{Im} f_c + \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [d \sin(2\sigma_L) - c \cos(2\sigma_L)] P_L(x) , \end{aligned} \quad (6.14)$$

где

$$c = (L+1)\eta_L^+ \cos(2\delta_L^+) + L\eta_L^- \cos(2\delta_L^-) - (2L+1)$$

$$d = (L+1)\eta_L^+ \sin(2\delta_L^+) + L\eta_L^- \sin(2\delta_L^-)$$

Для вычисления поляризации можно использовать следующие соотношения

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{Re} B + i \operatorname{Im} B = C + iD \quad , \quad A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A = G + iF \quad , \\ AB^* &= CG + FD + i(FC - GD) \quad , \\ \operatorname{Im}(AB^*) &= FC - GD = \operatorname{Re} B \operatorname{Im} A - \operatorname{Re} A \operatorname{Im} B \quad , \end{aligned}$$

которые непосредственно используются для численных компьютерных расчетов.

Для полного сечения реакций существует выражение, аналогичное системе с нулевым спином [57]

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_L \left[(L+1) \left(1 - |S_L^+|^2 \right) + L \left(1 - |S_L^-|^2 \right) \right] , \quad (6.15)$$

а для полного сечения упругого рассеяния

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_L \left[(L+1) |1 - S_L^+|^2 + L |1 - S_L^-|^2 \right] . \quad (6.16)$$

Расписать их можно точно так же, как в предыдущем случае, например

$$\sigma_r = \frac{\pi}{k^2} \sum_L \left\{ (L+1) \left[1 - (\eta_L^+)^2 \right] + L \left[1 - (\eta_L^-)^2 \right] \right\} . \quad (6.17)$$

Приведем текст компьютерной программы для расчета полных и дифференциальных сечений упругого рассеяния частиц с полуцелым спином [201]. Используемые здесь обозначения практически

совпадают с обозначениями в предыдущей программе.

**REM CROSS SECTION CALCULATE OF COMPLEX PHASE
SHIFTS FOR SYSTEM WITH 1/2 SPIN**

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: N=200
DIM E(N), DE(N), E1(N), ETA(N), SEC(N), SECE(N), FM(N/10),
FR(N/10), POL(N)
REM *****
ISAVE=0: REM =0 - NO SAVE, =1 - SAVE IN FILE
G$="C:\BASICA\SEC\AL-N1.DAT"
REM ***** INPUT PARAMETERS *****
PI=4*ATN(1): NN=0: NV=0: LN=0: LV=2: LH=1: TMI=10:
TMA=170
TH=2: AM1=1: AM2=4: Z1=1: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
B1=2*PM/A1
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
E1(0)=9.954
REM ***** PHASE SHIFTS *****
REM ***** FOR P-AL ON E=9.954 *****
FP(0)=111: FP(1)=103: FP(2)=-2: FM(0)=111: FM(1)=52: FM(2)=-4
111 FOR L=LN TO LV STEP LH: FM(L)=FM(L)*PI/180
FP(L)=FP(L)*PI/180: NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SIGMAR=0: SIGMAS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: AP=FP(L): AM=FM(L): ETAP(L)=1
ETAM(L)=1
SIGMAR = SIGMAR + ((L + 1)*(1 - (ETAP(L))^2) + L*(1 -
(ETAM(L))^2))
SIGMAS = SIGMAS + ((L + 1)*(ETAP(L))^2*(SIN(AP))^2 +
L*(ETAM(L))^2*(SIN(AM))^2): NEXT L
SIGMAR=10*4*PI*SIGMAR/SK: SIGMAS=10*4*PI*SIGMAS/SK
PRINT "          SIGMR-TOT=";
PRINT USING " #####.### ";SIGMAR
PRINT "          SIGMS-TOT=";
PRINT USING " #####.### ";SIGMAS: NEXT J: PRINT
REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL SEC (FP(), GG, SS, TMI, TMA, TH, SEC(), FM(), LN, LV, LH,
POL())
FOR T=TMI TO (TMA/3.3) STEP TH
PRINT USING " ### ";T,: PRINT USING " #####.## " ;SEC(T);

```

```

PRINT T+42;: PRINT USING " #####.## " ;SEC(T+42);
PRINT T+84;: PRINT USING " #####.## " ;SEC(T+84);
PRINT T+126;: PRINT USING " #####.## " ;SEC(T+126): NEXT
PRINT "-----"
FOR T=TMI TO (TMA/3.3) STEP TH
PRINT T;: PRINT USING "+###.### " ;POL(T);
PRINT T+42;: PRINT USING "+###.### " ;POL(T+42);
PRINT T+84;: PRINT USING "+###.### " ;POL(T+84);
PRINT T+126;: PRINT USING "+###.### " ;POL(T+126): NEXT
REM ***** SAVE IN FILE *****
IF ISAVE=0 GOTO 221
OPEN "O",1,G$: PRINT#1, " P - ALPHA FOR LAB E=";
PRINT#1, E1(NN): FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " +#.###^^^ " ;T;SEC(T);POL(T): NEXT
221 END
SUB SEC (FP(100), GG, SS, TMI, TMA, TH, S(100), FM(100),
LMI, LMA, LH, POL(100))
REM ----- CROSS SECTION CALCULATION -----
SHARED PI: DIM S0(20),P(20),PP(20)
CALL CULFAZ(GG,S0()); FOR TT=TMI TO TMA STEP TH
T=TT*PI/180: X=COS(T): A=2/(1-X): S0=2*S0(0): BB=-GG*A
ALO=GG*LOG(A)+S0: REC=BB*COS(ALO): AMC=BB*SIN(ALO)
REA=0: AMA=0: REB=0: AMB=0: FOR L=LMI TO LMA STEP
LH
FP=2*FP(L): FM=2*FM(L): A=COS(FP)-COS(FM): B=SIN(FP)-
SIN(FM)
SL=2*S0(L): CALL FUNLEG(X,L,PP())
REB=REB+(B*COS(SL)+A*SIN(SL))*PP(L)
AMB=AMB+(B*SIN(SL)-A*COS(SL))*PP(L): LL=2*L+1: JJ=L+1
A=JJ*COS(FP)+L*COS(FM)-LL: B=JJ*SIN(FP)+L*SIN(FM)
CALL POLLEG(X,L,P());
REA=REA+(B*COS(SL)+A*SIN(SL))*P(L)
AMA=AMA+(B*SIN(SL)-A*COS(SL))*P(L): NEXT L
REA=REC+REA: AMA=AMC+AMA: RE=REA^2+AMA^2
AM=REB^2+AMB^2: S(TT)=10*(RE+AM)/4/SS^2
POL(TT)=2*(REB*AMA-REA*AMB)/(RE+AM): NEXT TT: END
SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB FUNLEG(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): P(2)=3*X*P(1): FOR I=2 TO L
P(I+1)=(2*I+1)*X/I*P(I)-(I+1)/I*P(I-1): NEXT: END SUB
SUB CULFAZ(G,F(20))

```

```

REM ----- COULOMB PHASE SHIFTS -----
C=0.577215665; S=0; N=50; A1=1.202056903/3; A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5; S=S+A; NEXT
FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S; F(0)=FAZ; FOR I=1 TO 20
F(I)=F(I-1)+ATN(G/(I)): NEXT; END SUB
    
```

Приведем теперь результаты контрольного счета сечений и поляризаций для $r^4\text{He}$ системы при энергии $E_p = 9.954$ МэВ. Дифференциальные сечения σ_e (Таблица 6.3) измерялись в работе [202], там же проведен фазовый анализ (Таблица 6.4). С найденными фазами в [202] вычислялись сечения σ_i и поляризации $P_i(\theta)$, которые вместе с экспериментальными сечениями σ_e также даны в таблице 6.3 [202]. Ошибки экспериментальных сечений не превышают 2%. При столь малых энергиях все фазы рассеяния число действительные и параметры неупругости равны единице.

Таблица 6.3 - Сечения рассеяния

θ , град	σ_e , Мб/ст [202] экспер.	σ_i , мб/ст [202] расчет	σ_0 , мб/ст Наш расчет	$P_i(\theta)$, % [202] расчет	$P_0(\theta)$, % Наш расчет
25.1	371	372	370.65	-11	-10.73
30.89	339	335	333.31	-16	-15.50
35.07	305	311	309.72	-19	-18.95
49.03	232	233	232.33	-32	-31.54
54.7	205	202	201.05	-37	-37.44
60.0	176	173	172.57	-44	-43.49
70.1	124	123	122.27	-57	-56.62
80.0	82	81	80.70	-71	-70.91
90.0	49.2	49.1	48.91	-82	-82.18
94.07	39.1	39.4	39.24	-82	-82.30
102.17	26.2	25.9	25.79	-61	-61.28
106.9	22.0	21.5	21.44	-29	-28.71
109.9	21.0	20.0	19.96	-1	-0.96
120.6	23.0	22.0	21.98	86	85.85
122.8	24.5	23.7	23.63	94	93.82
130.13	31.9	31.6	31.56	99	98.82
130.90	33.2	32.6	32.57	98	98.05
134.87	37.8	38.3	38.21	92	91.98
140.8	47.3	47.7	47.59	80	79.51
145.0	54.0	54.7	54.56	70	69.95
149.4	61.6	62.0	61.84	60	60.01
154.9	70.4	70.6	70.48	48	48.08

160.0	78.4	77.8	77.60	38	37.58
164.4	84.9	83	82.78	29	28.91

Таблица 6.4 - Фазы рассеяния

δ_L , град	$S_{1/2}$	$P_{1/2}$	$P_{3/2}$	$D_{3/2}$	$D_{5/2}$
$E = 9.954$ МэВ	111	52	103	-4	-2

Результаты вычисления сечений σ_0 и поляризаций P_0 по приведенной выше программе с табличными фазами для $E = 9.954$ МэВ также показаны в таблице 6.3 и приводят к величине χ^2 для сечений равной 0.96 при 2% ошибках экспериментальных сечений.

Видно, что отклонение расчетных сечений от результатов расчета из работы [202] для первых трех точек около $1.0 \div 1.5$ мб/ст, по остальным точкам менее 1.0 мб/ст, а отклонения поляризаций около 0.5%, что связано, по - видимому, с округлением численных результатов в работе [202].

Некоторые другие результаты для этой системы частиц мы приведем в следующей главе, где будут рассмотрены методы фазового анализа экспериментальных сечений рассеяния.

6.3 Система частиц с единичным полным спином

В случае системы частиц, когда одна из них имеет нулевой спин, а вторая равный 1, например, для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системы, формулы дифференциальных сечений с учетом только спин - орбитального взаимодействия записываются в виде [57]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{3} \left[|A|^2 + 2(|B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2) \right], \quad (6.18)$$

где амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} A &= f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{L=0} \{ (L+1)\alpha_L^+ + L\alpha_L^- \} \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos\theta), \\ B &= f_c(\theta) + \frac{1}{4ik} \sum_{L=0} \{ (L+2)\alpha_L^+ + (2L+1)\alpha_L^0 + (L-1)\alpha_L^- \} \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos\theta), \\ C &= \frac{1}{2ik\sqrt{2}} \sum_{L=1} \{ \alpha_L^+ - \alpha_L^- \} \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos\theta), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$D = \frac{1}{2ik\sqrt{2}} \sum_{L=1} \frac{1}{L(L+1)} \{L(L+2)\alpha_L^+ - (2L+1)\alpha_L^0 - (L-1)(L+1)\alpha_L^-\} \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos\theta) ,$$

$$E = \frac{1}{4ik} \sum_{L=2} \frac{1}{L(L+1)} \{L\alpha_L^+ - (2L+1)\alpha_L^0 + (L+1)\alpha_L^-\} \exp(2i\sigma_L) P_L^2(\cos\theta) .$$

Здесь определена величина $\alpha^J = (S^J - 1)$ для каждого состояния с полным моментом $J = L \pm 1$ (α^+ и α^-) и $J = L$ (α^0). Отметим, что существует и другая форма записи выражений для сечений, представленная через производные полиномов Лежандра [73].

Функция Лежандра $P_L^1(x)$ были рассмотрены выше, а $P_L^2(x)$ вычисляются по рекуррентным формулам типа

$$P_{L+1}^2(x) = \frac{(2L+1)x}{L-1} P_L^2(x) - \frac{L+2}{L-1} P_{L-1}^2(x)$$

с начальными значениями

$$P_0^2(x) = P_1^2(x) = 0 , \quad P_2^2 = 3(1-x^2) , \quad P_3^2(x) = 5xP_2^2(x).$$

Полное сечение реакций и неупругих процессов записывается теперь в виде [57]

$$\sigma_r = \frac{\pi}{3k^2} \sum_L \left[(2L+3) \left(1 - |S_L^+|^2 \right) + (2L+1) \left(1 - |S_L^0|^2 \right) + (2L-1) \left(1 - |S_L^-|^2 \right) \right] . \quad (6.20)$$

Для векторной поляризации в такой системе существует выражение [57]

$$P = \frac{\sqrt{8}}{3} \frac{\text{Im}(AC^* + BD^* + DE^*)}{d\sigma / d\Omega} . \quad (6.21)$$

Кроме векторных поляризаций имеются и тензорные поляризации, которые выражаются через амплитуды рассеяния следующим образом [57]

$$\begin{aligned}
 t_{20} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{|A|^2 + 2|D|^2}{d\sigma / d\Omega} \right) , \\
 t_{21} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\text{Re}(AC^* - BD^* + DE^*)}{d\sigma / d\Omega} \right) , \\
 t_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2 \text{Re}(BE^*) - |C|^2}{d\sigma / d\Omega} \right) .
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Причем

$$t_{11} = (3/2)^{1/2} P .$$

Расписывая выражения (6.19) и вынося за знак модуля общий делитель $2k$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 A &= \text{Re}f_c + i \text{Im}f_c + \\
 &+ \sum_L \{ [A_2 \text{Cos}(2\sigma_L) + A_1 \text{Sin}(2\sigma_L)] + i [A_2 \text{Sin}(2\sigma_L) - A_1 \text{Cos}(2\sigma_L)] \} P_L^m(x) ,
 \end{aligned}$$

где $m = 0$ для A и B ($P_L^0 = P_L$),

$$A_1 = (L+1)\alpha_1^+ + L\alpha_1^-$$

$$A_2 = (L+1)\alpha_2^+ + L\alpha_2^-$$

и

$$\alpha_L^k = \alpha_{1,L}^k + i\alpha_{2,L}^k = [\eta_L^k \text{Cos}(2\delta_L^k) - 1] + i\eta_L^k \text{Sin}(2\delta_L^k) .$$

где $k = "+", "-"$ и $"0"$. Для всех остальных амплитуд получают аналогичные выражения с заменой A_i ($i = 1, 2$) на следующие величины

$$B_i = \frac{1}{2} [(L+2)\alpha_i^+ + (2L+1)\alpha_i^0 + (L-1)\alpha_i^-] ,$$

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha_i^+ - \alpha_i^-] ,$$

$$D_i = \frac{1}{\sqrt{2} L(L+1)} [L(L+2)\alpha_i^+ - (2L+1)\alpha_i^0 - (L^2-1)\alpha_i^-] ,$$

$$E_i = \frac{1}{2L(L+1)} [L\alpha_i^+ - (2L+1)\alpha_i^0 + (L+1)\alpha_i^-] .$$

Для степени функции Лежандра в амплитудах С и D принимаем $m = 1$, а для амплитуды E величина $m = 2$. Кулоновские амплитуды учитываются только в амплитудах А и В.

Приведем теперь программу для расчетов дифференциальных сечений в системе частиц с единичным спином [203]. Обозначения в этой программе практически совпадают с обозначениями для системы со спином 1/2.

REM CALCULATE OF CROSS SECTION ON COMPLEX PHASE SHIFTS FOR SYSTEM WITH 1 SPIN

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: N=200
DIM E(N),DE(N),E1(N),EP(N/10),EM(N/10),E0(N/10)
DIM SEC(N), SECE(N), FM(N/10), F0(N/10), FP(N/10)
REM *****
ISAVE=1: REM =0 - NO SAVE, =1 - SAVE IN FILE
G$="C:\BASICA\SEC\AL-d1.DAT"
REM ***** INPUT PARAMETERS *****
PI=4*ATN(1): NN=1: NV=1: LN=0: LV=2: LH=1: TMI=10:
TMA=170
TH=2: AM1=2: AM2=4: Z1=1: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
E1(0)=4.3: E1(1)=4
REM ***** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION 4.0 *****
SECE(30)=220: SECE(40)=160: SECE(50)=120
SECE(60)=80: SECE(70)=60: SECE(80)=50
SECE(90)=45: SECE(100)=55: SECE(110)=70
SECE(120)=100: SECE(130)=120: SECE(140)=180
REM ***** PHASE SHIFTS *****
REM ***** FOR D-AL ON E=4 *****
FP(0)=99.3: FP(1)=6.6: FP(2)=172.9: F0(0)=99.3: F0(1)=1.2:
F0(2)=53.2
FM(0)=99.3: FM(1)=-0.5: FM(2)=18.4: FOR L=LN TO LV STEP LH
FM(L)=FM(L)*PI/180: FP(L)=FP(L)*PI/180: F0(L)=F0(L)*PI/180:
NEXT
    
```

```

REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SIGMAR=0: SIGMAS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: AP=FP(L): AM=FM(L): A0=F0(L)
EP(L)=1: EM(L)=1
SIGMAR = SIGMAR + (2 * L + 3) * (1 - (EP(L))^2) + (2 * L + 1) * (1
- (E0(L))^2) + (2 * L-1) * (1 - EM(L))^2
SIGMAS = SIGMAS + (2 * L + 3) * (EP(L))^2 * (SIN(AP))^2 + (2 * L
+ 1) * (E0(L))^2 * (SIN(A0))^2 + (2 * L - 1) * (EM(L))^2 *
(SIN(AM))^2
NEXT L
SIGMAR=10*4*PI*SIGMAR/SK/3: SIG-
MAS=10*4*PI*SIGMAS/SK/3
PRINT " SIGMR-TOT=": PRINT USING " #####.###
";SIGMAR
PRINT " SIGMS-TOT=": PRINT USING " #####.###
";SIGMAS
NEXT J: PRINT
REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL SEC (SS,GG,SEC()): FOR T=TMI TO (TMA/3.3) STEP TH
PRINT USING " ### ";T: PRINT USING " #####.## ";SEC(T);
PRINT T+42: PRINT USING " #####.## ";SEC(T+42);
PRINT T+84: PRINT USING " #####.## ";SEC(T+84);
PRINT T+126: PRINT USING " #####.## ";SEC(T+126): NEXT
IF ISAVE=0 GOTO 221: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, " P - ALPHA FOR LAB E=";
PRINT#1, E1(NN): FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " +#.###^^^ ";T;SEC(T): NEXT
221 END
SUB SEC (SS, GG, S(100))
SHARED FP(),EP(),F0(),E0(),FM(),EM()
SHARED PI,TMI,TMA,TH,LN,LV,LH
DIM S0(20),P(20),P1(20),P2(20): CALL CULFAZ(GG,S0())
FOR TT=TMI TO TMA STEP TH: T=TT*PI/180: X=COS(T)
A=2/(1-X): S0=2*S0(0): BB=-GG*A: AL=GG*LOG(A)+S0
RECU=BB*COS(AL): AMCUL=BB*SIN(AL)
REA=0: AMA=0: REB=0: AMB=0: REC=0
AMC=0: RED=0: AMD=0: REE=0: AME=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: CALL POLLEG(X,L,P())
FP=2*FP(L): FM=2*FM(L): F0=2*F0(L): SL=2*S0(L)
C=COS(SL): S=SIN(SL): AL1P=EP(L)*COS(FP)-1
AL2P=EP(L)*SIN(FP): AL1M=EM(L)*COS(FM)-1

```

```

AL2M=EM(L)*SIN(FM): AL10=E0(L)*COS(F0)-1
AL20=E0(L)*SIN(F0): A1=(L+1)*AL1P+L*AL1M
A2=(L+1)*AL2P+L*AL2M: REA=REA+(A2*C+A1*S)*P(L)
AMA=AMA+(A2*S-A1*C)*P(L)
B1=(L+2)*AL1P+(2*L+1)*AL10+(L-1)*AL1M
B2=(L+2)*AL2P+(2*L+1)*AL20+(L-1)*AL2M
REB=REB+(B2*C+B1*S)*P(L)/2: AMB=AMB+(B2*S-B1*C)*P(L)/2
NEXT L: FOR L=1 TO LV STEP LH: CALL FUNLEG1(X,L,P1())
FP=2*FP(L): FM=2*FM(L): F0=2*F0(L): SL=2*S0(L)
C=COS(SL): S=SIN(SL): AL1P=EP(L)*COS(FP)-1
AL2P=EP(L)*SIN(FP): AL1M=EM(L)*COS(FM)-1
AL2M=EM(L)*SIN(FM): AL10=E0(L)*COS(F0)-1
AL20=E0(L)*SIN(F0): C1=AL1P-AL1M: C2=AL2P-AL2M
BB=1/(SQR(2)): REC=REC+(C2*C+C1*S)*P1(L)*BB
AMC=AMC+(C2*S-C1*C)*P1(L)*BB: AA=1/(SQR(2)*L*(L+1))
D1=L*(L+2)*AL1P-(2*L+1)*AL10-(L^2-1)*AL1M
D2=L*(L+2)*AL2P-(2*L+1)*AL20-(L^2-1)*AL2M
RED=RED+(D2*C+D1*S)*P1(L)*AA
AMD=AMD+(D2*S-D1*C)*P1(L)*AA
NEXT L: FOR L=2 TO LV STEP LH: CALL FUNLEG2(X,L,P2())
FP=2*FP(L): FM=2*FM(L): F0=2*F0(L): SL=2*S0(L): C=COS(SL)
S=SIN(SL): AL1P=EP(L)*COS(FP)-1: AL2P=EP(L)*SIN(FP)
AL1M=EM(L)*COS(FM)-1
AL2M=EM(L)*SIN(FM): AL10=E0(L)*COS(F0)-1
AL20=E0(L)*SIN(F0)
CC=1/(2*L*(L+1)): E1=L*AL1P-(2*L+1)*AL10+(L+1)*AL1M
E2=L*AL2P-(2*L+1)*AL20+(L+1)*AL2M
REE=REE+(E2*C+E1*S)*P2(L)*CC
AME=AME+(E2*S-E1*C)*P2(L)*CC
NEXT L: REA=RECU+REA: AMA=AMCUL+AMA
REB=RECU+REB
AMB=AMCUL+AMB: A=REA^2+AMA^2: B=REB^2+AMB^2
C=REC^2+AMC^2: D=RED^2+AMD^2: E=REE^2+AME^2
SEC=(A+2*(B+C+D+E))/3: S(TT)=10*SEC/4/SS^2
POL(TT) = 2 * SQR(2) / 3 * (AMA * REC - REA * AMC + AMB *
RED - REB * AMD + AMD * REE - RED * AME) / SEC
T20(TT) = 1/SQR(2)*(1 - (AA + 2*DD)/SEC)
T22(TT) = 1/SQR(3) * (2 * (REB * REE + AMB * AME) - CC) / SEC
T21(TT) = - SQR(2 / 3) * (REA * REC + AMA * AMC - REB * RED -
AMB * AMD + RED * REE + AMD * AME) / SEC: NEXT TT: END
SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB

```

SUB FUNLEG1(X,L,P(20))

P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): FOR I=2 TO L

P(I)=(2*I-1)*X/(I-1)*P(I-1)-I/(I-1)*P(I-2): NEXT: END SUB

SUB FUNLEG2(X,L,P(20))

P(0)=0: P(2)=3*ABS(1-X^2): FOR I=2 TO L

P(I+1)=(2*I+1)*X/(I-1)*P(I)-(I+2)/(I-1)*P(I-1): NEXT: END SUB

SUB CULFAZ(G,F(20))

C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5

FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A: NEXT

FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ: FOR I=1 TO 20

F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB

Дадим результаты контрольного счета по этой программе для сечений упругого рассеяния в $^2\text{H}^4\text{He}$ системе при энергии налетающего дейтрона 4 МэВ [92]. В работе [92] выполнен и фазовый анализ сечений, результаты которого показаны в таблице 6.5. Параметр смешивания при этой энергии оказывается равен -2^0 и смешивание парциальных волн практически отсутствует.

Результаты по экспериментальным сечениям σ_e в работе [92] приведены только на рисунке, поэтому в нашей таблице 6.6, в скобках, показана точность, с которой их удастся определить из этих рисунков. Результаты расчета сечений σ_t по приведенной выше программе с табличными фазами (Таблица 6.5) также приведены в таблице 6.6.

Таблица 6.5 - Фазы рассеяния.

δ_L , град	S_1	P_0	P_1	P_2	D_1	D_2	D_3
$E_\alpha = 4.0$ МэВ	99.3	-0.5	1.2	6.6	18.4	14.7	171.6

Таблица 6.6 - Сечения рассеяния.

θ , град	σ_t , мб/ст	σ_e , мб/ст [92]	θ , град	σ_t , мб/ст	σ_e , мб/ст [92]
12	4009.3		92	47.17	
14	1982.5		94	48.16	
16	1096.3		96	49.46	
18	678.10		98	51.08	
20	469.14	450(50)	100	53.04	50(5)
22	359.72		102	55.35	
24	299.69		104	58.02	
26	264.83		106	61.08	
28	242.89		108	64.56	

30	227.56	220(10)	110	68.48	70(5)
32	215.48		112	72.88	
34	204.90		114	77.76	
36	194.93		116	83.18	
38	185.12		118	89.14	
40	175.30	170(10)	120	95.66	100(10)
42	165.44		122	102.76	
44	155.58		124	110.45	
46	145.80		126	118.72	
48	136.19		128	127.58	
50	126.84	125(10)	130	137.01	125(10)
52	117.83		132	146.98	
54	109.25		134	157.47	
56	101.15		136	168.42	
58	93.58		138	179.80	
60	86.58	85(5)	140	191.54	185(10)
62	80.16		142	203.57	
64	74.36		144	215.82	
66	69.15		146	228.20	
68	64.54		148	240.63	
70	60.51	60(5)	150	253.01	250(10)
72	57.05		152	265.24	
74	54.11		154	277.21	
76	51.69		156	288.83	
78	49.74		158	299.99	
80	48.24	50(5)	160	310.59	300(10)
82	47.15		162	320.53	
84	46.46		164	329.71	
86	46.13		166	338.04	
88	46.15		168	345.44	
90	46.50	45(5)	170	351.83	350(10)

Рассмотрим еще один пример контрольного счета сечений по фазам из работы [91], где были измерены дифференциальные сечения σ_e и поляризации упругого ${}^2\text{H}^4\text{He}$ рассеяния при энергиях 3 - 11.5 МэВ. Возьмем энергию $E_d = 6.34$ МэВ, при которой уже заметны неупругие процессы, но еще не проявляется сильное смешивание по орбитальным моментам, т.е. параметр смешивания ϵ_1 близок к нулю [91]. Фазы, полученные в работах [204,205,206] при энергии 6.24 МэВ приведены в таблице 6.7, а результаты расчетов σ_e , полученными по нашей программе с этими табличными фазами показаны далее на распечатке.

Для полного сечения реакций σ_r с такими фазами получается величина 336 мб, а в работе [91] приведено экспериментальное значение 380(10) мб. Отметим, что в работе [207] для сечения реакций получено 290(20) мб, а в работах [204-206] приводится величина 200(10) мб. В работе [207] для параметра смешивания приводится значение равное 0 ± 5^0 при энергии дейтрона до 6.2 - 6.3 МэВ. При большей энергии происходит резкий скачок параметра смешивания и уже при 6.5 МэВ он равен $-35^0 \div -45^0 (\pm 10^0)$, а при 7 МэВ его значение уменьшается до $-80^0 \pm 15^0$.

Таблица 6.7 - Фазы рассеяния.

δ_L , град	S_1	P_0	P_1	P_2	D_1	D_2	D_3	F_2	F_3	F_4
Re δ	78.0	-21.5	2.6	10.5	63.0	123.1	168.4	3.3	5.0	2.8
Im δ	0.9	2.7	3.5	4.2	4.7	2.4	5.5	0.2	2.1	2.5

$$\chi^2 = 3.85$$

$$\sigma_r = 336.0 \text{ мб.}$$

$$\sigma_s = 1236.7 \text{ мб.}$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i	θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
22.48	450.50	413.62	7.45	109.71	63.80	60.70	2.62
26.20	340.20	332.53	0.56	115.09	65.80	64.00	0.83
29.91	263.10	274.86	2.22	120.00	69.30	69.23	0.00
33.60	214.30	227.44	4.18	125.09	79.60	77.73	0.61
37.28	178.60	186.28	2.05	129.71	89.20	88.68	0.04
44.57	117.30	120.14	0.65	130.00	92.40	89.48	1.11
51.78	77.20	75.08	0.84	134.08	103.70	102.04	0.28
58.87	53.00	49.66	4.41	135.00	107.70	105.22	0.59
65.84	43.30	39.63	7.99	138.22	119.60	117.30	0.41
72.67	42.60	39.52	5.82	140.00	129.10	124.57	1.37
79.34	47.00	44.14	4.11	145.00	156.10	146.87	3.88
85.84	52.60	49.69	3.40	150.00	184.90	171.05	6.24
92.13	58.50	54.10	6.29	155.00	217.50	195.67	11.20
98.22	60.50	56.91	3.92	160.00	247.30	219.07	14.48
104.08	62.00	58.73	3.10	165.00	270.70	239.55	14.72

В наших расчетах экспериментальная ошибка принималась равной 3% [91].

Ниже приведены расчетные и экспериментальные [204-206] поляризации для энергии 6.34 МэВ. В качестве $T_{11}(\theta)$ использована формула для $P(\theta)$ из [57] без перевода ее в T_{11} .

Поляризации T_{11}

θ	T_e	T_t	θ	T_e	T_t
22.48	-0.200	-0.220	109.71	-0.162	-0.130
26.20	-0.225	-0.233	115.09	-0.100	-0.073
29.91	-0.240	-0.239	120.00	+0.000	+0.010
33.60	-0.264	-0.242	125.09	+0.116	+0.108
37.28	-0.263	-0.242	129.71	+0.219	+0.189
44.57	-0.262	-0.228	130.00	+0.216	+0.193
51.78	-0.209	-0.168	134.08	+0.289	+0.246
58.87	-0.075	-0.031	135.00	+0.306	+0.256
65.84	+0.108	+0.132	138.22	+0.322	+0.280
72.67	+0.204	+0.193	140.00	+0.336	+0.288
79.34	+0.169	+0.143	145.00	+0.329	+0.294
85.84	+0.070	+0.051	150.00	+0.310	+0.279
92.13	-0.038	-0.039	155.00	+0.272	+0.249
98.22	-0.127	-0.109	160.00	+0.227	+0.208
104.08	-0.179	-0.142	165.00	+0.168	+0.161

Поляризации T_{20}

θ	T_e	T_t	θ	T_e	T_t
22.48	+0.165	+0.157	109.71	+0.121	+0.283
26.20	+0.123	+0.120	115.09	-0.025	+0.148
29.91	+0.088	+0.080	120.00	-0.145	+0.042
33.60	+0.054	+0.040	125.09	-0.201	-0.028
37.28	+0.012	-0.001	129.71	-0.183	-0.050
44.57	-0.070	-0.086	130.00	-0.185	-0.050
51.78	-0.132	-0.153	134.08	-0.158	-0.039
58.87	-0.086	-0.123	135.00	-0.141	-0.034
65.84	+0.103	+0.080	138.22	-0.118	-0.008
72.67	+0.346	+0.349	140.00	-0.067	+0.009
79.34	+0.502	+0.525	145.00	-0.013	+0.062
85.84	+0.540	+0.594	150.00	+0.054	+0.118
92.13	+0.492	+0.586	155.00	+0.089	+0.168
98.22	+0.399	+0.523	160.00	+0.156	+0.211
104.08	+0.271	+0.416	165.00	+0.189	+0.245

Поляризации T_{22}

θ	T_e	T_t	θ	T_e	T_t
22.48	-0.040	-0.048	109.71	+0.350	+0.268
26.20	-0.068	-0.068	115.09	+0.180	+0.102
29.91	-0.090	-0.090	120.00	+0.013	-0.038

33.60	-0.110	-0.115	125.09	-0.108	-0.147
37.28	-0.173	-0.143	129.71	-0.171	-0.204
44.57	-0.234	-0.202	130.00	-0.175	-0.206
51.78	-0.268	-0.235	134.08	-0.206	-0.222
58.87	-0.182	-0.149	135.00	-0.197	-0.223
65.84	+0.096	+0.119	138.22	-0.198	-0.216
72.67	+0.411	+0.420	140.00	-0.188	-0.208
79.34	+0.646	+0.596	145.00	-0.164	-0.175
85.84	+0.705	+0.651	150.00	-0.127	-0.136
92.13	+0.693	+0.628	155.00	-0.099	-0.098
98.22	+0.623	+0.549	160.00	-0.066	-0.064
104.08	+0.503	+0.425	165.00	-0.028	-0.036

Поляризации T_{21}

θ	T_e	T_t	θ	T_e	T_t
22.48	-0.045	-0.051	109.71	-0.068	-0.114
26.20	-0.059	-0.055	115.09	-0.039	-0.102
29.91	-0.060	-0.057	120.00	+0.003	-0.078
33.60	-0.058	-0.058	125.09	+0.045	-0.045
37.28	-0.064	-0.059	129.71	+0.070	-0.015
44.57	-0.058	-0.057	130.00	+0.066	-0.013
51.78	-0.045	-0.045	134.08	+0.890	+0.010
58.87	-0.017	-0.016	135.00	+0.078	+0.015
65.84	+0.007	+0.017	138.22	+0.091	+0.028
72.67	+0.001	+0.024	140.00	+0.090	+0.034
79.34	-0.019	+0.004	145.00	+0.085	+0.045
85.84	-0.042	-0.028	150.00	+0.084	+0.049
92.13	-0.064	-0.061	155.00	+0.072	+0.048
98.22	-0.082	-0.090	160.00	+0.053	+0.042
104.08	-0.081	-0.109	165.00	+0.048	+0.034

6.4 Система частиц с единичным спином и тензорными силами

В системе ${}^2\text{H}^4\text{He}$ возможно и смешивание состояний с различным орбитальным моментом, когда мы учитываем наличие тензорной компоненты ядерных сил. В частности имеется смешивание состояния с $J = 1$, которое возможно при $L = 0$ и 2 . В таком случае вводят параметр смешивания ϵ_1 и формулы для сечений несколько усложняются [207]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{3k^2} \left[|A|^2 + 2|B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2 \right], \quad (6.23)$$

где k - волновое число, θ - угол рассеяния в системе центра масс, $x = \text{Cos}(\theta)$, а амплитуды рассеяния имеют вид

$$\begin{aligned}
 A &= f_c + \sum_L [\exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) / 2i] \{ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) P_L(x) [L_4 U_{L,L}^{L+1} + L U_{L,L}^{L-1} - L_2] - \\
 &- \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L+2}) P_{L+2}(x) \sqrt{L_1 L_4} U_{L,L+2}^{L+1} - \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L-2}) P_{L-2}(x) \sqrt{L L_3} U_{L,L-2}^{L-1} \} , \\
 &\hspace{25em} (6.24) \\
 B &= f_c + \sum_L [\exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) / 4i] \{ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) P_L(x) [L_1 U_{L,L}^{L+1} + L_2 U_{L,L}^L + L_3 U_{L,L}^{L-1} - 2L_2] + \\
 &+ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L+2}) P_{L+2}(x) \sqrt{L_1 L_4} U_{L,L+2}^{L+1} + \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L-2}) P_{L-2}(x) \sqrt{L L_3} U_{L,L-2}^{L-1} \} , \\
 C &= \sum_L [\exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) / 2i] \{ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) P_L^1(x) [U_{L,L}^{L+1} - U_{L,L-2}^{L-1}] + \\
 &+ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L+2}) P_{L+2}^1(x) \sqrt{L_4 / L_1} U_{L,L+2}^{L+1} - \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L-2}) P_{L-2}^1(x) \sqrt{L / L_3} U_{L,L-2}^{L-1} \} , \\
 D &= \sum_L [\exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) / 2i] \{ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) \frac{P_L^1(x)}{L L_4} [L L_1 U_{L,L}^{L+1} - L_2 U_{L,L}^L - (L^2 - 1) U_{L,L-2}^{L-1}] - \\
 &- \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L+2}) P_{L+2}^1(x) \sqrt{L_4 / L_1} U_{L,L+2}^{L+1} + \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L-2}) P_{L-2}^1(x) \sqrt{L / L_3} U_{L,L-2}^{L-1} \} , \\
 E &= \sum_L [\exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) / 2i\sqrt{2}] \{ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_L) \frac{P_L^2(x)}{L L_4} [L U_{L,L}^{L+1} - L_2 U_{L,L-2}^{L-1} + L_4 U_{L,L}^{L-1}] + \\
 &+ \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L+2}) P_{L+2}^2(x) [L_4 L_1]^{-1/2} U_{L,L+2}^{L+1} + \exp(\frac{1}{2}i\alpha_{L-2}) P_{L-2}^2(x) [L L_3]^{-1/2} U_{L,L-2}^{L-1} \} ,
 \end{aligned}$$

где

$$L_1 = L+2 , \quad L_2 = 2L+1 , \quad L_3 = L-1 , \quad L_4 = L+1$$

и

$$U_{L,L}^J = \exp(2i\delta_L^J) \rightarrow \eta_L^J \text{Cos}(2\delta_L^J) + i\eta_L^J \text{Sin}(2\delta_L^J)$$

- элементы матрицы рассеяния для состояний без смешивания,

а

$$U_{0,0}^1 = \text{Cos}^2 \epsilon_1 \exp(2i\delta_\alpha^1) + \text{Sin}^2 \epsilon_1 \exp(2i\delta_\beta^1) , \quad (6.25)$$

$$U_{2,2}^1 = \text{Sin}^2 \varepsilon_1 \exp(2i\delta_\alpha^1) + \text{Cos}^2 \varepsilon_1 \exp(2i\delta_\beta^1) ,$$

$$U_{0,2}^1 = U_{2,0}^1 = \frac{1}{2} \text{Sin}(2\varepsilon_1) [\exp(2i\delta_\alpha^1) - \exp(2i\delta_\beta^1)]$$

- элементы матрицы рассеяния для смешанных состояний с $J = 1$ и $L = 0, 2$ [208]. Аналогично записываются и другие матричные элементы состояний со смешиванием, например, при $J = 2$ и $L=1,3$. Кулоновская амплитуда f_c имеет вид (6.3) с вынесенной фазой σ_0 , а величины α_L определены выражением (6.8).

Все фазы δ_L считаются комплексными, т.е. все экспоненты могут быть представлены в виде

$$\exp(2i\delta_L) \rightarrow \eta_L \exp[2i(\text{Re}\delta_L)] ,$$

где η_L - параметр неупругости.

Приведем текст компьютерной программы для расчета сечений упругого рассеяния в системе частиц с полным спином 1. Здесь использованы те же обозначения, что и в предыдущей программе для ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния [203].

REM CALCULATE OF CROSS SECTION ON COMPLEX PHASE SHIFTS FOR SYSTEM WITH 1 SPIN AND TENSOR FORCE

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: N=200
DIM E(N), DE(N), E1(N), EP(N/10), EM(N/10), E0(N/10), TT(N),
DEE(N), T11E(N), T21E(N)
DIM SEC(N), SECE(N), FM(N/10), F0(N/10), FP(N/10), POL(N),
T20(N), T22(N), T21(N): DIM T22E(N), T20E(N), T(N)
REM *****
ISAVE=1: REM =0 - NO SAVE, =1 - SAVE IN FILE
G$="C:\BASICA\SEC\AL-d.DAT"
REM ***** INPUT PARAMETERS *****
PI=4*ATN(1): NN=0: NV=0: LN=0: LV=3: LH=1: TMI=10:
TMA=170
TH=2: AM1=2: AM2=4: Z1=1: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
IXI=1: REM IF =1 - XI^2 WILL BE CALCULATE, =0 NO CALCULATE
E1(0)=11.
REM ***** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION 11. *****
SECE(1)=00: DEE(1)=00: SECE(2)=00: DEE(2)=00
SECE(3)=184.0: DEE(3)=7.38: SECE(4)=139.0: DEE(4)=5.55

```

SECE(5)=98.4: DEE(5)=3.93: SECE(6)=67.2: DEE(6)=1.34
 SECE(7)=43.5: DEE(7)=0.87: SECE(8)=26.9: DEE(8)=0.54
 SECE(9)=15.8: DEE(9)=0.32: SECE(10)=10.1: DEE(10)=0.2
 SECE(11)=8.49: DEE(11)=0.17: SECE(12)=10.2: DEE(12)=0.2
 SECE(13)=14.3: DEE(13)=0.29: SECE(14)=20.2: DEE(14)=0.4
 SECE(15)=26.9: DEE(15)=0.54: SECE(16)=34.1: DEE(16)=0.68
 SECE(17)=41.3: DEE(17)=0.83: SECE(18)=48.0: DEE(18)=0.96
 SECE(19)=53.9: DEE(19)=1.08: SECE(20)=58.2: DEE(20)=1.16
 SECE(21)=61.1: DEE(21)=1.22: SECE(22)=62.2: DEE(22)=1.24
 SECE(23)=62.8: DEE(23)=1.26: SECE(24)=62.0: DEE(24)=1.24
 SECE(25)=59.8: DEE(25)=1.2: SECE(26)=59.7: DEE(26)=1.19
 SECE(27)=56.9: DEE(27)=1.14: SECE(28)=54.2: DEE(28)=1.08
 SECE(29)=54.3: DEE(29)=1.09: SECE(30)=49.9: DEE(30)=1.
 SECE(31)=46.9: DEE(31)=0.94: SECE(32)=44.5: DEE(32)=0.89
 SECE(33)=41.7: DEE(33)=0.83: SECE(34)=39.1: DEE(34)=0.78
 SECE(35)=38.3: DEE(35)=0.77: SECE(36)=34.4: DEE(36)=0.69
 SECE(37)=33.1: DEE(37)=0.66: SECE(38)=30.0: DEE(38)=0.6
 SECE(39)=29.6: DEE(39)=0.59: SECE(40)=33.8: DEE(40)=1.38
 SECE(41)=41.9: DEE(41)=1.72: SECE(42)=52.1: DEE(42)=2.08
 SECE(43)=66.4: DEE(43)=2.66: SECE(44)=79.7: DEE(44)=3.22
 SECE(45)=92.9: DEE(45)=3.7
 T(1)=18.75: T11E(1)=.0038: T20E(1)=.0339: T21E(1)=-.008: T22E(1)=-.0039
 T(2)=26.20: T11E(2)=.0214: T20E(2)=.0045: T21E(2)=.0015: T22E(2)=-.0231
 T(3)=29.91: T11E(3)=.0207: T20E(3)=.0008: T21E(3)=-.0029: T22E(3)=-.0291
 T(4)=33.60: T11E(4)=.0192: T20E(4)=-.0282: T21E(4)=-.0021: T22E(4)=-.0574
 T(5)=37.28: T11E(5)=.0139: T20E(5)=-.0417: T21E(5)=.0023: T22E(5)=-.0732
 T(6)=40.94: T11E(6)=-.0088: T20E(6)=-.0723: T21E(6)=-.0023: T22E(6)=-.1003
 T(7)=44.57: T11E(7)=-.0435: T20E(7)=-.1258: T21E(7)=-.0002: T22E(7)=-.1533
 T(8)=48.19: T11E(8)=-.0859: T20E(8)=-.2020: T21E(8)=.0068: T22E(8)=-.2307
 T(9)=51.78: T11E(9)=-.1495: T20E(9)=-.3045: T21E(9)=.0162: T22E(9)=-.3212
 T(10)=55.34: T11E(10)=-.1762: T20E(10)=-.4107: T21E(10)=.0032: T22E(10)=-.3571
 T(11)=58.87: T11E(11)=-.0537: T20E(11)=-.3390: T21E(11)=-.0383: T22E(11)=-.2526
 T(12)=62.37: T11E(12)=-.1129: T20E(12)=-.1243: T21E(12)=-.0765: T22E(12)=-.0023
 T(13)=65.84: T11E(13)=.2033: T20E(13)=.0344: T21E(13)=-.0960: T22E(13)=.1272
 T(14)=69.28: T11E(14)=.2183: T20E(14)=.1248: T21E(14)=-.1073: T22E(14)=.2095
 T(15)=72.67: T11E(15)=.1967: T20E(15)=.1611: T21E(15)=-.1186: T22E(15)=.2569
 T(16)=76.03: T11E(16)=.1736: T20E(16)=.1962: T21E(16)=-.1192: T22E(16)=.2687
 T(17)=79.34: T11E(17)=.1393: T20E(17)=.1965: T21E(17)=-.1194: T22E(17)=.2772
 T(18)=82.61: T11E(18)=.1043: T20E(18)=.2133: T21E(18)=-.1266: T22E(18)=.2954
 T(19)=85.84: T11E(19)=.0591: T20E(19)=.2077: T21E(19)=-.1225: T22E(19)=.3038
 T(20)=89.01: T11E(20)=.0086: T20E(20)=.2087: T21E(20)=-.1152: T22E(20)=.3003
 T(21)=92.13: T11E(21)=-.0296: T20E(21)=.2036: T21E(21)=-.1252: T22E(21)=.3145
 T(22)=95.20: T11E(22)=-.0784: T20E(22)=.2029: T21E(22)=-.1222: T22E(22)=.3126
 T(23)=98.22: T11E(23)=-.1214: T20E(23)=.2009: T21E(23)=-.1226: T22E(23)=.3183
 T(24)=101.18: T11E(24)=-.1649: T20E(24)=.1923: T21E(24)=-.1082: T22E(24)=.3105
 T(25)=104.08: T11E(25)=-.2100: T20E(25)=.1880: T21E(25)=-.1148: T22E(25)=.3159
 T(26)=105.00: T11E(26)=-.2266: T20E(26)=.1840: T21E(26)=-.1168: T22E(26)=.3041
 T(27)=106.92: T11E(27)=-.2599: T20E(27)=.1812: T21E(27)=-.1103: T22E(27)=.3048
 T(28)=109.71: T11E(28)=-.2957: T20E(28)=.1797: T21E(28)=-.1161: T22E(28)=.3089
 T(29)=110.00: T11E(29)=-.2908: T20E(29)=.1726: T21E(29)=-.1059: T22E(29)=.2961
 T(30)=112.43: T11E(30)=-.3305: T20E(30)=.1625: T21E(30)=-.1023: T22E(30)=.2907
 T(31)=115.00: T11E(31)=-.3517: T20E(31)=.1476: T21E(31)=-.1007: T22E(31)=.2705
 T(32)=115.09: T11E(32)=-.3584: T20E(32)=.1625: T21E(32)=-.1059: T22E(32)=.2744
 T(33)=117.68: T11E(33)=-.3672: T20E(33)=.1325: T21E(33)=-.0952: T22E(33)=.2431
 T(34)=120.00: T11E(34)=-.3712: T20E(34)=.1312: T21E(34)=-.0892: T22E(34)=.2049

T(35)=120.21: T11E(35)=-.3739: T20E(35)=.1432: T21E(35)=-.0849: T22E(35)=.2181
T(36)=122.68: T11E(36)=-.3400: T20E(36)=.1337: T21E(36)=-.0702: T22E(36)=.1760
T(37)=125.00: T11E(37)=-.3091: T20E(37)=.0961: T21E(37)=-.0602: T22E(37)=.1189
T(38)=130.00: T11E(38)=-.1259: T20E(38)=.0766: T21E(38)=-.0269: T22E(38)=-.0048
T(39)=135.00: T11E(39)=.1203: T20E(39)=.0671: T21E(39)=.0033: T22E(39)=-.1141
T(40)=140.43: T11E(40)=-.3461: T20E(40)=.0727: T21E(40)=.0256: T22E(40)=-.1774
T(41)=145.00: T11E(41)=.4402: T20E(41)=.0937: T21E(41)=.0212: T22E(41)=-.1777
T(42)=150.00: T11E(42)=.4200: T20E(42)=.1014: T21E(42)=.0183: T22E(42)=-.1519
T(43)=155.00: T11E(43)=.4046: T20E(43)=.1133: T21E(43)=.0211: T22E(43)=-.1097
T(44)=160.00: T11E(44)=.3200: T20E(44)=.1202: T21E(44)=.0125: T22E(44)=-.0615
T(45)=165.00: T11E(45)=.2479: T20E(45)=.1160: T21E(45)=-.0009: T22E(45)=-.0420
NT=45

REM ***** PHASE SHIFTS *****

REM ***** FOR D-AL ON E=10.9 *****

EPS(1)=-90

FP(0)=93.6: FPI(0)=23.4: FP(1)=-0.5: FPI(1)=12.2

FP(2)=152.2: FPI(2)=13.8: FP(3)=12.4: FPI(3)=3.1

F0(1)=-6.0: F0I(1)=4.: F0(2)=116.: F0I(2)=5.6

F0(3)=13.9: F0I(3)=4.6: F0(4)=0.00: F0I(4)=0.

FM(1)=-34.6: FMI(1)=12.4: FM(2)=42.6: FMI(2)=1.3

FM(3)=.8: FMI(3)=9.1

111 FOR L=LN TO LV STEP LH: FM(L)=FM(L)*PI/180

FP(L)=FP(L)*PI/180: F0(L)=F0(L)*PI/180: FMI(L)=FMI(L)*PI/180

FPI(L)=FPI(L)*PI/180: F0I(L)=F0I(L)*PI/180: EP(L)=EXP(-2*FPI(L))

EM(L)=EXP(-2*FMI(L)): E0(L)=EXP(-2*F0I(L)):

EPS(L)=EPS(L)*PI/180

NEXT

REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****

FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I

REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****

FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)

GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SER=0: SES=0

FOR L=LN TO LV STEP LH

AP=FP(L): AM=FM(L): A0=F0(L): L1=2*L+3: L2=2*L+1: L3=2*L-1

SER=SER+L1*(1-EP(L)^2)+L2*(1-E0(L)^2)+L3*(1-EM(L)^2)

SES=SES+L1*EP(L)^2*SIN(AP)^2+L2*E0(L)^2*SIN(A0)^2+L3*EM(L)^2*SIN(AM)^2: NEXT L: SIGR=10*PI*SER/SK/3

SIGS=10*4*PI*SES/SK/3

PRINT " SIGMR-TOT=":; PRINT USING " #####.### ";SIGR;

PRINT " SIGMS-TOT=":; PRINT USING " #####.### ";SIGS:

NEXT J

REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****

CALL SEC(SS,GG,SEC(),POL(),T20(),T22(),T21(),N)

REM ***** XI^2 *****

IF IXI=0 GOTO 211: S1=0: FOR M=1 TO NT: IF M<3 GOTO 234

DE(M)=((SEC(M)-SECE(M))/(DEE(M)))^2: S1=S1+DE(M)

```

234 NEXT M: XI=S1/NT: PRINT "                XISEC=";XI
REM PRINT " T SEC-EXP SEC-TEOR DE": FOR I=1 TO
(NT+1)/2
PRINT USING " ###.## ";T(I); PRINT USING " ###.##
";SECE(I);SEC(I);DE(I);
PRINT USING " ###.## ";T(I+23);
PRINT USING " ###.## ";SECE(I+23);SEC(I+23);DE(I+23): NEXT
211 S1=0: FOR M=1 TO NT
DE(M)=( (POL(M)-T11E(M))/(0.05*T11E(M)) )^2
S1=S1+DE(M): NEXT M: XI=S1/NT: INPUT " T11";Z
IF Z=0 GOTO 321
PRINT "----- T11 -----"
PRINT "                XIT11=";XI
FOR I=1 TO (NT+1)/2: PRINT USING "###.## ";T(I);
PRINT USING "+#.###^^^ ";T11E(I);POL(I);DE(I);
PRINT USING " ###.## ";T(I+23);
PRINT USING "+#.###^^^ "; T11E(I+23); POL(I+23); DE(I+23);
NEXT
321 S1=0: FOR M=1 TO NT
DE(M)=( (T20(M)-T20E(M))/(0.05*T20E(M)) )^2
S1=S1+DE(M): NEXT M: XI=S1/NT: INPUT " T20";Z
IF Z=0 GOTO 322: PRINT "----- T20 -----"
-----"
PRINT "                XIT20=";XI: FOR I=1 TO (NT+1)/2
PRINT USING "###.## ";T(I);
PRINT USING "+#.###^^^ ";T20E(I);T20(I);DE(I);
PRINT USING " ###.## ";T(I+23);
PRINT USING "+#.###^^^ ";T20E(I+23);T20(I+23);DE(I+23): NEXT
322 S1=0: FOR M=1 TO NT
DE(M)=( (T22(M)-T22E(M))/(0.05*T22E(M)) )^2
S1=S1+DE(M): NEXT M: XI=S1/NT: INPUT " T22";Z
IF Z=0 GOTO 212: PRINT "----- T22 -----"
-----"
PRINT "                XIT22=";XI: FOR I=1 TO (NT+1)/2
PRINT USING "###.## ";T(I);
PRINT USING "+#.###^^^ ";T22E(I);T22(I);DE(I);
PRINT USING " ###.## ";T(I+23);
PRINT USING "+#.###^^^ ";T22E(I+23);T22(I+23);DE(I+23): NEXT
212 REM ***** SAVE IN FILE *****
IF ISAVE=0 GOTO 221: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, " D - ALPHA FOR LAB E="; PRINT#1, E1(NN)
PRINT#1, " T SEC POL T20 T21 T22"
FOR T=1 TO NT
PRINT#1, USING " +#.###^^^ "; T(T); SEC(T); POL(T); T20(T);

```

```

T21(T); T22(T): NEXT
221 END
SUB SEC (SS, GG, S(100), POL(100), T20(100), T22(100),
T21(100))
SHARED FP(),EP(),F0(),E0(),FM(),EM(),EPS(),TT()
SHARED PI,TMI,TMA,TH,LN,LV,LH,NT,T()
DIM S0(20),P(20),P1(20),P2(20)
LVV=LV+2: CALL CULFAZ(GG,LVV,S0()): FOR I=1 TO NT
T=T(I)*PI/180
X=COS(T): CALL CULAMP(X,GG,S0(),RECU,AMCUL)
CALL POLLEG(X,LVV,P()): CALL FUNLEG1(X,LVV,P1())
CALL FUNLEG2(X,LVV,P2()): REA=0: AMA=0: REB=0: AMB=0
REC=0: AMC=0: RED=0: AMD=0: REE=0: AME=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: FP=2*FP(L): FM=2*FM(L):
F0=2*F0(L)
SL=2*S0(L): C0=COS(SL): S0=SIN(SL): EP=EP(L): E0=E0(L)
EM=EM(L): CP=COS(S0(L)+S0(L+2)): SP=SIN(S0(L)+S0(L+2))
AL1M=EM*COS(FM)-1: AL2M=EM*SIN(FM)
AL10=E0*COS(F0)-1: AL20=E0*SIN(F0)
CO=COS(EPS(L+1))^2: SI=SIN(EPS(L+1))^2
AL1P=EP*CO*COS(FP)+EM(L+2)*SI*COS(2*FM(L+2))-1
AL2P=EP*CO*SIN(FP)+EM(L+2)*SI*SIN(2*FM(L+2))
SI=1/2*SIN(2*EPS(L+1))
AP1=SI*( EP*COS(FP)- EM(L+2)*COS(2*FM(L+2)) )
AP2=SI*( EP*SIN(FP)-EM(L+2)*SIN(2*FM(L+2)) )
IF L<2 GOTO 1121: CO=COS(EPS(L-1))^2: SI=SIN(EPS(L-1))^2
AL1M=EP(L-2)*SI*COS(2*FP(L-2))+EM*CO*COS(FM)-1
AL2M=EP(L-2)*SI*SIN(2*FP(L-2))+EM*CO*SIN(FM)
SI=1/2*SIN(2*EPS(L-1))
AM1=SI*(EP(L-2)*COS(2*FP(L-2))-EM*COS(FM))
AM2=SI*(EP(L-2)*SIN(2*FP(L-2))-EM*SIN(FM))
1121 REP=SQR((L+1)*(L+2))*(AP2*CP+AP1*SP)*P(L+2)
AMP=SQR((L+1)*(L+2))*(AP2*SP-AP1*CP)*P(L+2)
REMM=0: AMM=0
IF L<2 GOTO 1122: CM=COS(S0(L)+S0(L-2)):
SM=SIN(S0(L)+S0(L-2))
REMM=SQR(L*(L-1))*(AM2*CM+AM1*SM)*P(L-2)
AMM=SQR(L*(L-1))*(AM2*SM-AM1*CM)*P(L-2)
1122 A1=(L+1)*AL1P+L*AL1M: A2=(L+1)*AL2P+L*AL2M
REA=REA+(A2*C0+A1*S0)*P(L)+REP+REMM
AMA=AMA+(A2*S0-A1*C0)*P(L)+AMP+AMM
B1=(L+2)*AL1P+(2*L+1)*AL10+(L-1)*AL1M
B2=(L+2)*AL2P+(2*L+1)*AL20+(L-1)*AL2M
REB=REB+((B2*C0+B1*S0)*P(L)+(-REP-REMM))/2

```



```

AMB=AMB+((B2*S0-B1*C0)*P(L)+(-AMP-AMM))/2
IF L<1 GOTO 2111
REP=SQR((L+1)/(L+2))*(AP2*CP+AP1*SP)*P1(L+2)
AMP=SQR((L+1)/(L+2))*(AP2*SP-AP1*CP)*P1(L+2)
REMM=0: AMM=0: IF L<2 GOTO 123
CM=COS(S0(L)+S0(L-2)): SM=SIN(S0(L)+S0(L-2))
REMM=SQR(L/(L-1))*(AM2*CM+AM1*SM)*P1(L-2)
AMM=SQR(L/(L-1))*(AM2*SM-AM1*CM)*P1(L-2)
123 C1=AL1P-AL1M: C2=AL2P-AL2M: CC1=1/SQR(2)
REC=REC+((C2*C0+C1*S0)*P1(L)-REP+REMM)*CC1
AMC=AMC+((C2*S0-C1*C0)*P1(L)-AMP+AMM)*CC1
DD1=1/(L*(L+1)):          D1=L*(L+2)*AL1P-(2*L+1)*AL10-(L^2-
1)*AL1M
D2=L*(L+2)*AL2P-(2*L+1)*AL20-(L^2-1)*AL2M
RED = RED + ((D2*C0 + D1*S0)*P1(L)*DD1 + REP - REMM)*CC1
AMD = AMD + ((D2*S0 - D1*C0)*P1(L)*DD1 + AMP - AMM)*CC1
2111 IF L<2 GOTO 1222
REP=1/SQR((L+1)*(L+2))*(AP2*CP+AP1*SP)*P2(L+2)
AMP=1/SQR((L+1)*(L+2))*(AP2*SP-AP1*CP)*P2(L+2)
REMM=0: AMM=0: IF L<2 GOTO 124
CM=COS(S0(L)+S0(L-2)): SM=SIN(S0(L)+S0(L-2))
REMM=1/SQR(L*(L-1))*(AM2*CM+AM1*SM)*P2(L-2)
AMM=1/SQR(L*(L-1))*(AM2*SM-AM1*CM)*P2(L-2)
124 EE1=1/SQR(2): EE2=1/(L*(L+1))
E1=L*AL1P-(2*L+1)*AL10+(L+1)*AL1M
E2=L*AL2P-(2*L+1)*AL20+(L+1)*AL2M
REE=REE+((E2*C0+E1*S0)*P2(L)*EE2+(-REP-REMM))/2
AME=AME+((E2*S0-E1*C0)*P2(L)*EE2+(-AMP-AMM))/2
1222 NEXT L: REA=RECU+REA: AMA=AMCU+AMA
REB=RECU+REB: AMB=AMCU+AMB
REA=REA/2/SS:          AMA=AMA/2/SS:          REB=REB/2/SS:
AMB=AMB/2/SS
REC=REC/2/SS:          AMC=AMC/2/SS:          RED=RED/2/SS:
AMD=AMD/2/SS
REE=REE/2/SS: AME=AME/2/SS: AA=REA^2+AMA^2
BB=REB^2+AMB^2
CC=REC^2+AMC^2: DD=RED^2+AMD^2: EE=REE^2+AME^2
SEC=(AA+2*BB+2*CC+2*DD+2*EE)/3: S(I)=10*SEC
POL(I) = 2*SQR(2)/3*(AMA*REC - REA*AMC + AMB*RED -
REB*AMD + AMD*REE - RED*AME)/SEC
T20(I)=1/SQR(2)*(1-(AA+2*DD)/SEC)
T22(I)=1/SQR(3)*(2*(REB*REE+AMB*AME)-CC)/SEC
T21(I) = - SQR(2/3)*(REA*REC + AMA*AMC - REB*RED -
AMB*AMD + RED*REE + AMD*AME)/SEC: NEXT

```

```

END SUB
SUB CULAMP(X,GG,S0(20),RECU,AMCUL)
A=2/(1-X): S0=2*S0(0): BB=-GG*A: AL=GG*LOG(A)+S0
RECU=BB*COS(AL): AMCUL=BB*SIN(AL): END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB FUNLEG1(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): FOR I=2 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-1)*P(I-1)-I/(I-1)*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB FUNLEG2(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=0: P(2)=3*ABS(1-X^2): FOR I=3 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-2)*P(I-1)-(I+1)/(I-2)*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB CULFAZ(G,L,F(20))
C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A
NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ: FOR I=1 TO L
F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT
END SUB

```

Приведем теперь результаты контрольного счета дифференциальных сечений в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системе при энергии 11 МэВ. Экспериментальные данные по сечениям σ_e и их ошибки для каждого угла взяты из работ [204-206], фазы и параметр смешивания, равный -90° при энергии 10.9 МэВ, взяты из [91] и приведены в таблице 6.8.

Таблица 6.8 - Фазы рассеяния.

δ_L , град	S_1	P_0	P_1	P_2	D_1	D_2	D_3	F_2	F_3	F_4
Re δ	93.2	-34.6	-6.0	-0.5	42.6	116.0	152.2	0.8	13.9	12.4
Im δ	23.4	12.4	4.0	12.2	1.3	5.6	13.8	9.1	4.6	3.1

С такими фазами получаем следующие результаты для дифференциальных сечений σ_t упругого рассеяния

$$\chi^2 = 6.93 \quad \sigma_r = 427.35 \text{ мб.} \quad \sigma_s = 528.95 \text{ мб.}$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i	θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
18.75	0.00	366.15	0.00	98.22	62.80	57.14	20.15
26.20	0.00	233.01	0.00	101.18	62.00	56.47	19.87
29.91	184.00	183.24	0.01	104.08	59.80	54.96	16.29
33.60	139.00	139.33	0.00	105.00	59.70	54.32	20.47

37.28	98.40	101.41	0.59	106.92	56.90	52.76	13.21
40.94	67.20	70.10	4.69	109.71	54.20	50.04	14.84
44.57	43.50	45.68	6.29	110.00	54.30	49.73	17.57
48.19	26.90	27.86	3.14	112.43	49.90	47.01	8.37
51.78	15.80	16.21	1.68	115.00	46.90	43.94	9.92
55.34	10.10	9.95	0.57	115.09	44.50	43.83	0.57
58.87	8.49	8.11	5.02	117.68	41.70	40.69	1.47
62.37	10.20	9.70	6.29	120.00	39.10	37.98	2.07
65.84	14.30	13.75	3.53	120.21	38.30	37.74	0.53
69.28	20.20	19.40	3.99	122.68	34.40	35.10	1.04
72.67	26.90	25.84	3.85	125.00	33.10	32.97	0.04
76.03	34.10	32.48	5.65	130.00	30.00	29.98	0.00
79.34	41.30	38.81	9.01	135.00	29.60	29.85	0.18
82.61	48.00	44.47	13.50	140.43	33.80	33.51	0.04
85.84	53.90	49.23	18.72	145.00	41.90	39.68	1.67
89.01	58.20	52.90	20.90	150.00	52.10	49.21	1.93
92.13	61.10	55.43	21.59	155.00	66.40	60.75	4.52
95.20	62.20	56.83	18.76	160.00	79.70	73.03	4.29

Для полного сечения реакций при этой энергии в [91] была получена экспериментальная величина 430(10) мб, которая хорошо согласуется с нашими расчетами. Расчетные дифференциальные сечения с такими фазами полностью соответствуют результатам работы [91], где с найденными наборами фаз получено некоторое снижение сечения относительно эксперимента в области углов $80^0 - 110^0$.

Можно несколько изменить значения фаз (таблица 6.9) из работы [91] и попытаться улучшить качество описания экспериментальных данных. Варьирование фаз приводит нас к следующим результатам.

Таблица 6.9 - Фазы рассеяния.

δ_L , град	S_1	P_0	P_1	P_2	D_1	D_2	D_3	F_2	F_3	F_4
Re δ	97.1	-34.5	-6.2	-0.4	42.6	116.6	151.6	0.9	14.0	12.4
Im δ	19.8	23.4	2.3	11.5	0.0	5.2	12.7	5.2	3.3	3.3

С такими фазами, для дифференциальных сечений, получается уменьшение χ^2 примерно в 15 раз, хотя сами фазы, за исключением мнимой части P_0 , существенно не изменились

$$\chi^2 = 0.437$$

$$\sigma_r = 380.39 \text{ мб.}$$

$$\sigma_s = 560.84 \text{ мб.}$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i	θ	σ_e	σ_t	χ^2
18.75	0.00	348.37	0.00	98.22	62.80	62.47	0.07
26.20	0.00	221.21	0.00	101.18	62.00	61.65	0.08
29.91	184.00	174.26	1.74	104.08	59.80	59.78	0.00
33.60	139.00	132.87	1.22	105.00	59.70	58.98	0.36
37.28	98.40	97.08	0.11	106.92	56.90	57.05	0.02
40.94	67.20	67.47	0.04	109.71	54.20	53.67	0.24
44.57	43.50	44.29	0.83	110.00	54.30	53.28	0.87
48.19	26.90	27.30	0.56	112.43	49.90	49.89	0.00
51.78	15.80	16.15	1.22	115.00	46.90	46.09	0.74
55.34	10.10	10.14	0.03	115.09	44.50	45.95	2.67
58.87	8.49	8.40	0.25	117.68	41.70	42.08	0.21
62.37	10.20	10.07	0.41	120.00	39.10	38.76	0.19
65.84	14.30	14.26	0.01	120.21	38.30	38.47	0.05
69.28	20.20	20.17	0.01	122.68	34.40	35.28	1.62
72.67	26.90	27.01	0.05	125.00	33.10	32.74	0.30
76.03	34.10	34.21	0.03	130.00	30.00	29.35	1.17
79.34	41.30	41.20	0.01	135.00	29.60	29.59	0.00
82.61	48.00	47.59	0.18	140.43	33.80	34.50	0.26
85.84	53.90	53.06	0.60	145.00	41.90	42.31	0.06
89.01	58.20	57.37	0.52	150.00	52.10	54.02	0.85
92.13	61.10	60.39	0.34	155.00	66.40	67.90	0.32
95.20	62.20	62.08	0.01	160.00	79.70	82.44	0.72

Приведем теперь результаты расчетов для векторной поляризации T_v , полученные с исходными фазами из [91] и их сравнение с экспериментальными данными T_e работ [204-206]. Ошибки поляризаций полагались равными 10% от их величины, хотя реально, некоторые из них доходят до 200% [204-206].

θ	T_{11e}	T_{11t}	χ^2_i	θ	T_{11e}	T_{11t}	χ^2_i
18.75	+3.80E-03	-2.64E-02	+6.31E+03	101.18	-1.65E-01	-1.84E-01	+1.37E+00
26.20	+2.14E-02	+5.38E-04	+9.50E+01	104.08	-2.10E-01	-2.29E-01	+8.52E-01
29.91	+2.07E-02	+5.72E-03	+5.24E+01	105.00	-2.27E-01	-2.43E-01	+5.35E-01
33.60	+1.92E-02	+3.53E-03	+6.66E+01	106.92	-2.60E-01	-2.71E-01	+1.74E-01
37.28	+1.39E-02	-8.27E-03	+2.54E+02	109.71	-2.96E-01	-3.07E-01	+1.39E-01
40.94	-8.80E-03	-3.34E-02	+7.82E+02	110.00	-2.91E-01	-3.10E-01	+4.41E-01
44.57	-4.35E-02	-7.78E-02	+6.23E+01	112.43	-3.31E-01	-3.35E-01	+1.90E-02
48.19	-8.59E-02	-1.50E-01	+5.54E+01	115.00	-3.52E-01	-3.53E-01	+1.30E-03
51.78	-1.50E-01	-2.50E-01	+4.48E+01	115.09	-3.58E-01	-3.53E-01	+1.95E-02
55.34	-1.76E-01	-3.20E-01	+6.67E+01	117.68	-3.67E-01	-3.59E-01	+5.19E-02
58.87	-5.37E-02	-2.13E-01	+8.80E+02	120.00	-3.71E-01	-3.50E-01	+3.29E-01
62.37	+1.13E-01	+9.80E-03	+8.34E+01	120.21	-3.74E-01	-3.48E-01	+4.67E-01
65.84	+2.03E-01	+1.46E-01	+8.07E+00	122.68	-3.40E-01	-3.19E-01	+3.77E-01
69.28	+2.18E-01	+1.91E-01	+1.56E+00	125.00	-3.09E-01	-2.72E-01	+1.47E+00
72.67	+1.97E-01	+1.91E-01	+7.28E-02	130.00	-1.26E-01	-1.01E-01	+3.86E+00
76.03	+1.74E-01	+1.70E-01	+3.27E-02	135.00	+1.20E-01	+1.25E-01	+1.23E-01

79.34	+1.39E-01	+1.38E-01	+4.61E-03	140.43	+3.46E-01	+3.27E-01	+3.07E-01
82.61	+1.04E-01	+9.94E-02	+2.18E-01	145.00	+4.40E-01	+4.08E-01	+5.41E-01
85.84	+5.91E-02	+5.59E-02	+2.86E-01	150.00	+4.20E-01	+4.12E-01	+3.37E-02
89.01	+8.60E-03	+9.60E-03	+1.36E+00	155.00	+4.05E-01	+3.66E-01	+9.29E-01
92.13	-2.96E-02	-3.86E-02	+9.23E+00	160.00	+3.20E-01	+2.97E-01	+5.14E-01
95.20	-7.84E-02	-8.76E-02	+1.39E+00	165.00	+2.48E-01	+2.22E-01	+1.09E+00
98.22	-1.21E-01	-1.37E-01	+1.57E+00				

$$\chi^2 = 195.37$$

Из этих результатов видно, что и поляризации в целом согласуются с экспериментальными данными. Расчеты поляризаций с измененными фазами дают примерно такие же результаты.

6.5 Нетождественные частицы со спином 1/2

Если не учитывать тензорное и спин - орбитальное взаимодействие, сечение рассеяния двух частиц со спином 1/2, например, в системах $p^3\text{He}$, $^3\text{H}^3\text{He}$, может быть представлено в виде [209]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = 1/4 \frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} + 3/4 \frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega} \quad , \quad (6.26)$$

где индексы s и t относятся к синглетному (с полным спином 0) и триплетному (с полным спином 1) состоянию рассеяния и

$$\frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} = |f_s(\theta)|^2 \quad , \quad \frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega} = |f_t(\theta)|^2 \quad . \quad (6.27)$$

Амплитуды рассеяния записываются аналогично (6.2) и (6.3)

$$f_{t,s}(\theta) = f_c(\theta) + f_{t,s}^N(\theta) \quad , \quad (6.28)$$

$$f_c(\theta) = - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0\} \quad ,$$

$$f_s^N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L^s - 1] P_L(\cos\theta) \quad . \quad (6.29)$$

$$f_t^N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L^t - 1] P_L(\cos\theta) \quad .$$

где $S_L^{t,s} = \eta_L^{t,s} \exp[2i\delta_L^{t,s}(k)]$ - матрица рассеяния в триплетном

или синглетном состоянии.

В случае процессов рассеяния тождественных фермионов с полужелым спином, например, NN, $^3\text{He}^3\text{He}$, без учета тензорных и спин - орбитальных взаимодействий знак плюс в (6.9) заменяется на минус для каждого спинового состояния

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2, \quad (6.30)$$

а суммирование выполняется только по нечетным моментам, поскольку четные парциальные волны не дают вклада в суммарное сечение.

Приведем текст компьютерной программы для расчета сечений упругого рассеяния в системе частиц, каждая из которых имеет спин 1/2. Здесь использованы практически те же обозначения, что и в программе для $^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния [210].

REM CALCULATE OF CROSS SECTION FOR COMPLEX PHASE SHIFTS FOR SYSTEM WITH SPIN 1/2+1/2

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: N=200
DIM E(N), DE(N), E1(N), ETA(N), SEC(N), SECE(N), FM(N/10),
FR(N/10), ST(N), SS(N)
REM *****
ISAVE=0: REM =0 - NO SAVE, =1 - SAVE IN FILE
G$="C:\BASICA\SEC\SEC-1-2.DAT"
REM ***** INPUT PARAMETERS *****
PI=4*ATN(1):NN=0: NV=0: LN=0: LV=2: LH=1: TMI=10:
TMA=170
TH=2: AM1=1: AM2=3: Z1=1: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
E1(0)=11.48
REM ***** PHASE SHIFTS *****
REM ***** FOR P- 3HE ON E=11.48 *****
FT(0)=-88.8: FT(1)=55: FT(2)=2.5: FS(0)=-84.6: FS(1)=21.4: FS(2)=-
18.6
111 FOR L=LN TO LV STEP LH: FMT(L)=FMT(L)*PI/180
FT(L)=FT(L)*PI/180: FMS(L)=FMS(L)*PI/180: FS(L)=FS(L)*PI/180
ET(L)=EXP(-2*FMT(L)): ES(L)=EXP(-2*FMS(L)): NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SIGS=0: SIGT=0

```

```

FOR L=LN TO LV STEP LH: FT=FT(L): FS=FS(L)
SIGS=SIGS+(2*L+1)*ET(L)^2*SIN(FT)^2
SIGT=SIGT+(2*L+1)*ES(L)^2*SIN(FS)^2: NEXT L
SIG=1/4*SIGS+3/4*SIGT: SIGMAS=10*4*PI*SIG/SK
PRINT "          SIGMS-TOT=";
PRINT USING " #####.### ";SIGMAS: NEXT J: PRINT
REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
IUSLOV=0: REM = 0 - P - 3HE , =1 - 3HE - 3HE
CALL SEC (FT(), FS(), GG, SS, TMI, TMA, TH, SEC(), ETT(), LN,
LV, LH, IUSLOV)
FOR T=TMI TO TMA/(3.3) STEP TH
PRINT USING "#####.## "; T; SEC(T); T+42; SEC(T+42); T+84;
SEC(T+84); T+126; SEC(T+126): NEXT
211 REM ***** SAVE IN FILE *****
IF ISAVE=0 GOTO 221: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, "          ALPHA - ALPHA FOR LAB E=";
PRINT#1, E1(NN): FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " #.###^ ^ ^ ^ ";T;SEC(T): NEXT
221 END
SUB SEC (FT(100), FS(100), GG, SS, TMI, TMA, TH, S(100),
E(100), LMI, LMA, LH, NYS)
SHARED PI,ET(),ES(),ST(),SS(): DIM S0(20),P(20)
RECU1=0: AIMCU1=0: CALL CULFAZ(GG,S0())
FOR TT=TMI TO TMA STEP TH: T=TT*PI/180: X=COS(T): A=2/(1-
X)
S0=2*S0(0): BB=-GG*A: ALO=GG*LOG(A)+S0
RECU=BB*COS(ALO): AIMCU=BB*SIN(ALO)
IF NYS=0 GOTO 555: X1=COS(T): A1=2/(1+X1)
BB1=-GG*A1: ALO1=GG*LOG(A1)+S0:
RECU1=BB1*COS(ALO1)
AIMCU1=BB1*SIN(ALO1):555 RET=0: AIT=0: RES=0: AIS=0
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: AL=ET(L)*COS(2*FT(L))-1
BE=ET(L)*SIN(2*FT(L)): LL=2*L+1: SL=2*S0(L)
CALL POLLEG(X,L,P())
RET=RET+LL*(BE*COS(SL)+AL*SIN(SL))*P(L)
AIT=AIT+LL*(BE*SIN(SL)-AL*COS(SL))*P(L)
AL=ES(L)*COS(2*FS(L))-1: BE=ES(L)*SIN(2*FS(L))
RES=RES+LL*(BE*COS(SL)+AL*SIN(SL))*P(L)
AIS=AIS+LL*(BE*SIN(SL)-AL*COS(SL))*P(L): NEXT L
IF NYS=0 GOTO 556
AIT=2*AIT: RET=2*RET: AIS=2*AIS: RES=2*RES
556 RETR=RECU+RECU1+RET:
AITR=AIMCU+AIMCU1+AIT
RESI=RECU+RECU1+RES: AISI=AIMCU+AIMCU1+AIS

```

```

ST(TT)=10*(RETR^2+AITR^2)/4/SS^2
SS(TT)=10*(RESI^2+AISI^2)/4/SS^2
S(TT)=1/4*SS(TT)+3/4*ST(TT): NEXT TT: END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB CULFAZ(G,F(20))
REM COULOMB PHASE SHIFTS
C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A
NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ: FOR I=1 TO 20
F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB
    
```

Рассмотрим пример рассеяния в $p^3\text{He}$ системе при энергии 11.48 МэВ. В работе [211] приведены дифференциальные сечения, которые мы повторяем в таблице 6.10. Ошибки сечений для разных углов составляют 2.2 - 2.5 %.

Таблица 6.10 - Сечения рассеяния.

θ , град	σ_e , мб/ст	$\Delta\sigma_e$, мб/ст
27.64	223.1	5.58
31.97	222.0	5.55
36.71	211.9	5.30
82.53	54.27	1.36
90.00	36.76	0.92
96.03	25.70	0.64
102.80	16.78	0.42
110.55	13.21	0.33
116.57	13.21	0.33
125.27	20.26	0.51
133.48	32.21	0.81
140.79	45.95	1.15
147.21	58.82	1.47
153.90	75.46	1.89
162.14	92.72	2.32
165.67	97.70	2.44
166.59	101.10	2.53

Фазы рассеяния для этой энергии приведены в работе [212] и в таблице 6.11. Поскольку мы не учитываем спин - орбитальное расщепление, вместо трех триплетных P фаз нужно использовать их среднее значение, для которого примем 55^0 [210].

Таблица 6.11 - Фазы рассеяния.

S = 0			S = 1				
1S_0	1P_1	1D_2	3S_0	3P_0	3P_1	3P_2	3D_2
-84.6	21.4	-18.6	-88.8	44.3	49.4	66.7	2.5

Приведем теперь дифференциальные сечения, вычисленные по нашей программе с этими фазами

θ	σ	θ	σ	θ	σ	θ	σ
10.00	770.70	52.00	149.99	94.00	26.44	136.00	37.41
12.00	398.83	54.00	142.53	96.00	23.41	138.00	41.45
14.00	274.67	56.00	135.08	98.00	20.70	140.00	45.66
16.00	232.31	58.00	127.68	100.00	18.34	142.00	50.02
18.00	219.10	60.00	120.35	102.00	16.33	144.00	54.49
20.00	216.29	62.00	113.12	104.00	14.67	146.00	59.03
22.00	216.71	64.00	106.03	106.00	13.38	148.00	63.60
24.00	217.54	66.00	99.10	108.00	12.46	150.00	68.16
26.00	217.70	68.00	92.34	110.00	11.90	152.00	72.68
28.00	216.83	70.00	85.78	112.00	11.73	154.00	77.11
30.00	214.86	72.00	79.42	114.00	11.93	156.00	81.40
32.00	211.86	74.00	73.29	116.00	12.51	158.00	85.53
34.00	207.95	76.00	67.39	118.00	13.47	160.00	89.44
36.00	203.26	78.00	61.73	120.00	14.80	162.00	93.11
38.00	197.91	80.00	56.34	122.00	16.49	164.00	96.50
40.00	192.00	82.00	51.20	124.00	18.54	166.00	99.58
42.00	185.64	84.00	46.34	126.00	20.93	168.00	102.30
44.00	178.93	86.00	41.76	128.00	23.65	170.00	104.66
46.00	171.94	88.00	37.47	130.00	26.68		
48.00	164.75	90.00	33.49	132.00	30.00		
50.00	157.42	92.00	29.81	134.00	33.59		

Сравнение расчета с экспериментом приведено на рис.6.1. Из этих результатов видно вполне хорошее согласие с экспериментальными данными, не смотря на то, что в расчетах использовалась средняя P фаза, т.е. не учитывалось спин - орбитальное расщепление, которое будет рассмотрено в следующем параграфе.

6.6 Неждественные частицы со спином 1/2 и спин - орбитальными силами

Если в системе частиц со спинами 1/2 учесть спин - орбитальное взаимодействие, то для триплетного сечения можно использовать формулы, которые применялись ранее для $^2\text{H}^4\text{He}$ системы, по-

сколькую она находится именно в триплетном состоянии

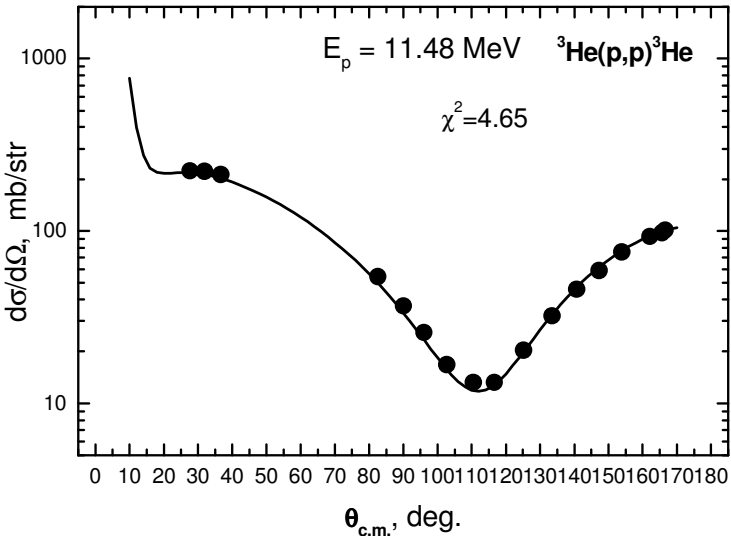


Рис.6.1 Сравнение расчета и экспериментальных данных для упругого $p^3\text{He}$ рассеяния.

$$\frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{3} \left[|A|^2 + 2(|B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2) \right] .$$

Для синглетного сечения используем формулы предыдущего параграфа (6.26), (6.27) и (6.29).

Приведем теперь текст программы для расчетов упругих сечений частиц со спином 1/2 с учетом спин - орбитального взаимодействия. Обозначения практически совпадают с предыдущей программой и программой для рассеяния в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системе [203].

REM CALCULATE OF CROSS SECTION ON COMPLEX PHASE SHIFTS FOR SYSTEM WITH 1/2+1/2 SPIN

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: N=200
DIM E(N),E1(N),EP(N/10),EM(N/10),E0(N/10)
DIM SEC(N), FM(N/10), F0(N/10), FP(N/10)
REM *****
ISAVE=1: REM =0 - NO SAVE, =1 - SAVE IN FILE
G$="C:\BASICA\SEC\AL-d1.DAT"
REM ***** INPUT PARAMETERS *****
PI=4*ATN(1): NN=0: NV=0: LN=0: LV=2: LH=1: TMI=10:
TMA=170
    
```

```

TH=2: AM1=1: AM2=3: Z1=1: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
E1(0)=11.48
REM **** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION *****
SECE(1)=223.1: SECE(2)=222: SECE(3)=211.9: SECE(4)=54.27
SECE(5)=36.76
SECE(6)=25.7: SECE(7)=16.78: SECE(8)=13.21: SECE(9)=13.21
SECE(10)=20.26: SECE(11)=32.21: SECE(12)=45.95:
SECE(13)=58.82
SECE(14)=75.46: SECE(15)=92.72: SECE(16)=97.7: SECE(17)=101.1
TT(1)=27.64: TT(2)=31.97: TT(3)=36.71: TT(4)=82.53: TT(5)=90
TT(6)=96.03: TT(7)=102.8: TT(8)=110.55: TT(9)=116.57:
TT(10)=125.27
TT(11)=133.48: TT(12)=140.79: TT(13)=147.21: TT(14)=153.9
TT(15)=162.14: TT(16)=165.67: TT(17)=166.59: NT=17
REM ***** PHASE SHIFTS *****
REM ***** FOR P-3HE ON E=11.48 *****
FP(0)=-88.8: FPI(0)=0: FP(1)=66.7: FPI(1)=0
FP(2)=2.5: FPI(2)=0: F0(0)=-88.8: FOI(0)=0
F0(1)=49.4: FOI(1)=0: F0(2)=2.5: FOI(2)=0
FM(0)=-88.8: FMI(0)=0: FM(1)=44.3: FMI(1)=0
FM(2)=2.5: FMI(2)=0: FS(0)=-84.6: FSI(0)=0
FS(1)=21.4: FSI(1)=0: FS(2)=-18.6: FSI(2)=0
FS(3)=0: FSI(3)=0: FT(0)=-88.8: FTI(0)=0
FT(1)=55: FTI(1)=0: FT(2)=2.5: FTI(2)=0
111 FOR L=LN TO LV STEP LH: FM(L)=FM(L)*PI/180
FP(L)=FP(L)*PI/180: F0(L)=F0(L)*PI/180: FMI(L)=FMI(L)*PI/180
FPI(L)=FPI(L)*PI/180: FOI(L)=FOI(L)*PI/180: FT(L)=FT(L)*PI/180
FS(L)=FS(L)*PI/180: FSI(L)=FSI(L)*PI/180: FTI(L)=FTI(L)*PI/180
EP(L)=EXP(-2*FPI(L)): EM(L)=EXP(-2*FMI(L)): E0(L)=EXP(-
2*FOI(L))
ET(L)=EXP(-2*FTI(L)): ES(L)=EXP(-2*FSI(L)): NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SRT=0: SRS=0: SST=0: SSS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: AP=FP(L): AM=FM(L): A0=F0(L)
ASS=FS(L): L1=2*L+3: L2=2*L+1: L3=2*L-1
SRT=SRT+L1*(1-EP(L)^2)+L2*(1-E0(L)^2)+L3*(1-EM(L)^2)
SRS=SRS+L2*(1-ES(L)^2)
SST=SST+L1*EP(L)^2*SIN(AP)^2+L2*E0(L)^2*SIN(A0)^2+L3*EM(
L)^2*SIN(AM)^2: SSS=SSS+L2*ES(L)^2*SIN(ASS)^2: NEXT L

```

```

SRT=10*PI*SRT/SK/3:                                SRS=10*PI*SRS/SK:
SIGR=1/4*SRS+3/4*SRT
SST=10*4*PI*SST/SK/3: SSS=10*4*PI*SSS/SK
SIGS=1/4*SSS+3/4*SST
PRINT "                SIGMR-TOT=";: PRINT USING " #####.###
";SIGR
PRINT "                SIGMS-TOT=";: PRINT USING " #####.###
";SIGS
NEXT J: PRINT
REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL SEC(SS,GG,SEC(),POL()): FOR T=TMI TO (TMA/3.3) STEP
TH
PRINT USING " ### ";T;: PRINT USING " #####.##  ";SEC(T);
PRINT T+42;: PRINT USING " #####.##  ";SEC(T+42);
PRINT T+84;: PRINT USING " #####.##  ";SEC(T+84);
PRINT T+126;: PRINT USING " #####.##  ";SEC(T+126): NEXT
REM ***** XI^2 *****
S1=0: FOR K=1 TO NT STEP 1
DE(K)=((SEC(K)-SECE(K))/(SECE(K)*0.025))^2: S1=S1+DE(K)
NEXT: XI=S1/NT: XIS=SQR(XI): PRINT
PRINT "                XI=";XI;XIS: PRINT
REM ***** SAVE IN FILE *****
IF ISAVE=0 GOTO 221: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, "                P - 3He FOR LAB E=";: PRINT#1, E1(NN)
FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " +#.###^^^ " ; T; SEC(T); POL(T): NEXT
221 END
SUB SEC (SS, GG, S(100), POL(100))
  SHARED FP(),EP(),F0(),E0(),FM(),EM(),FS(),ES(),FT(),ET()
  SHARED                PI,TMI,TMA,TH,LN,LV,LH:                DIM
S0(20),P(20),P1(20),P2(20)
  CALL CULFAZ(GG,S0()): FOR TT=TMI TO TMA STEP TH
  T=TT*PI/180: X=COS(T): A=2/(1-X): S0=2*S0(0)
  BB=-GG*A: ALO=GG*LOG(A)+S0: RECU=BB*COS(ALO)
  AMCUL=BB*SIN(ALO): REA=0: AMA=0: REB=0: AMB=0: REC=0
  AMC=0: RED=0: AMD=0: REE=0: AME=0
  FOR L=LN TO LV STEP LH
  CALL POLLEG(X,L,P()): FP=2*FP(L): FM=2*FM(L)
  F0=2*F0(L): SL=2*S0(L): C=COS(SL): S=SIN(SL)
  AL1P=EP(L)*COS(FP)-1: AL2P=EP(L)*SIN(FP)
  AL1M=EM(L)*COS(FM)-1: AL2M=EM(L)*SIN(FM)
  AL10=E0(L)*COS(F0)-1: AL20=E0(L)*SIN(F0)
  A1=(L+1)*AL1P+L*AL1M: A2=(L+1)*AL2P+L*AL2M
  REA=REA+(A2*C+A1*S)*P(L): AMA=AMA+(A2*S-A1*C)*P(L)

```

```

B1=(L+2)*AL1P+(2*L+1)*AL10+(L-1)*AL1M
B2=(L+2)*AL2P+(2*L+1)*AL20+(L-1)*AL2M
REB=REB+(B2*C+B1*S)*P(L)/2: AMB=AMB+(B2*S-B1*C)*P(L)/2
IF L<1 GOTO 1111: CALL FUNLEG1(X,L,P1()): C1=AL1P-AL1M
C2=AL2P-AL2M: CC1=1/(SQR(2))
REC=REC+(C2*C+C1*S)*P1(L)*CC1
AMC=AMC+(C2*S-C1*C)*P1(L)*CC1: DD1=1/(SQR(2)*L*(L+1))
D1=L*(L+2)*AL1P-(2*L+1)*AL10-(L^2-1)*AL1M
D2=L*(L+2)*AL2P-(2*L+1)*AL20-(L^2-1)*AL2M
RED=RED+(D2*C+D1*S)*P1(L)*DD1
AMD=AMD+(D2*S-D1*C)*P1(L)*DD1
1111 IF L<2 GOTO 2222:CALL FUNLEG2(X,L,P2()):
EE1=1/(2*L*(L+1))
E1=L*AL1P-(2*L+1)*AL10+(L+1)*AL1M
E2=L*AL2P-(2*L+1)*AL20+(L+1)*AL2M
REE=REE+(E2*C+E1*S)*P2(L)*EE1
AME=AME+(E2*S-E1*C)*P2(L)*EE1
2222 NEXT L: RET=0: AMT=0: RES=0: AMS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH
C=COS(2*S0(L)): S=SIN(2*S0(L)): ALS=ES(L)*COS(2*FS(L))-1
BS=ES(L)*SIN(2*FS(L)): RES=RES+(2*L+1)*(BS*C+ALS*S)*P(L)
AMS=AMS+(2*L+1)*(BS*S-ALS*C)*P(L): NEXT L
RES=RECU+RES: AMS=AMCU+AMS
SES=10*(RES^2+AMS^2)/4/SS^2: REA=RECU+REA
AMA=AMCU+AMA: REB=RECU+REB: AMB=AMCU+AMB
AA=REA^2+AMA^2: BB=REB^2+AMB^2: CC=REC^2+AMC^2
DD=RED^2+AMD^2: EE=REE^2+AME^2
SEC=10*(AA+2*(BB+CC+DD+EE))/4/SS^2/3:
S(TT)=3/4*SEC+1/4*SES
NEXT TT: END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB FUNLEG1(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): FOR I=2 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-1)*P(I-1)-I/(I-1)*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB FUNLEG2(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=0: P(2)=3*ABS(1-X^2): FOR I=3 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-2)*P(I-1)-(I+1)/(I-2)*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB CULFAZ(G,F(20))
C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A
NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ: FOR I=1 TO 20
F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB

```

Приведем результаты контрольного счета для $p^3\text{He}$ системы при энергии 11.48 МэВ, которая была рассмотрена в предыдущем параграфе [212]. Теперь мы учитываем спин - орбитальное взаимодействие и используем все три Р фазы из работы [212], результаты по которым также были приведены в предыдущем параграфе.

В данном случае был выполнен расчет при углах рассеяния, которые приведены в работе [212] и вычислен полный χ^2 со средней экспериментальной ошибкой 2.5% на точку.

θ	σ_e	σ_t
27.64	223.10	229.16
31.97	222.00	222.69
36.71	211.90	211.15
82.53	54.27	53.52
90.00	36.76	36.25
96.03	25.70	25.47
103.80	16.78	16.16
110.55	13.21	12.60
116.57	13.21	13.12
125.27	20.26	19.96
133.48	32.21	32.33
140.79	45.95	46.98
147.21	58.82	61.39
153.90	75.46	76.52
162.14	92.72	93.06
165.67	97.70	98.82
166.59	101.10	100.16

$$\chi^2 = 0.74$$

Из этих результатов видно, что согласие с экспериментом существенно улучшилось, а χ^2 вполне согласуется со значением, приведенным в [212], где получено $\chi^2 = 0.45$. Отметим, что в предыдущем случае, когда не использовалось спин - орбитальное расщепление, величина χ^2 была намного больше и равнялась 4.6.

Здесь мы, по - прежнему, не учитываем возможное смешивание состояний с разным спиновым моментом, которое будет рассмотрено в следующем параграфе.

6.7 Нетождественные частицы со спином 1/2, спин - орбитальными силами и смешиванием триплет - синглетных состояний

При рассеянии нетождественных частиц с полуцелым спином, например, N^3H , N^3He , с учетом спин - орбитальных взаимодействий, смешивания различных орбитальных состояний за счет тензорных сил и смешивания синглет - триплетных состояний, дифференциальное сечение рассеяния имеет более сложный вид, и в формулы для сечений входят, как фазы рассеяния, так и параметры смешивания состояний с разным спином и орбитальным моментом [213]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2k^2} \{ |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2 + |G|^2 + |H|^2 \} . \quad (6.31)$$

Амплитуды рассеяния записываются в наиболее полном виде

$$\begin{aligned} A &= f_c' + \frac{1}{4} \sum_{L=0}^{\infty} P_L(x) \left\{ \sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+2) U_{L,1;L,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,1;L,1}^L + \right. \\ &\quad \left. + (L-1) U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\} , \quad (6.32) \\ B &= f_c' + \frac{1}{4} \sum_{L=0}^{\infty} P_L(x) \left\{ \sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+1) U_{L,1;L,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,0;L,0}^L + \right. \\ &\quad \left. + L U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\} , \\ C &= \frac{1}{4} \sum_{L=0}^{\infty} P_L(x) \left\{ \sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+1) U_{L,1;L,1}^{L+1} - (2L+1) U_{L,0;L,0}^L + \right. \\ &\quad \left. + L U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\} , \\ D &= -\frac{1}{4} i \sin\theta \sum_{L=1}^{\infty} P_L'(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ -\sqrt{(L+1)(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} - (2L+1) U_{L,1;L,0}^L \right\} , \\ E &= -\frac{1}{4} i \sin\theta \sum_{L=1}^{\infty} P_L'(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ -\sqrt{(L+1)(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,1;L,0}^L \right\} , \\ F &= -\frac{1}{4} i \sin^2\theta \sum_{L=2}^{\infty} P_L''(x) / \sqrt{(L-1)L(L+1)(L+2)} \left\{ -\sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\frac{L(L-1)(L+2)}{L+1}} U_{L,1;L,1}^{L+1} - (2L+1) \sqrt{\frac{(L-1)(L+2)}{L(L+1)}} U_{L,1;L,1}^L + \\
 & + \left\{ \sqrt{\frac{(L-1)(L+1)(L+2)}{L}} U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\}, \\
 G = & -\frac{1}{4} i \text{Sin} \theta \sum_{L=1}^{\infty} P_L'(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ \sqrt{(L-1)(L+1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+2) \sqrt{\frac{L}{L+1}} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\
 & \left. - \frac{(2L+1)}{\sqrt{L(L+1)}} U_{L,1;L,1}^L - (L-1) \sqrt{\frac{(L+1)}{L}} U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} - (2L+1) U_{L,0;L,1}^L \right\}, \\
 H = & -\frac{1}{4} i \text{Sin} \theta \sum_{L=1}^{\infty} P_L'(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ \sqrt{(L-1)(L+1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+2) \sqrt{\frac{L}{L+1}} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\
 & \left. - \frac{(2L+1)}{\sqrt{L(L+1)}} U_{L,1;L,1}^L - (L-1) \sqrt{\frac{(L+1)}{L}} U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,0;L,1}^L \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь матрица рассеяния представляется в форме

$$U_{L,S;L',S'}^J = U_{L',S';L,S}^J = \exp[i(\alpha_L + \alpha_{L'})](S_{L',S';L,S}^J - \delta_{L,L'} \delta_{S,S'})$$

и, например, при $L = 1$ и $J = 1$ с учетом смешивания $\epsilon_{1,0}^1 = \epsilon_{S,S'}^1$ синглетного и триплетного состояний записывается [212]

$$\begin{aligned}
 S_{1,0;1,0}^1 &= \text{Cos}^2 \epsilon_{1,0}^1 \exp(2i\delta_{0,1}^1) + \text{Sin}^2 \epsilon_{1,1}^1 \exp(2i\delta_{1,1}^1), \quad (6.33) \\
 S_{1,1;1,1}^1 &= \text{Sin}^2 \epsilon_{1,0}^1 \exp(2i\delta_{0,1}^1) + \text{Cos}^2 \epsilon_{1,1}^1 \exp(2i\delta_{1,1}^1), \\
 S_{1,0;1,1}^1 &= S_{1,1;1,0}^1 = \frac{1}{2} \text{Sin}(2\epsilon_{1,0}^1) (\exp(2i\delta_{0,1}^1) - \exp(2i\delta_{1,1}^1)),
 \end{aligned}$$

где $\delta_{k,k}$ - дельта функция, $x = \text{Cos}(\theta)$, величины без штриха обозначают начальное состояние, а со штрихом - конечное при том же полном моменте J , кулоновские фазы α_L были определены в (6.8), а ядерные фазы $\delta_{S,L}^J$ считаются комплексными, чтобы учесть неупругие каналы.

Смешивание $\epsilon_1 = \epsilon_{S,S'}$ триплетных (спины S и S' , и полный момент равны 1) S и D состояний определяется следующими выражениями для матрицы рассеяния

$$S_{0,0}^1 = \text{Cos}^2 \epsilon_1 \exp(2i\delta_0^1) + \text{Sin}^2 \epsilon_1 \exp(2i\delta_2^1), \quad (6.34)$$

$$S_{2,2}^1 = \text{Sin}^2 \epsilon_1 \exp(2i\delta_0^1) + \text{Cos}^2 \epsilon_1 \exp(2i\delta_2^1) ,$$

$$S_{0,2}^1 = S_{2,0}^1 = \frac{1}{2} \text{Sin}(2\epsilon_1) \left[\exp(2i\delta_0^1) - \exp(2i\delta_2^1) \right] .$$

Штрихи у полиномов Лежандра обозначают производные, а кулоновская амплитуда рассеяния записана несколько в другой форме (за знак модуля вынесена величина $1/i$)

$$f_c'(\theta) = - \left(\frac{i\eta}{2 \text{Sin}^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\text{Sin}^{-2}(\theta/2)]\} .$$

Производные полиномов Лежандра связаны с функциями Лежандра следующим образом

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}(x^2-1)^n}{dx^{m+n}} = \text{Sin}^m \theta \frac{d^m P_n(\text{Cos}\theta)}{(d\text{Cos}\theta)^m}$$

Поляризация (например, протонов в $p^3\text{H}$ рассеянии) может быть записана в виде

$$P = - \left[\frac{2 \text{Re}(AE^* + BH^* + CG^* + DF^*)}{|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2 + |G|^2 + |H|^2} \right] . \quad (6.35)$$

Если в выражениях (6.32) пренебречь тензорным взаимодействием и синглет - триплетным смешиванием, то матрица рассеяния примет обычный вид $\exp(2i\delta_{S,L})$ с комплексной фазой.

В том случае, если в выражениях (6.32) отбросить синглетное состояние (все матричные элементы с $S = 0$ положить равными нулю), то эти формулы преобразуются к виду, который можно использовать для расчета сечений в $^2\text{H}^4\text{He}$ системе не только с учетом спин - орбитальных, но и тензорных взаимодействий.

В случае рассеяния не тождественных частиц с полным моментом $3/2$, например, $p^2\text{H}$ $p^6\text{Li}$ и т.д., формулы для сечений упругого рассеяния приведены в работах [214,215,216], а процессы рассеяния тождественных частиц с полуцелым спином, например, NN , $^3\text{H}^3\text{H}$, $^3\text{He}^3\text{He}$ и т.д. описаны в работе [217].

Во всех случаях, если оказываются открытыми неупругие процессы, фазы рассеяния становятся комплексными и мнимая часть учитывает переход сталкивающихся частиц в неупругий ка-

нал.

Приведем теперь программу расчета дифференциальных сечений упругого рассеяния в системе частиц со спином 1/2 и учетом синглет - триплетного смешивания. Обозначения в программе практически совпадают с обозначениями в предыдущем случае [210].

REM CALCULATE OF CROSS SECTION ON COMPLEX PHASE SHIFTS FOR SYSTEM WITH 1/2+1/2 SPIN

```

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,J,K,L,N,M: N=200
DIM E(N), DE(N), E1(N), EP(N/10), EM(N/10), E0(N/10), TT(N),
SEC(N), SECE(N), FM(N/10), F0(N/10), FP(N/10), EPSS(N), FPI(N),
FPI(N), FMI(N)
REM *****
ISAVE=1: REM =0 - NO SAVE, =1 - SAVE IN FILE
G$="C:\BASICA\SEC\P-3HE-SL.DAT"
REM ***** INPUT PARAMETERS *****
PI=4*ATN(1): NN=0: NV=0: LN=0: LV=2: LH=1: TMI=10:
TMA=170
TH=2: AM1=1: AM2=3: Z1=1: Z2=2: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
IXI=1: REM IF =1 - XI^2 WILL BE CALCULATE, =0 NO CALCUL
LATE
E1(0)=11.48
REM *** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION 11.48 *****
SECE(1)=223.1: SECE(2)=222: SECE(3)=211.9
SECE(4)=54.27: SECE(5)=36.76: SECE(6)=25.7
SECE(7)=16.78: SECE(8)=13.21: SECE(9)=13.21
SECE(10)=20.26: SECE(11)=32.21: SECE(12)=45.95
SECE(13)=58.82: SECE(14)=75.46: SECE(15)=92.72
SECE(16)=97.7: SECE(17)=101.1: TT(1)=27.64: TT(2)=31.97
TT(3)=36.71: TT(4)=82.53: TT(5)=90: TT(6)=96.03: TT(7)=103.8
TT(8)=110.55: TT(9)=116.57: TT(10)=125.27: TT(11)=133.48
TT(12)=140.79: TT(13)=147.21: TT(14)=153.9: TT(15)=162.14
TT(16)=165.67: TT(17)=166.59: NT=17
REM ***** FOR P-3HE ON E=11.48 *****
EPSS(1)=-11.2
FP(0)=-88.8: FPI(0)=0: FP(1)=66.7: FPI(1)=0
FP(2)=2.5: FPI(2)=0: FP(3)=0: FPI(3)=0
F0(0)=0: F0I(0)=0: F0(1)=49.4: F0I(1)=0
F0(2)=2.5: F0I(2)=0: F0(3)=0: F0I(3)=0
FM(0)=0: FMI(0)=0: FM(1)=44.3: FMI(1)=0
FM(2)=2.5: FMI(2)=0: FM(3)=0: FMI(3)=0

```

```

FS(0)=-84.6: FSI(0)=0: FS(1)=21.4: FSI(1)=0
FS(2)=-18.6: FSI(2)=0: FS(3)=0: FSI(3)=0
FOR L=LN TO LV+2 STEP LH: FM(L)=FM(L)*PI/180
FP(L)=FP(L)*PI/180: F0(L)=F0(L)*PI/180: FMI(L)=FMI(L)*PI/180
FPI(L)=FPI(L)*PI/180: FOI(L)=FOI(L)*PI/180: FS(L)=FS(L)*PI/180
FSI(L)=FSI(L)*PI/180: EP(L)=EXP(-2*FPI(L)): EM(L)=EXP(-
2*FMI(L))
E0(L)=EXP(-2*FOI(L)): E(L)=EXP(-2*FSI(L)):
EPS(L)=EPS(L)*PI/180
EPSS(L)=EPSS(L)*PI/180: NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
FOR I=NN TO NV: E(I)=E1(I)*PM/AM1: NEXT I
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR J=NN TO NV: SK=E(J)*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS: SERT=0: SERS=0: SEST=0:
SESS=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: AP=FP(L): AM=FM(L): A0=F0(L):
ASS=FS(L)
L1=2*L+3: L2=2*L+1: L3=2*L-1
SERT = SERT + L1*(1 - EP(L)^2) + L2*(1 - E0(L)^2) + L3*(1 -
EM(L)^2)
SERS=SERS+L2*(1-ES(L)^2)
SEST = SEST + L1*EP(L)^2*SIN(AP)^2 + L2*E0(L)^2*SIN(A0)^2 +
L3*EM(L)^2*SIN(AM)^2: SESS=SESS+L2*ES(L)^2*SIN(ASS)^2:
NEXT L
SIGRT=10*PI*SERT/SK/3: SIGRS=10*PI*SERS/SK
SIGR=1/4*SIGRS+3/4*SIGRT: SIGST=10*4*PI*SEST/SK/3
SIGSS=10*4*PI*SESS/SK: SIGS=1/4*SIGSS+3/4*SIGST
PRINT " SIGMR-TOT="; PRINT USING " ####.###
";SIGR
PRINT " SIGMS-TOT="; PRINT USING " ####.###
";SIGS
NEXT J: PRINT
REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL SEC(SS,GG,SEC(),POL())
REM ***** XI^2 *****
IF IXI=0 GOTO 211: S1=0: FOR K=1 TO NT STEP 1
DE(K)=((SEC(K)-SECE(K))/(SECE(K)*0.025))^2: S1=S1+DE(K)
NEXT: XI=S1/NT: XIS=SQR(XI)
PRINT " T S-EXP DEL-S-EXP S-TER DE"
211 FOR I=1 TO NT STEP 1: PRINT USING " ###.## ";TT(I);
PRINT USING " #####.## "; SECE(I); SECE(I)*0.025; SEC(I);
DE(I)
NEXT: PRINT: PRINT " XI=";XI;XIS: PRINT

```

```

REM ***** SAVE IN FILE *****
IF ISAVE=0 GOTO 221: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, "      P - 3HE FOR LAB E=";
PRINT#1, E1(NN): PRINT#1, " T      SEC "
FOR T=TMI TO TMA STEP TH: PRINT#1, USING "  +#.###^^^"
";T;SEC(T)
NEXT: PRINT#1, "      XI=";XI;XIS
221 END
SUB SEC(SS,GG,S(100),POL(100))
  SHARED FP(), EP(), F0(), E0(), FM(), EM(), FS(), ES(), FT(), ET(),
  TT()
  SHARED PI,TMI,TMA,TH,LN,LV,LH,NT,EPSS()
  DIM S0(20),P(20),P1(20),P2(20)
  CALL CULFAZ(GG,LV+2,S0()): FOR I=1 TO NT STEP 1
    T=TT(I)*PI/180
    X=COS(T): CALL AMPCUL(X,GG,S0(),RECU,AMCU)
    CALL POLLEG(X,LV,P()): CALL FUNLEG1(X,LV,P1())
    CALL FUNLEG2(X,LV,P2())
    REA=0: AMA=0: REB=0: AMB=0: REC=0
    AMC=0: RED=0: AMD=0: REE=0: AME=0: RRG=0: AAG=0: REH=0
    AMH=0: REF=0: AMF=0: FOR L=LN TO LV STEP LH:
      FP=2*FP(L)
      FM=2*FM(L): F0=2*F0(L): SL=2*S0(L): C=COS(SL): S=SIN(SL)
      FS=2*FS(L): SO=SIN(EPSS(L))^2: CO=COS(EPSS(L))^2
      AL1P=EP(L)*COS(FP)-1: AL2P=EP(L)*SIN(FP)
      AL1M=EM(L)*COS(FM)-1: AL2M=EM(L)*SIN(FM)
      AL10=SO*ES(L)*COS(FS)+CO*E0(L)*COS(F0)-1
      AL20=SO*ES(L)*SIN(FS)+CO*E0(L)*SIN(F0)
      A1=(L+2)*AL1P+(2*L+1)*AL10+(L-1)*AL1M
      A2=(L+2)*AL2P+(2*L+1)*AL20+(L-1)*AL2M
      REA=REA+(A1*C-A2*S)*P(L)/2:
      AMA=AMA+(A1*S+A2*C)*P(L)/2
      ALS=CO*ES(L)*COS(FS)+SO*E0(L)*COS(F0)-1
      BS=CO*ES(L)*SIN(FS)+SO*E0(L)*SIN(F0)
      RES=(2*L+1)*(ALS*C-BS*S): AMS=(2*L+1)*(ALS*S+BS*C)
      B1=(L+1)*AL1P+L*AL1M: B2=(L+1)*AL2P+L*AL2M
      REB=REB+(B1*C-B2*S+RES)*P(L)/2
      AMB=AMB+(B1*S+B2*C+AMS)*P(L)/2
      REC=REC+(B1*C-B2*S-RES)*P(L)/2
      AMC=AMC+(B1*S+B2*C-AMS)*P(L)/2
      IF L<1 GOTO 1111: SI2=1/2*SIN(2*EPSS(L))
      AL1=SI2*(ES(L)*COS(FS)-E0(L)*COS(F0))
      AL2=SI2*(ES(L)*SIN(FS)-E0(L)*SIN(F0))
      RE1=(2*L+1)*(AL2*C+AL1*S)/SQR(L*(L+1))

```

```

AM1=(2*L+1)*(AL2*S-AL1*C)/SQR(L*(L+1))
C1=AL1P-AL1M: C2=AL2P-AL2M
RED=RED+(C2*C+C1*S-RE1)*P1(L)/2
AMD=AMD+(C2*S-C1*C-AM1)*P1(L)/2
REE=REE+(C2*C+C1*S+RE1)*P1(L)/2
AME=AME+(C2*S-C1*C+AM1)*P1(L)/2
D1=(L+2)/(L+1)*AL1P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL10-(L-1)/L*AL1M
D2=(L+2)/(L+1)*AL2P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL20-(L-1)/L*AL2M
RRG=RRG+(D2*C+D1*S-RE1)*P1(L)/2
AAG=AAG+(D2*S-D1*C-AM1)*P1(L)/2
REH=REH+(D2*C+D1*S+RE1)*P1(L)/2
AMH=AMH+(D2*S-D1*C+AM1)*P1(L)/2
1111 IF L<2 GOTO 2122
F1=1/(L+1)*AL1P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL10+AL1M/L
F2=1/(L+1)*AL2P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL20+AL2M/L
REF=REF+(F2*C+F1*S)*P2(L)/2: AMF=AMF+(F2*S-F1*C)*P2(L)/2
2122 NEXT L: CALL SINGL(X,P),S0(),LN,LV,LH,RES,AMS)
RES=RECU+RES: AMS=AMCU+AMS
SES=10*(RES^2+AMS^2)/4/SS^2: REA=RECU+REA
AMA=AMCU+AMA: REB=RECU+REB: AMB=AMCU+AMB
AA=REA^2+AMA^2: BB=REB^2+AMB^2: CC=REC^2+AMC^2
DD=RED^2+AMD^2: EE=REE^2+AME^2: FF=REF^2+AMF^2
HH=REH^2+AMH^2: GGG=RRG^2+AAG^2
SUM=AA+BB+CC+DD+EE+GGG+HH+FF: S(I)=10*SUM/2/SS^2/4
POL(I)=-2*(REA*REE + AMA*AME + REB*REH + AMB*AMH +
REC*RRG + AMC*AAG + RED*REF + AMD*AMF)/SUM
REM POL(I)=POL(I)*SIN(T): NEXT I: END SUB
SUB AMPCUL(X,GG,S0(20),RECU,AMCU)
A=2/(1-X): S0=2*S0(0): BB=-GG*A: AL=GG*LOG(A)+S0
RECU=-BB*SIN(AL): AMCU=BB*COS(AL): END SUB
SUB SINGL (X, P(20), S0(20), LN, LV, LH, RES, AMS)
SHARED FS(),ES()
RES=0: AMS=0: FOR L=LN TO LV STEP LH: SL=2*S0(L):
C=COS(SL)
S=SIN(SL): FT=2*FT(L): FS=2*FS(L): ALT=ET(L)*COS(FT)-1
BT=ET(L)*SIN(FT): ALS=ES(L)*COS(FS)-1: BS=ES(L)*SIN(FS)
RES=RES+(2*L+1)*(BS*C+ALS*S)*P(L)
AMS=AMS+(2*L+1)*(BS*S-ALS*C)*P(L): NEXT L: END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB FUNLEG1(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): FOR I=2 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-1)*P(I-1)-I/(I-1)*P(I-2): NEXT: END SUB

```

SUB FUNLEG2(X,L,P(20))

P(0)=0: P(1)=0: P(2)=3*ABS(1-X^2): FOR I=3 TO L

P(I)=(2*I-1)*X/(I-2)*P(I-1)-(I+1)/(I-2)*P(I-2): NEXT: END SUB

SUB CULFAZ(G,L,F(20))

C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5

FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A: NEXT

FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ: FOR I=1 TO L

F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB

Дадим теперь результаты счета по этой программе для p^3 He рассеяния при энергии 11.48 МэВ [212] с учетом синглет - триплетного смешивания и заметим, что при ϵ , равном нулю, все результаты совпадают с результатами, полученными по предыдущей программе. Здесь мы используем значение ϵ , которое определяет величину синглет - триплетного смешивания, равное 11.2^0 , как приведено в работе [212]. Смешивание S и D волн в триплетном состоянии, обусловленное тензорными силами, не учитывается, поскольку практически не приводит к каким - нибудь заметным изменениям расчетных сечений.

Экспериментальное сечение σ_e , экспериментальные ошибки $\Delta\sigma_e$ из расчета 2.5% на точку, результаты расчета по нашей программе σ_t , вычисленные χ^2_i на каждую точку и среднее χ^2 по всем точкам приведены ниже [210].

θ	σ_e	$\Delta\sigma_e$	σ_t	χ^2_i
27.64	223.10	5.58	228.04	0.78
31.97	222.00	5.55	221.73	0.00
36.71	211.90	5.30	210.38	0.08
82.53	54.27	1.36	54.22	0.00
90.00	36.76	0.92	36.97	0.05
96.03	25.70	0.64	26.15	0.49
103.80	16.78	0.42	16.74	0.01
110.55	13.21	0.33	13.03	0.29
116.57	13.21	0.33	13.39	0.31
125.27	20.26	0.51	19.97	0.32
133.48	32.21	0.81	32.07	0.03
140.79	45.95	1.15	46.48	0.21
147.21	58.82	1.47	60.70	1.64
153.90	75.46	1.89	75.66	0.01
162.14	92.72	2.32	92.03	0.09
165.67	97.70	2.44	97.73	0.00
166.59	101.10	2.53	99.05	0.66

$$\chi^2 = 0.29$$

Полученное среднее значение χ^2 несколько меньше, приведенной в работе [212] величины 0.45, поскольку мы использовали среднее значение экспериментальных ошибок 2.5%, а реально, некоторые из них доходят до 2.2%, увеличивая, тем самым, среднюю величину χ^2 . Изменение параметра смешивания ϵ в любую сторону приводит к резкому скачку χ^2 , ухудшая описание экспериментальных данных.

7. МЕТОДЫ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

В этой главе рассмотрены многопараметрические вариационные методы, которые используются для решения задачи фазового анализа при упругом рассеянии ядерных частиц с различным спином. Выполняется минимизация функционала χ^2 для поиска реальных фаз, описывающих процессы ядерного рассеяния, а именно, дифференциальные сечений при разных энергиях сталкивающихся частиц. Для расчетов дифференциальных сечений используются результаты предыдущей главы.

Множество задач теоретической ядерной физики требуют знания ядерных фаз упругого и неупругого рассеяния, которые могут быть определены из сечений рассеяния различных ядерных частиц. Задача определения ядерных фаз из упругих сечений обычно называется фазовым анализом, и в процессе ее решения возникает не мало специфических проблем.

Когда известны экспериментальные сечения рассеяния ядерных частиц и математические выражения, которые описывают эти сечения (они приведены в предыдущей главе) в зависимости от некоторых параметров δ_L , называемых ядерными фазами рассеяния, возникает многопараметрическая вариационная задача нахождения этих параметров. В разных ядерных системах, в зависимости от энергии сталкивающихся частиц, число этих параметров может колебаться от 3-5 до 20-30.

Поскольку не существует общих методов решения многопараметрической вариационной задачи для поиска глобального минимума, мы можем надеяться найти только некоторые локальные минимумы при каждой энергии и, исходя уже из физических соображений, отобрать те из них, которые могут являться решениями исходной задачи. Основным критерием такого отбора является требование плавного поведения каждой ядерной фазы, как функции энергии в резонансной области.

7.1 Система частиц с нулевым спином

Рассмотрим методы решения такой задачи для простейшей системы ядерных частиц $^4\text{He}^4\text{He}$, которые имеют нулевой спин и в фазовом анализе нужно учитывать только четные парциальные волны. В случае упругого рассеяния бесспиновых частиц, сечения выражаются через амплитуды и фазы ядерного рассеяния следующим образом (более подробно методы расчета сечений приведены в предыдущей главе) [57]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2, \quad (7.1)$$

где амплитуда рассеяния представляется в виде суммы кулоновской и ядерной амплитуд

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f_N(\theta) \quad (7.2)$$

Зная дифференциальные сечения рассеяния, которые определяются экспериментальным путем, можно найти некоторый набор фаз, способный с той или иной точностью, передать поведение этих сечений. Качество описания экспериментальных данных на основе некоторой функции (функционала нескольких переменных, а именно, фаз рассеяния) можно оценить по методу χ - квадрат [57]

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i(\text{theor}) - \sigma_i(\text{exp})}{\Delta\sigma_i(\text{exp})} \right]^2,$$

Чем меньше величина χ^2 , тем лучше описание экспериментальных данных на основе выбранного теоретического представления. Обычно результаты расчетов можно считать вполне удовлетворительными, если χ^2 порядка единицы, т.е. отклонение расчетных и экспериментальных величин примерно равно величине экспериментальных ошибок.

Для поиска ядерных фаз рассеяния по экспериментальным сечениям, нужно выполнить процедуру минимизации функционала χ^2 , как функции $2N$ переменных, каждая из которых является фазой δ_L определенной парциальной волны рассеяния, и неупругостью η_L в этой волне. Чем меньше парциальных волн присутствует при минимизации функционала, тем легче решается такая задача.

Отметим, что задача поиска минимума функционала многих переменных не имеет общего решения, поэтому ищется минимум в некоторой ограниченной области переменных. В частности, величина η_L может принимать только значения от 0 до 1, а фазы δ_L обычно ищут в области $0^0 - 180^0$, причем в нерезонансной области энергий эти величины должны меняться плавно.

Приведем теперь текст компьютерной программы для поиска фаз рассеяния по заданным экспериментальным дифференциальным сечениям [218].

REM * ПРОГРАММА ФАЗОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ AL-AL *
CLS:DEFDBL A-Z:DEFINT I,L,J,N,M,K

```

DIM SE(50), ST(50), DS(50), FR(50), FM(50), ET(50), TT(50),
XP(50), DE(50)
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *****
FAIL$="C:\BASIC\FAZ-ANAL.DAT": PI=4*ATN(1.): Z1=2: Z2=2
AM1=4: AM2=4: AM=AM1+AM2: P1=3.14159265: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1: LMI=0: LH=2: LMA=8
NYS=1: REM IF =1 THEN 4HE-4HE: EP=1.0D-03: NV=1: FH=0.1
NI=10: NP=2*LMA+LH
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ *****
REM ***** CROSS SECTIONS *****
SE(1)=900: SE(2)=800: SE(3)=580: SE(4)=320: SE(5)=250
SE(6)=170: SE(7)=120: SE(8)=75: SE(9)=47: SE(10)=30
SE(11)=18: se(12)=8: SE(13)=2.7: SE(14)=0.9: SE(15)=2.2
SE(16)=6.2: SE(17)=21: SE(18)=32: SE(19)=41: SE(20)=47
SE(21)=53: SE(22)=58: SE(23)=55: SE(24)=50: SE(25)=42
SE(26)=33: SE(27)=22: SE(28)=6: SE(29)=3.5: SE(30)=5
SE(31)=20: SE(32)=33: SE(33)=50: SE(34)=65: SE(35)=77
SE(36)=85: SE(37)=92: SE(38)=92
DE(1)=50: DE(2)=50: DE(3)=30: DE(4)=20: DE(5)=20: DE(6)=20
DE(7)=20: DE(8)=5: DE(9)=3: DE(10)=2: DE(11)=2: DE(12)=1
DE(13)=5: DE(14)=3: DE(15)=5: DE(16)=5: DE(17)=1: DE(18)=2
DE(19)=1: DE(20)=3: DE(21)=3: DE(22)=2: DE(23)=2: DE(24)=2
DE(25)=2: DE(26)=3: DE(27)=2: DE(28)=5: DE(29)=5: DE(30)=5
DE(31)=2: DE(32)=3: DE(33)=3: DE(34)=3: DE(35)=3: DE(36)=3
DE(37)=3: DE(38)=3
TT(1)=12: TT(2)=14: TT(3)=17.5: TT(4)=21: TT(5)=22.5: TT(6)=25
TT(7)=27: TT(8)=28: TT(9)=30: TT(10)=32.5: TT(11)=35
TT(12)=37: TT(13)=38: TT(14)=41: TT(15)=42.5: TT(16)=44
TT(17)=47.5: TT(18)=49: TT(19)=51: TT(20)=53: TT(21)=55
TT(22)=57: TT(23)=59: TT(24)=60: TT(25)=62: TT(26)=64
TT(27)=66: TT(28)=69: TT(29)=72: TT(30)=74: TT(31)=77
TT(32)=79: TT(33)=81: TT(34)=83: TT(35)=85: TT(36)=87
TT(37)=88: TT(38)=90
REM ***** FOR AL-AL ON E=47.1 *****
NT=38: EL=51.1
FR(0)=105: FR(2)=48: FR(4)=138: FR(6)=28: FR(8)=2: FM(0)=12.1
FM(2)=22.1: FM(4)=16.3: FM(6)=3.2
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: FM(L)=FM(L)*PI/180
FR(L)=FR(L)*PI/180: NEXT: FH=FM*PI/180
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I)=FR(I):
XP(I+LMA+LH)=FM(I)
NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****

```

```

EC=EL*PM/AM1: SK=EC*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS
REM ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL VAR(ST(),FH,LMA,NI,XP(),EP,XI,NV)
PRINT: PRINT "          XI-KV=";
PRINT USING " #####.#### ";XI;NI
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
SIGMAR=0: SIGMAS=0: FOR L=LMI TO LMA STEP LH
FR(L)=XP(L): FM(L)=XP(L+LMA+LH): A=FR(L): ETA(L)=1
IF NP=LMA GOTO 3456: ETA(L)=EXP(-2*FM(L))
3456 SIGMAR=SIGMAR+(2*L+1)*(1-(ETA(L))^2)
SIGMAS=SIGMAS+(2*L+1)*(ETA(L))^2*(SIN(A))^2: NEXT L
SIGMAR=10*4*PI*SIGMAR/SK: SIGMAS=10*4*PI*SIGMAS/SK
PRINT "          SIGMR-TOT="; PRINT USING " #####.###
";SIGMAR
PRINT "          SIGMS-TOT="; PRINT USING " #####.###
";SIGMAS
PRINT "  T   SE   ST   XI   T   SE   ST   XI"
FOR I=1 TO NT/2
PRINT USING "#####.## "; TT(I); SE(I); ST(I); DS(I), TT(I+17);
SE(I+17); ST(I+17); DS(I+17): NEXT I
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: FM(L)=FM(L)*180/PI
FR(L)=FR(L)*180/PI: PRINT USING " ###.#### ";FR(L);FM(L);:
NEXT
OPEN "O",1,G$: PRINT#1, "          ALPHA - ALPHA FOR LAB
E=";
PRINT#1, E1(NN): FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " #.###^ ^ ^ ";T;SEC(T): NEXT: END
SUB VAR(ST(50),PHN,LMA,NI,XP(50),EP,AMIN,NV)
DIM XPN(50): SHARED LH,LMI,NT,PI,DS(),NP
REM ***** ПОИСК МИНИМУМА *****
FOR I=LMI TO NP STEP LH: XPN(I)=XP(I): NEXT: NN=LMI
PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN)*180/PI: PH=PHN
CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA: IF NV=0 GOTO 3012
PRINT USING "      +#.#####^ ^ ^ ";ALA
REM -----
FOR IIN=1 TO NI: NN=-LH
PRINT USING "      +#.#####^ ^ ^ ";ALA;IIN: GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH: IN=0
2229 A=B: XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
IF XPN(NN)<0 GOTO 1159: IN=IN+1
REM -----

```

```

CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA
PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN)*180/PI;
PRINT USING "      +#.#####^ ^ ^ ";ALA; PRINT
REM -----
IF ABS((A-B)/(B))<EP GOTO 4449: IF B<A GOTO 2229
C=A: XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF IN>1 GOTO 3339: PH=-PH: GOTO 5559
3339 IF ABS((C-B)/(B))<EP GOTO 4449: PH=PH/2
5559 B=C: GOTO 2229
4449 PH=PHN: B=C: IF NN<NP GOTO 1119: AMIN=B:PH=PH/NI
NEXT IIN: FOR I=LMI TO NP STEP LH: XP(I)=XPN(I): NEXT
END SUB
SUB DET(XP(50),ST(50),XI)
  SHARED SE(),DS(),DE(),NT
  S=0: CALL SEC(XP(),ST()): FOR I=1 TO NT
  S=S+((ST(I)-SE(I))/DE(I))^2: DS(I)=((ST(I)-SE(I))/DE(I))^2
  NEXT:XI=S/NT:END SUB
SUB SEC(XP(50),S(50))
  SHARED PI,NT,TT(),GG,SS,LMI,LMA,LH,NYS,NP
  DIM S0(20),P(20),FR(50),ET(50)
  FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FR(I)=XP(I): ET(I)=1: IF NP=LMA
  GOTO 1234
  ET(I)=EXP(-2*XP(I+LMA+LH))
  1234 NEXT: RECU1=0: AIMCU1=0: CALL CULFAZ(GG,S0())
  FOR I=1 TO NT: T=TT(I)*PI/180: X=cos(T): A=2/(1-X)
  S0=2*S0(0): BB=-GG*A: ALO=GG*LOG(A)+S0
  RECU1=BB*cos(ALO): AIMCU1=BB*sin(ALO)
  IF NYS=0 GOTO 555: X1=cos(T): A1=2/(1+X1): BB1=-GG*A1
  ALO1=GG*LOG(A1)+S0: RECU1=BB1*cos(ALO1)
  AIMCU1=BB1*sin(ALO1):555 RENU1=0: AIMNU1=0
  FOR L=LMI TO LMA STEP LH: AL=ET(L)*cos(2*FR(L))-1
  BE=ET(L)*sin(2*FR(L)): LL=2*L+1: SL=2*S0(L)
  CALL POLLEG(X,L,P())
  RENU1=RENU1+LL*(BE*cos(SL)+AL*sin(SL))*P(L)
  AIMNU1=AIMNU1+LL*(BE*sin(SL)-AL*cos(SL))*P(L): NEXT
  L
  IF NYS=0 GOTO 556: AIMNU1=2*AIMNU1: RENU1=2*RENU1
  556 RE=RECU1+RECU1+RENU1
  AIM=AIMCU1+AIMCU1+AIMNU1
  S(I)=10*(RE^2+AIM^2)/4/SS^2: NEXT I: END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
  P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
  NEXT: END SUB

```

SUB CULFAZ(G,F(20))

C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5

FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5

S=S+A: NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S

F(0)=FAZ: FOR I=1 TO 20: F(I)=F(I-1)+ATN(G/(I)): NEXT: END

SUB

Приведем вариант контрольного счета по этой программе, который выполнен для ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при энергии 29.5 МэВ с данными из работы [200]. В работе приведены экспериментальные сечения при энергиях 18 - 30 МэВ и результаты фазового анализа, которые даны в первом параграфе предыдущей главы в таблице 6.1 для $E = 29.5$ МэВ [219].

Как видно из результатов, приведенных в предыдущей главе для ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеянии, наблюдается хорошее согласие вычисленных величин с данными по сечениям σ_c , приведенными в работе [200] с $\chi^2=1.086$. В этой работе для среднего χ^2 была получена величина 0.68, но методы ее расчета несколько отличаются от изложенных выше (учитывался некоторый весовой множитель), поэтому значение 0.68 нельзя напрямую сравнивать с нашими результатами. Если учесть этот весовой множитель, то для χ^2 можно получить величину 0.60, вполне совпадающую с результатами работы [200].

Далее, представляется интересным выяснить, насколько хорошо был выполнен фазовый анализ сечений при 29.5 МэВ, и можно ли получить меньший χ^2 , варьируя фазы из работы [200]. Выполняем уточнение (варьирование) фаз по нашей программе при одной итерации $N_i=1$ (без учета весовых множителей)

$\chi^2 = 0.679$				$\sigma_s = 1045.78$			
θ	σ_c	σ_t	χ^2	θ	σ_c	σ_t	χ^2
22.04	1523.00	1512.94	0.72	56.09	139.86	140.68	1.33
24.05	1164.00	1166.08	0.04	58.10	127.10	126.55	0.44
26.05	885.90	868.17	4.00	60.10	107.83	107.47	0.20
28.05	616.10	619.39	0.21	62.10	86.66	86.17	0.38
30.06	422.60	419.08	0.39	64.10	66.12	65.59	0.59
32.06	270.00	267.49	0.38	66.10	48.43	48.56	0.07
34.06	160.20	159.94	0.01	68.11	37.43	37.38	0.03
36.07	91.50	91.03	0.09	70.11	33.77	33.80	0.02
38.07	55.53	55.08	0.38	72.11	38.34	38.50	0.24
40.07	44.68	44.60	0.12	74.11	50.74	51.31	1.11
42.08	52.96	52.35	1.53	76.11	70.82	71.15	0.19
44.08	71.74	71.16	0.61	78.11	95.55	96.14	0.45

46.08	95.44	94.63	0.94	80.11	124.20	123.88	0.10
48.08	118.46	117.38	1.74	82.11	153.40	151.61	2.86
50.09	135.58	135.39	0.08	84.11	177.50	176.57	0.81
52.09	145.62	145.80	0.10	86.11	197.00	196.27	0.51
54.09	147.60	147.51	0.01	88.11	209.74	208.73	1.11
56.09	139.86	140.68	1.33	90.11	211.20	212.69	1.98

150.88 86.71 121.08 2.19 0.10 - Улучшенный вариант фаз.

Как видно, очень не большие изменения фаз позволяют заметно улучшить описание экспериментальных данных, заметно уменьшая величину χ^2 . Выполним теперь дополнительные расчеты фаз при десяти итерациях $N_i = 10$

$\chi^2 = 0.602$				$\sigma_s = 1046.77$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
22.04	1523.00	1513.27	0.67	56.09	139.86	140.70	1.38
24.05	1164.00	1166.32	0.05	58.10	127.10	126.53	0.47
26.05	885.90	868.34	3.93	60.10	107.83	107.43	0.26
28.05	616.10	619.52	0.23	62.10	86.66	86.10	0.50
30.06	422.60	419.20	0.36	64.10	66.12	65.51	0.78
32.06	270.00	267.62	0.34	66.10	48.43	48.48	0.01
34.06	160.20	160.08	0.00	68.11	37.43	37.31	0.17
36.07	91.50	91.19	0.04	70.11	33.77	33.74	0.02
38.07	55.53	55.26	0.13	72.11	38.34	38.48	0.17
40.07	44.68	44.80	0.23	74.11	50.74	51.33	1.17
42.08	52.96	52.56	0.67	76.11	70.82	71.21	0.27
44.08	71.74	71.37	0.25	78.11	95.55	96.26	0.64
46.08	95.44	94.82	0.56	80.11	124.20	124.05	0.02
48.08	118.46	117.54	1.26	82.11	153.40	151.83	2.19
50.09	135.58	135.52	0.01	84.11	177.50	176.85	0.40
52.09	145.62	145.89	0.24	86.11	197.00	196.58	0.17
54.09	147.60	147.57	0.00	88.11	209.74	209.06	0.50
56.09	139.86	140.70	1.38	90.11	211.20	213.03	2.99

150.76 86.61 121.00 2.16 0.09 - Улучшенный вариант фаз.

И в этом случае получаем небольшое улучшение описания экспериментальных данных. Рассмотрим теперь возможность включения десятой парциальной волны в наш фазовый анализ, т.е. задаем $L = 10$ и $N_i = 10$

$$\chi^2 = 0.574$$

$$\sigma_s = 1045.93$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
22.04	1523.00	1512.85	0.73	56.09	139.86	140.89	2.10
24.05	1164.00	1165.69	0.03	58.10	127.10	126.77	0.16
26.05	885.90	867.60	4.27	60.10	107.83	107.69	0.03
28.05	616.10	618.78	0.14	62.10	86.66	86.37	0.13
30.06	422.60	418.53	0.52	64.10	66.12	65.76	0.28
32.06	270.00	267.09	0.51	66.10	48.43	48.66	0.21
34.06	160.20	159.72	0.03	68.11	37.43	37.40	0.01
36.07	91.50	90.99	0.10	70.11	33.77	33.72	0.07
38.07	55.53	55.21	0.19	72.11	38.34	38.34	0.00
40.07	44.68	44.86	0.54	74.11	50.74	51.10	0.44
42.08	52.96	52.69	0.31	76.11	70.82	70.93	0.02
44.08	71.74	71.53	0.08	78.11	95.55	95.97	0.23
46.08	95.44	94.98	0.30	80.11	124.20	123.81	0.15
48.08	118.46	117.70	0.87	82.11	153.40	151.67	2.67
50.09	135.58	135.66	0.01	84.11	177.50	176.78	0.49
52.09	145.62	146.03	0.56	86.11	197.00	196.61	0.15
54.09	147.60	147.73	0.03	88.11	209.74	209.15	0.38
56.09	139.86	140.89	2.10	90.11	211.20	213.14	3.37

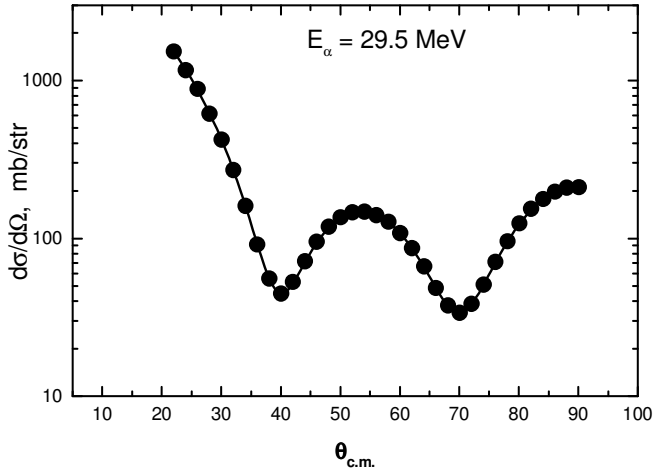
150.93 86.70 121.04 2.22 0.15 0.06 - Полученные фазы.

Вновь получаем некоторое улучшение результатов описания экспериментальных сечений, которое показано на рис.7.1, однако, почти все эти изменения значений фаз находятся в пределах ошибок их определения, указанных в работе [200] и приведенных в табл.6.2.

Рассмотрим теперь возможность учета максимального числа парциальных волн с включением их мнимой части. Будем учитывать L до 16 и наравне с действительной частью, варьировать мнимую часть фаз рассеяния. В результате получим

$$\chi^2 = 0.4053$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
2.204E+01	1.523E+03	1.518E+03	1.570E-01
2.405E+01	1.164E+03	1.172E+03	5.547E-01
2.605E+01	8.859E+02	8.738E+02	1.865E+00
2.805E+01	6.161E+02	6.244E+02	1.315E+00
3.006E+01	4.226E+02	4.228E+02	1.482E-03
3.206E+01	2.700E+02	2.698E+02	3.048E-03
3.406E+01	1.602E+02	1.610E+02	7.600E-02
3.607E+01	9.150E+01	9.125E+01	2.469E-02



Кружки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.1 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 29.5 МэВ.

3.807E+01	5.553E+01	5.506E+01	4.083E-01
4.007E+01	4.468E+01	4.476E+01	9.927E-02
4.208E+01	5.296E+01	5.285E+01	4.948E-02
4.408E+01	7.174E+01	7.192E+01	5.968E-02
4.608E+01	9.544E+01	9.542E+01	4.368E-04
4.808E+01	1.185E+02	1.180E+02	3.558E-01
5.009E+01	1.356E+02	1.356E+02	1.039E-02
5.209E+01	1.456E+02	1.458E+02	5.671E-02
5.409E+01	1.476E+02	1.473E+02	1.727E-01
5.609E+01	1.399E+02	1.405E+02	7.909E-01
5.810E+01	1.271E+02	1.265E+02	4.671E-01
6.010E+01	1.078E+02	1.077E+02	3.380E-02
6.210E+01	8.666E+01	8.654E+01	2.201E-02
6.410E+01	6.612E+01	6.600E+01	3.062E-02
6.610E+01	4.843E+01	4.886E+01	7.058E-01
6.811E+01	3.743E+01	3.747E+01	2.062E-02
7.011E+01	3.377E+01	3.369E+01	1.831E-01
7.211E+01	3.834E+01	3.828E+01	3.325E-02
7.411E+01	5.074E+01	5.110E+01	4.388E-01
7.611E+01	7.082E+01	7.106E+01	1.043E-01
7.811E+01	9.555E+01	9.625E+01	6.168E-01

8.011E+01	1.242E+02	1.242E+02	1.320E-03
8.211E+01	1.534E+02	1.520E+02	1.723E+00
8.411E+01	1.775E+02	1.770E+02	2.271E-01
8.611E+01	1.970E+02	1.967E+02	9.627E-02
8.811E+01	2.097E+02	2.091E+02	4.458E-01
9.011E+01	2.112E+02	2.130E+02	3.034E+00

Действительная часть фаз - 149.7790 85.8000 119.9222 1.8941
0.0383 0.0792 0.1541 0.1233 0.0154

Мнимая часть фаз - 0.0000 0.0000 0.0660 0.0823 0.0594
0.0018 0.0071 0.0592 0.0000

Видно, что учет высших парциальных волн несколько уменьшает величину первых четырех действительных фаз рассеяния, поскольку их влияние перераспределяется на фазы более высоких L . Хотя мнимая часть фаз мала, но оказывает вполне заметное влияние на общее поведение сечений рассеяния, улучшая величину χ^2 примерно в полтора раза по сравнению с вариантом фазового анализа для чисто действительных фаз. Дальнейшее увеличение числа парциальных волн, а рассматривались варианты с $L=20$ ($\chi^2 = 0.400$) и $L=26$ ($\chi^2 = 0.275$), не приводит уже к заметному улучшению описания экспериментальных данных и $L=14-16$ с мнимой частью фаз оказывается вполне достаточно для воспроизведения имеющихся экспериментальных результатов.

Например, для $L=26$ можно получить

$$\chi^2 = 0.27467$$

Действительная часть фаз - 149.5111	85.5608	119.6096	1.8579
0.0018	0.0882	0.2221	0.1343
0.0188	0.0853	0.0753	0.0618
0.0591	0.0106		

Мнимая часть фаз - 0.0290	0.0998	0.0718	0.1123	0.0663
0.0190	0.0440	0.1371	0.0786	0.0608
0.0516	0.0475	0.0079		
0.0347				

Эти фазы практически не отличаются от приведенных выше, но учет более высоких парциальных волн позволяет несколько улучшить величину χ^2 . Здесь, как и прежде, наблюдается тенденция уменьшение величины первых трех парциальных волн и перераспределение их влияния на состояния с более высокими L .

Теперь более подробно рассмотрим результаты фазового анализа, которые получаются из упругих сечений для ${}^4\text{He}^4\text{He}$ системы при разных энергиях. Остановимся вначале на низких энергиях, меньше 30 МэВ, при которых был выполнен фазовый анализ и сравним наши результаты с ранее полученными.

В работе [198] были выполнены измерения сечений при энергии 6.47 МэВ, которые приведены на рисунках (табличные данные по сечениям не приводятся). Фазовый анализ таких сечений приводит к следующим значениям фаз $\delta_0 = 79.5 \pm 2^0$, $\delta_2 = 80.8 \pm 2^0$ (фазы приведены в таблице). Используя описанную программу, найдем для таких фаз дифференциальные сечения, величину χ^2 по каждой точке, среднее χ^2 по всем точкам и величину полного сечения упругого рассеяния в таких процессах σ_s .

$\chi^2 = 0.262$				$\sigma_s = 2351.43$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
30.00	1400.00	1402.28	0.00	65.00	80.00	83.69	0.55
35.00	1050.00	1062.02	0.06	70.00	200.00	188.60	0.32
40.00	700.00	704.00	0.01	75.00	300.00	313.73	0.47
45.00	400.00	395.75	0.02	80.00	430.00	428.93	0.00
50.00	180.00	174.58	0.07	85.00	500.00	509.12	0.09
55.00	60.00	54.17	1.36	90.00	530.00	537.77	0.07
60.00	33.00	29.90	0.38				

79.50 80.80 - Начальные фазы.

Экспериментальные дифференциальные сечения и их ошибки определялись из рисунков работы [198], поэтому величина ошибок больше, чем было найдено в реальных измерениях сечений. Выполним теперь варьирование значений фаз, приведенных в работе [198], с 10 итерациями.

$\chi^2 = 0.175$				$\sigma_s = 2352.89$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
30.00	1400.00	1413.91	0.08	65.00	80.00	81.02	0.04
35.00	1050.00	1073.05	0.21	70.00	200.00	183.85	0.65
40.00	700.00	713.43	0.07	75.00	300.00	307.25	0.13
45.00	400.00	403.01	0.01	80.00	430.00	421.16	0.09
50.00	180.00	179.38	0.00	85.00	500.00	500.56	0.00
55.00	60.00	56.39	0.52	90.00	530.00	528.95	0.00
60.00	33.00	29.60	0.46				

80.43 80.73 - Улучшенный вариант фаз.

Видно, что удается несколько улучшить описание эксперимента при не большом изменении значений фаз, причем, уточненные фазы находятся в пределах ошибок их определения, приведенных в работе [198].

В работах [197,220] измерены упругие сечения при энергии 12.3 МэВ (данные приведены в таблице) и получены фазы $\delta_0 = 29 \pm 4^0$, $\delta_2 = 103 \pm 8^0$, $\delta_4 = 3 \pm 1.5^0$ (данные также приведены в таблице). С такими фазами по нашей программе получаются следующие результаты

$\chi^2 = 3.944$				$\sigma_s = 1060.58$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
22.00	1357.00	1254.13	6.96	48.00	57.00	57.95	0.40
24.00	1203.00	1117.86	4.53	50.00	32.50	30.14	4.61
26.00	1074.00	989.81	12.30	52.00	12.30	12.13	0.03
28.00	870.00	867.43	0.02	55.00	2.28	2.37	0.05
30.00	759.00	750.40	0.29	60.00	24.70	26.16	4.32
32.00	688.00	639.28	8.21	65.00	86.50	87.80	0.42
35.00	467.00	485.65	2.41	70.00	157.00	170.96	15.03
40.00	271.00	271.71	0.01	75.00	270.00	258.47	3.15
42.00	196.00	202.86	2.80	80.00	337.00	334.34	0.13
45.00	130.00	118.76	9.75	85.00	408.00	385.55	7.50
46.00	93.90	95.90	0.83	90.00	418.00	403.60	3.01

29.00 103.00 3.00 - Исходные фазы.

Выполним дополнительное варьирование значений фаз с 10 итерациями

$\chi^2 = 3.432$				$\sigma_s = 1039.73$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
22.00	1357.00	1279.60	3.94	48.00	57.00	58.89	1.59
24.00	1203.00	1134.61	2.92	50.00	32.50	30.77	2.48
26.00	1074.00	1000.78	9.31	52.00	12.30	12.40	0.01
28.00	870.00	874.64	0.05	55.00	2.28	2.03	0.39
30.00	759.00	755.23	0.06	60.00	24.70	24.77	0.01
32.00	688.00	642.66	7.11	65.00	86.50	85.51	0.24
35.00	467.00	487.93	3.04	70.00	157.00	168.00	9.33
40.00	271.00	273.40	0.12	75.00	270.00	255.08	5.27
42.00	196.00	204.43	4.22	80.00	337.00	330.73	0.72
45.00	130.00	120.07	7.60	85.00	408.00	381.84	10.18
46.00	93.90	97.11	2.13	90.00	418.00	399.87	4.77

28.37 105.03 2.62 - Улучшенный вариант фаз.

Полученные фазы также находятся в пределах ошибок, приведенных в работе [197].

В той же работе измерены сечения и фазы при энергии 17.8 МэВ. В результате фазового анализа было получено 7 ± 2^0 , 104 ± 4^0 , 16.2 ± 2^0 (данные по сечениям и фазам приведены в таблице). Расчет с такими фазами по нашей программе приводит нас к результатам

$\chi^2 = 1.322$				$\sigma_s = 793.78$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
42.00	186.00	187.21	0.09	60.00	61.90	59.42	0.78
46.00	131.00	125.82	2.79	65.00	74.90	70.96	4.29
48.00	110.00	104.31	3.16	70.00	98.50	96.11	1.30
50.00	91.50	87.79	1.64	75.00	130.00	130.26	0.01
52.00	79.30	75.53	1.82	80.00	163.00	165.49	0.32
55.00	65.10	63.89	0.17	85.00	188.00	192.09	0.70

7.00 104.00 16.20 - Исходные фазы.

После варьирования с 10 итерациями получаем заметное улучшение согласия расчетных сечений с экспериментом при сравнительно не большом изменении исходных фаз

$\chi^2 = 0.461$				$\sigma_s = 804.40$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
42.00	186.00	186.64	0.03	60.00	61.90	63.36	0.27
46.00	131.00	127.45	1.31	65.00	74.90	73.32	0.69
48.00	110.00	106.94	0.91	70.00	98.50	96.65	0.78
50.00	91.50	91.25	0.01	75.00	130.00	129.39	0.03
52.00	79.30	79.59	0.01	80.00	163.00	163.86	0.04
55.00	65.10	68.37	1.27	85.00	188.00	190.19	0.20

7.25 103.93 17.00 - Улучшенный вариант фаз.

В работах [197,220] была рассмотрена и энергия 22.9 МэВ, для которой получены фазы $\delta_0 = 169.3 \pm 2^0$, $\delta_2 = 94.0 \pm 2^0$, $\delta_4 = 59.2 \pm 2^0$, $\delta_6 = 1.09^0$ (данные по сечениям и фазам приведены в таблице). Наши вычисления с такими фазами приводят к следующему результату

$\chi^2 = 3.059$				$\sigma_s = 1326.12$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
26.00	1041.60	1053.45	3.65	48.60	231.80	229.42	1.57
28.00	748.20	756.29	0.81	52.00	283.10	274.93	16.70
30.60	454.20	453.44	0.02	54.80	285.70	285.30	0.04
34.00	202.30	201.18	0.19	60.00	241.80	240.44	0.51
36.00	120.20	121.76	0.96	65.00	150.20	150.76	0.16

38.00	84.70	84.68	0.00	70.20	60.30	61.14	1.95
40.00	81.10	81.07	0.00	76.20	7.20	7.47	2.62
42.00	101.00	101.50	0.25	82.00	6.30	5.79	5.88
45.00	157.00	157.08	0.00	86.00	17.20	15.37	18.05
48.60	231.80	229.42	1.57	90.00	21.10	20.10	4.77

169.30 94.00 59.20 1.09 - Исходные фазы.

При дополнительном варьировании значений фаз с 10 итерациями получим некоторое уменьшение χ^2 при очень не большом изменении значений фаз

$\chi^2 = 1.457$				$\sigma_s = 1330.77$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
26.00	1041.60	1059.08	7.95	48.60	231.80	231.07	0.15
28.00	748.20	760.11	1.75	52.00	283.10	277.12	8.93
30.60	454.20	455.41	0.06	54.80	285.70	287.64	0.94
34.00	202.30	201.63	0.07	60.00	241.80	242.26	0.06
36.00	120.20	121.76	0.95	65.00	150.20	151.53	0.90
38.00	84.70	84.51	0.05	70.20	60.30	61.01	1.39
40.00	81.10	80.98	0.02	76.20	7.20	7.28	0.20
42.00	101.00	101.69	0.47	82.00	6.30	6.35	0.06
45.00	157.00	157.91	0.42	86.00	17.20	16.47	2.85
48.60	231.80	231.07	0.15	90.00	21.10	21.41	0.46

169.30 94.49 59.55 1.00 - Улучшенный вариант фаз.

В работе [200] приведены данные для энергии 25.5 МэВ, для которой получены следующие фазы $\delta_0 = 160,36 \pm 1.01^0$, $\delta_2 = 89.37 \pm 1.54^0$, $\delta_4 = 88.64 \pm 1.77^0$, $\delta_6 = 1.61 \pm 0.39^0$, $\delta_8 = 0.36 \pm 0.19^0$ (фазы и сечения даны в таблице). Наш расчет с этими фазами приводит к следующим сечениям

$\chi^2 = 2.127$				$\sigma_s = 1442.59$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
24.04	1578.00	1556.78	2.05	54.08	281.00	277.69	7.88
26.04	1154.00	1126.52	4.77	56.08	277.70	274.84	7.74
28.05	759.00	765.24	0.37	58.08	258.10	257.62	0.20
30.05	485.60	479.86	0.55	60.09	230.90	228.74	2.02
32.05	272.80	267.25	1.01	62.09	193.00	192.29	0.21
34.06	127.00	121.98	2.10	64.09	152.80	152.38	0.10
36.06	38.70	37.60	0.40	66.09	114.20	113.13	0.76
37.06	14.80	14.86	0.00	68.09	78.00	78.21	0.04

38.06	3.48	3.27	0.29	70.09	50.41	50.49	0.01
39.06	1.42	1.40	0.01	72.09	31.76	31.78	0.00
40.06	7.85	7.81	0.01	74.09	22.91	22.74	0.81
42.07	39.30	39.85	0.20	75.09	22.03	21.75	4.92
44.07	87.70	87.86	0.01	76.10	22.88	22.95	0.16
46.07	144.50	141.84	2.60	78.10	31.45	30.93	2.08
48.07	195.00	193.28	1.34	80.10	45.51	44.44	4.83
50.08	238.20	235.82	3.70	82.10	61.76	60.77	3.44
52.08	265.70	264.61	1.16	84.10	78.54	77.11	6.23
54.08	281.00	277.69	7.88	86.10	92.16	90.82	6.03

160.36 89.37 88.64 1.61 0.39 - Исходные фазы.

Выполним теперь дополнительное варьирование фаз рассеяния с 10 итерациями и получим заметное улучшение описания имеющихся данных

$\chi^2 = 0.886$				$\sigma_s = 1442.01$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
24.04	1578.00	1555.27	2.35	54.08	281.00	279.67	1.26
26.04	1154.00	1126.00	4.96	56.08	277.70	276.56	1.24
28.05	759.00	765.12	0.36	58.08	258.10	258.96	0.63
30.05	485.60	479.75	0.57	60.09	230.90	229.67	0.65
32.05	272.80	267.00	1.11	62.09	193.00	192.83	0.01
34.06	127.00	121.56	2.46	64.09	152.80	152.58	0.03
36.06	38.70	37.14	0.80	66.09	114.20	113.09	0.81
37.06	14.80	14.44	0.12	68.09	78.00	78.06	0.00
38.06	3.48	2.94	1.86	70.09	50.41	50.32	0.01
39.06	1.42	1.21	1.53	72.09	31.76	31.69	0.02
40.06	7.85	7.79	0.01	74.09	22.91	22.81	0.27
42.07	39.30	40.28	0.64	75.09	22.03	21.91	0.85
44.07	87.70	88.80	0.48	76.10	22.88	23.21	3.60
46.07	144.50	143.27	0.56	78.10	31.45	31.39	0.03
48.07	195.00	195.10	0.00	80.10	45.51	45.08	0.77
50.08	238.20	237.87	0.07	82.10	61.76	61.57	0.12
52.08	265.70	266.72	1.02	84.10	78.54	78.03	0.80
54.08	281.00	279.67	1.26	86.10	92.16	91.83	0.38

160.49 89.00 88.60 1.41 0.18 - Улучшенный вариант фаз.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях, наши конечные результаты, в пределах приведенных ошибок, совпадают с данными, полученными ранее, в различных работах и разными авторами.

Перейдем теперь к рассмотрению области энергий 30-38 МэВ, рассмотренной в работе [221] (сечения приведены в таблицах), где выполнен фазовый анализ этих экспериментальных данных, но фазы показаны только на рисунках.

Для первой из этих энергий 30.3 МэВ в работе [221] получены следующие фазы 135 ± 5^0 , 75 ± 5^0 , 110 ± 5^0 , -2 ± 2^0 , которые мы будем рассматривать, как входные параметры для нашей программы. В результате нашего фазового анализа при $L=16$ и у чете мнимой части фаз найдено

$$\chi^2 = 0.2449$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
3.000E+01	4.420E+02	4.441E+02	1.024E-02
3.250E+01	2.660E+02	2.620E+02	6.160E-02
3.500E+01	1.410E+02	1.420E+02	1.502E-02
4.000E+01	8.900E+01	8.849E+01	5.333E-03
4.500E+01	1.170E+02	1.168E+02	8.217E-04
5.000E+01	1.320E+02	1.336E+02	3.912E-02
5.500E+01	1.380E+02	1.344E+02	1.563E-01
6.000E+01	1.060E+02	1.080E+02	1.160E-01
6.500E+01	4.860E+01	4.799E+01	4.072E-02
7.000E+01	2.490E+01	2.523E+01	2.644E-02
7.500E+01	7.900E+01	7.672E+01	2.084E-01
8.000E+01	1.320E+02	1.336E+02	1.626E-01
8.500E+01	2.180E+02	1.971E+02	2.232E+00
9.000E+01	2.340E+02	2.405E+02	3.545E-01

Действительная часть фаз -	136.8425	72.6246	121.0292	0.0000
	1.0747	3.5335	0.0881	4.2693
Мнимая часть фаз -	1.8943	4.2426	0.4210	2.7232
	4.5630	0.6693	3.5361	1.5092

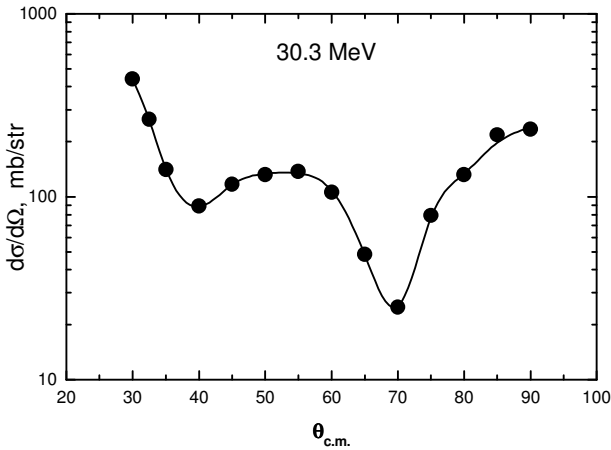
Качество описания дифференциальных сечений показано на рис.7.2, а полученные фазы мало отличаются от приведенных в работе [221].

Энергия 31.8 МэВ так же была рассмотрена в работе [221], где на рисунках приведены фазы рассеяния. Используя их в качестве начальных, выполним варьирование по нашей программе. В результате получим для $L=8$ и без учета мнимой части фаз

$$\chi^2 = 2.0$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
3.000E+01	3.600E+02	3.768E+02	7.844E-01
3.500E+01	1.640E+02	1.507E+02	2.751E+00

4.060E+01	8.700E+01	8.526E+01	1.896E-01
4.500E+01	1.060E+02	9.951E+01	1.686E+00
5.000E+01	1.100E+02	1.191E+02	3.298E+00
5.500E+01	1.000E+02	1.085E+02	2.889E+00
6.000E+01	7.800E+01	7.123E+01	5.099E+00
6.500E+01	4.300E+01	3.604E+01	5.376E+00
7.000E+01	3.120E+01	3.310E+01	1.600E+00
7.500E+01	7.600E+01	7.334E+01	7.872E-01
8.000E+01	1.360E+02	1.414E+02	5.864E-01
8.500E+01	2.120E+02	2.041E+02	6.295E-01
9.000E+01	2.350E+02	2.293E+02	3.943E-01



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.2 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 30.3 МэВ [221].

Для фаз рассеяния найдены следующие величины 143.7759, 78.4276, 125.7295, 0.0002, 0.0002, которые практически не отличаются от результатов фазового анализа, выполненного в работе [221], где на рисунках дано $148^0 \pm 5^0$, $77^0 \pm 5^0$, $125^0 \pm 5^0$.

Рассмотрим теперь возможность улучшения описания этих экспериментальных данных при увеличении числа парциальных волн и учете мнимой части фаз рассеяния. Для $L=16$ получим

$$\chi^2 = 0.1089$$

θ	σ_c	σ_t	χ^2
3.000E+01	3.600E+02	3.627E+02	2.031E-02

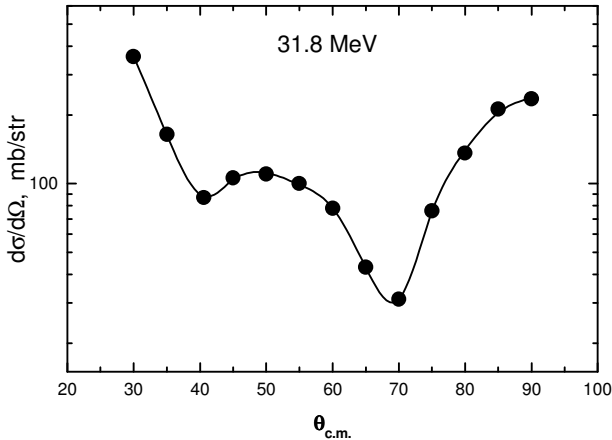
3.500E+01	1.640E+02	1.626E+02	3.190E-02
4.060E+01	8.700E+01	8.782E+01	4.190E-02
4.500E+01	1.060E+02	1.042E+02	1.302E-01
5.000E+01	1.100E+02	1.116E+02	1.030E-01
5.500E+01	1.000E+02	9.910E+01	3.258E-02
6.000E+01	7.800E+01	7.810E+01	1.163E-03
6.500E+01	4.300E+01	4.286E+01	2.076E-03
7.000E+01	3.120E+01	3.124E+01	7.440E-04
7.500E+01	7.600E+01	7.547E+01	3.111E-02
8.000E+01	1.360E+02	1.397E+02	2.834E-01
8.500E+01	2.120E+02	2.041E+02	6.193E-01
9.000E+01	2.350E+02	2.381E+02	1.189E-01

Действительная часть фаз - 149.8762 70.1656 126.6079 0.0000

1.4289 4.3003 0.0000 2.3328 0.1076

Мнимая часть фаз - 0.0001 2.0772 4.5555 1.6315 0.4573

5.5964 1.9072 2.7722 0.4582



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.3 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 31.8 МэВ [221].

Качество описания дифференциальных сечений с таким фазами показано на рисунке 7.3.

Далее в работе [221] была рассмотрена энергия 34.2 МэВ, где на рисунках приведены фазы рассеяния 145 ± 5^0 , 65 ± 5^0 , 145 ± 10^0 , 5 ± 2^0 . С этими фазами по нашей программе и шестью парциальными

ми волнами можно получить $\chi^2=6.4$. Выполняя далее варьирование с 10 итерациями и включая восьмую парциальную волну, получим заметное улучшение описания экспериментальных данных

$\chi^2 = 0.970$				$\sigma_s = 602.99$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
30.00	263.00	252.95	0.60	60.00	29.70	29.03	0.18
32.50	184.00	182.60	0.01	62.50	14.60	15.01	0.26
35.00	125.00	135.94	1.48	65.00	8.70	8.49	0.09
40.00	112.00	96.75	3.64	67.50	11.80	12.23	0.29
42.50	100.00	93.63	0.83	70.00	29.00	27.63	0.83
45.00	88.00	94.26	2.45	72.50	49.10	54.43	2.32
47.50	94.00	94.03	0.00	75.00	101.00	90.67	4.26
50.00	89.00	89.74	0.03	80.00	175.00	176.96	0.06
55.00	67.40	64.99	0.53	85.00	247.00	250.85	0.30
60.00	29.70	29.03	0.18	90.00	286.00	279.81	0.27

145.35 69.41 143.86 4.41 0.76 - Улучшенные фазы рассеяния.

Учтем теперь, как и для предыдущих энергий, 16 парциальных волн и мнимую часть фаз, тогда получим

$\chi^2 = 0.9049$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2
3.000E+01	2.630E+02	2.562E+02	2.762E-01
3.250E+01	1.840E+02	1.842E+02	1.965E-04
3.500E+01	1.250E+02	1.365E+02	1.640E+00
4.000E+01	1.120E+02	9.810E+01	3.021E+00
4.250E+01	1.000E+02	9.443E+01	6.323E-01
4.500E+01	8.800E+01	9.375E+01	2.063E+00
4.750E+01	9.400E+01	9.235E+01	5.583E-02
5.000E+01	8.900E+01	8.786E+01	8.168E-02
5.500E+01	6.740E+01	6.542E+01	3.617E-01
6.000E+01	2.970E+01	2.996E+01	2.592E-02
6.250E+01	1.460E+01	1.507E+01	3.394E-01
6.500E+01	8.700E+00	8.058E+00	8.418E-01
6.750E+01	1.180E+01	1.217E+01	2.176E-01
7.000E+01	2.900E+01	2.842E+01	1.477E-01
7.250E+01	4.910E+01	5.574E+01	3.604E+00
7.500E+01	1.010E+02	9.167E+01	3.484E+00
8.000E+01	1.750E+02	1.758E+02	1.109E-02
8.500E+01	2.470E+02	2.502E+02	2.047E-01
9.000E+01	2.860E+02	2.808E+02	1.853E-01

Действительная часть фаз - 142.4348 64.9232 142.1401 2.3609
 0.0549 0.0577 0.7871 0.7618 0.4919
 Мнимая часть фаз - 1.1109 0.1086 0.1434 0.0726 0.8405
 0.0000 0.0000 0.1712 0.6064

Можно еще несколько улучшить качество описания экспериментальных данных, если принять $L=20$

$\chi^2 = 0.5645$

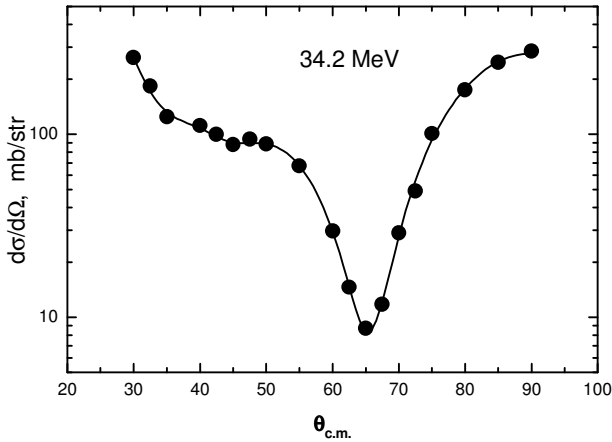
θ	σ_e	σ_t	χ^2
3.000E+01	2.630E+02	2.651E+02	2.492E-02
3.250E+01	1.840E+02	1.712E+02	9.769E-01
3.500E+01	1.250E+02	1.329E+02	7.775E-01
4.000E+01	1.120E+02	1.081E+02	2.382E-01
4.250E+01	1.000E+02	9.738E+01	1.404E-01
4.500E+01	8.800E+01	9.058E+01	4.173E-01
4.750E+01	9.400E+01	8.950E+01	4.137E-01
5.000E+01	8.900E+01	8.893E+01	3.022E-04
5.500E+01	6.740E+01	6.748E+01	5.491E-04
6.000E+01	2.970E+01	2.931E+01	6.032E-02
6.250E+01	1.460E+01	1.492E+01	1.623E-01
6.500E+01	8.700E+00	8.335E+00	2.721E-01
6.750E+01	1.180E+01	1.212E+01	1.638E-01
7.000E+01	2.900E+01	2.792E+01	5.220E-01
7.250E+01	4.910E+01	5.565E+01	3.497E+00
7.500E+01	1.010E+02	9.296E+01	2.586E+00
8.000E+01	1.750E+02	1.780E+02	1.427E-01
8.500E+01	2.470E+02	2.494E+02	1.200E-01
9.000E+01	2.860E+02	2.805E+02	2.091E-01

Действительная часть фаз - 142.6946 63.8742 134.1698 1.1397
 0.0000 1.0921 2.0543 0.6701 1.5754 1.0617 0.6621
 Мнимая часть фаз - 0.0000 0.0000 2.2654 0.0000 0.0000
 0.0000 1.6313 1.1373 2.1817 1.3685 0.6630

Качество описания экспериментальных дифференциальных сечений показано на рисунке 7.4.

Далее, в работе [221] рассмотрена энергия 35.1 МэВ, для которой на рисунке приведены фазы рассеяния 147 ± 5^0 , 80 ± 5^0 , 150 ± 5^0 , 7 ± 2^0 . Используя их в качестве начальных, выполним варьирование с 10 итерациями, $L=16$ и учетом мнимой части. В результате получится очень хорошее описание экспериментальных данных

$$\chi^2 = 0.01495$$



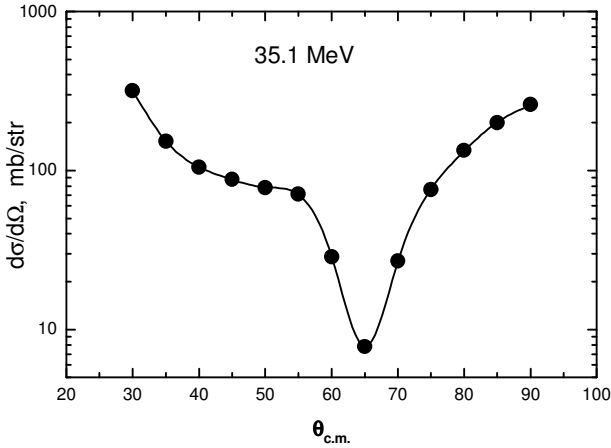
Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.4 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 34.2 МэВ [221].

θ	σ_c	σ_t	χ^2
3.000E+01	3.180E+02	3.189E+02	3.453E-03
3.500E+01	1.530E+02	1.525E+02	5.475E-03
4.000E+01	1.050E+02	1.054E+02	8.040E-03
4.500E+01	8.800E+01	8.766E+01	7.292E-03
5.000E+01	7.800E+01	7.845E+01	8.134E-03
5.500E+01	7.100E+01	7.081E+01	2.322E-03
6.000E+01	2.870E+01	2.873E+01	3.956E-04
6.500E+01	7.800E+00	7.801E+00	1.406E-06
7.000E+01	2.690E+01	2.689E+01	9.947E-05
7.500E+01	7.610E+01	7.635E+01	4.632E-03
8.000E+01	1.340E+02	1.325E+02	4.341E-02
8.500E+01	2.000E+02	2.018E+02	6.279E-02
9.000E+01	2.610E+02	2.581E+02	4.828E-02

Действительная часть фаз - 155.1029 70.2311 137.7721 0.0000
 1.0646 3.1268 1.9988 0.4711 1.7829
 Мнимая часть фаз - 3.3855 0.4609 4.6500 0.8327 1.1338
 1.5133 5.1306 0.0000 3.3445

Результаты описания дифференциальных сечений представлены на рис.7.5.



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.5 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 35.1 МэВ [221].

Следующая энергия рассмотренная в работе [221] - это 37.0 МэВ, для которой на рисунках приведены фазы 137 ± 5^0 , 72 ± 5^0 , 145 ± 5^0 , -2 ± 2^0 . Выполняя варьирование фаз с этими начальными условиями при $L=20$ получим

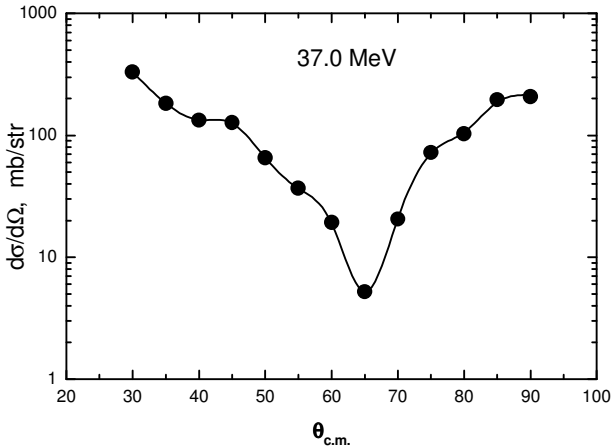
$$\chi^2 = 0.1990$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
3.000E+01	3.310E+02	3.299E+02	4.584E-03
3.500E+01	1.830E+02	1.830E+02	3.691E-05
4.000E+01	1.330E+02	1.336E+02	6.507E-03
4.500E+01	1.270E+02	1.258E+02	2.230E-02
5.000E+01	6.540E+01	6.553E+01	9.390E-04
5.500E+01	3.670E+01	3.687E+01	4.789E-03
6.000E+01	1.920E+01	1.891E+01	2.870E-02
6.500E+01	5.200E+00	5.207E+00	1.334E-03
7.000E+01	2.050E+01	2.090E+01	5.481E-02
7.500E+01	7.210E+01	7.138E+01	5.771E-02
8.000E+01	1.030E+02	1.059E+02	3.432E-01
8.500E+01	1.960E+02	1.862E+02	1.514E+00
9.000E+01	2.080E+02	2.147E+02	5.485E-01

Действительная часть фаз - 114.1774 55.9445 140.2266 7.0498

0.0000	9.8996	3.2214	7.1907	2.5893	1.7230	3.1121
Мнимая часть фаз -						
5.3564	1.5250	8.9494	6.5947	0.0000		
8.4460	7.8207	9.7521	1.9544	0.0000	1.3431	

Качество описания экспериментальных данных показано на рис.7.6. Отметим, что при $L=16$ удается получить величину χ^2 около 1 и только учет высших парциальных волн позволяет практически идеально описать приведенные дифференциальные сечения, как это было для предыдущих энергий.



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.6- Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 37.0 МэВ [221].

В этой же работы [221] была рассмотрена и энергия 38.4 МэВ, где на рисунках приведены следующие фазы рассеяния 135 ± 5^0 , 75 ± 5^0 , 170 ± 10^0 , 5 ± 2^0 . С такими значениями фаз по нашей программе получается $\chi^2 = 19.518$. Варьируем теперь эти значения фаз с 10 итерациями, получим существенное улучшение описания эксперимента при восьми парциальных волнах

$\chi^2 = 1.425$				$\sigma_s = 384.87$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
30.00	314.00	323.52	0.46	64.00	0.50	0.50	0.00
35.00	212.00	225.92	1.60	65.00	0.86	0.94	0.26
40.60	140.00	138.61	0.08	66.00	2.70	1.95	2.24
45.00	97.00	87.22	3.83	67.50	4.20	4.56	0.52

50.00	49.00	45.71	2.70	70.00	11.60	11.87	0.46
55.00	19.30	18.89	0.05	75.00	36.40	36.67	0.03
60.00	3.45	3.96	5.87	80.00	69.10	69.08	0.00
62.00	1.52	1.22	1.70	85.00	100.00	96.97	0.57
62.50	1.45	0.84	5.03	90.00	110.00	108.01	0.25

137.01 89.16 175.00 5.96 0.0002 - Полученные фазы.

Выполним теперь варьирование фаз с учетом мнимой части и L=16

$$\chi^2 = 0.5768$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
3.000E+01	3.140E+02	3.103E+02	6.828E-02
3.500E+01	2.120E+02	2.145E+02	5.334E-02
4.060E+01	1.400E+02	1.391E+02	2.913E-02
4.500E+01	9.700E+01	9.606E+01	3.510E-02
5.000E+01	4.900E+01	4.961E+01	9.314E-02
5.500E+01	1.930E+01	1.711E+01	1.486E+00
6.000E+01	3.450E+00	3.655E+00	9.576E-01
6.200E+01	1.520E+00	1.338E+00	6.233E-01
6.250E+01	1.450E+00	9.912E-01	2.887E+00
6.400E+01	5.000E-01	5.982E-01	6.702E-01
6.500E+01	8.600E-01	9.505E-01	3.198E-01
6.600E+01	2.700E+00	1.857E+00	2.843E+00
6.750E+01	4.200E+00	4.334E+00	7.219E-02
7.000E+01	1.160E+01	1.153E+01	3.329E-02
7.500E+01	3.640E+01	3.644E+01	5.043E-04
8.000E+01	6.910E+01	7.007E+01	1.512E-01
8.500E+01	1.000E+02	9.906E+01	5.517E-02
9.000E+01	1.100E+02	1.103E+02	4.187E-03

Действительная часть фаз - 135.0456 82.0880 169.1763 4.0532
1.5103 1.5318 0.9571 0.4465 0.1501

Мнимая часть фаз - 0.0000 2.9087 0.0637 0.1203 0.6567
2.1785 0.5149 1.1855 1.0905

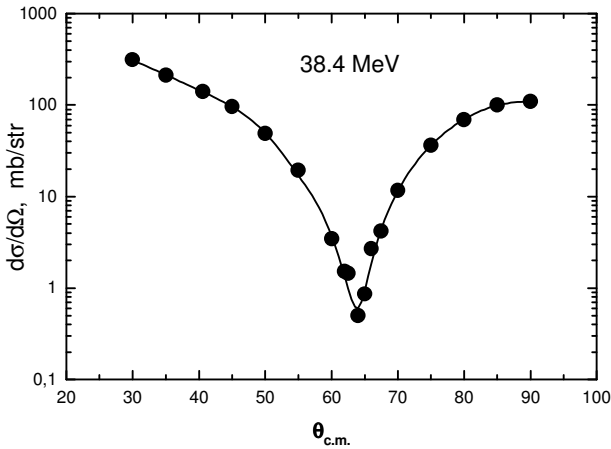
Увеличение числа парциальных волн до 20 приводят к уменьшению χ^2 до 0.47, что уже существенно не влияет на качество описания экспериментальных данных, которое показано на рисунке 7.7.

В работе [222], в таблице приведены дифференциальные сечения при энергии 38.5 МэВ, но фазовый анализ этих данных не выполнялся. Используем в качестве начальных, фазы, полученные в предыдущем случае и при L=16 находим $\chi^2 = 0.55$ со следующими

фазами

Действительная часть фаз - 130.9165 79.8475 166.1612 2.8989
 1.5999 1.5393 0.5942 0.1918 0.1599
 Мнимая часть фаз - 0.0000 1.6270 1.5261 1.2301 0.0000
 2.3412 0.2508 1.6414 0.8989

При $L=24$ получаем $\chi^2 = 0.50$ и только при 26 парциальных волнах χ^2 начинает резко уменьшаться и оказывается равен 0.265, а для $L=30$ χ^2 достигает своего предела, равного 0.207.



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.7 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 38.4 МэВ [221].

$\chi^2 = 0.2067$

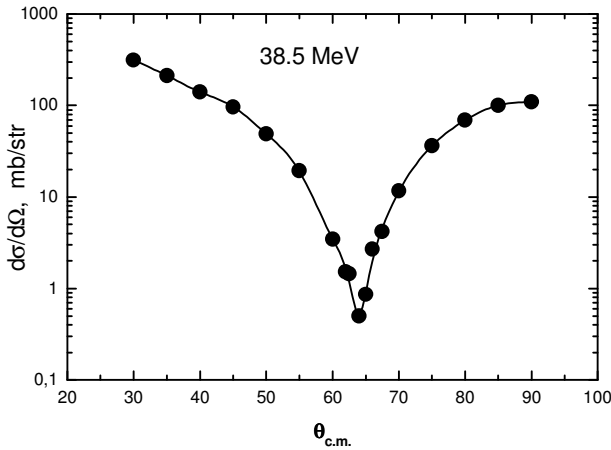
θ	σ_e	σ_t	χ^2
3.000E+01	3.140E+02	3.143E+02	3.215E-04
3.500E+01	2.120E+02	2.118E+02	4.271E-04
4.000E+01	1.400E+02	1.401E+02	1.825E-04
4.500E+01	9.700E+01	9.689E+01	5.244E-04
5.000E+01	4.900E+01	4.903E+01	1.909E-04
5.500E+01	1.930E+01	1.926E+01	3.928E-04
6.000E+01	3.450E+00	3.447E+00	2.058E-04
6.200E+01	1.520E+00	1.661E+00	3.771E-01
6.250E+01	1.450E+00	1.203E+00	8.374E-01

6.400E+01	5.000E-01	5.087E-01	5.220E-03
6.500E+01	8.600E-01	9.148E-01	1.175E-01
6.600E+01	2.700E+00	1.990E+00	2.015E+00
6.750E+01	4.200E+00	4.500E+00	3.594E-01
7.000E+01	1.160E+01	1.157E+01	5.831E-03
7.500E+01	3.640E+01	3.647E+01	1.788E-03
8.000E+01	6.910E+01	6.910E+01	3.205E-06
8.500E+01	1.000E+02	1.000E+02	1.017E-04
9.000E+01	1.100E+02	1.100E+02	7.037E-05

Действительная часть фаз - 129.9036 77.1998 165.6615 1.5187
 0.5671 2.1129 0.0601 0.0000 0.6059 0.4907 0.0005 0.0896
 0.3055 0.4272 0.1328 0.0000

Мнимая часть фаз - 3.8528 2.4699 1.1513 0.9460 1.4118
 0.0000 1.7083 2.0442 0.0000 0.2196 0.8160 2.4573 0.0000
 0.9449 0.4563 0.0000

На рис.7.8 приведены результаты расчетов дифференциальных сечений с полученными фазами.



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

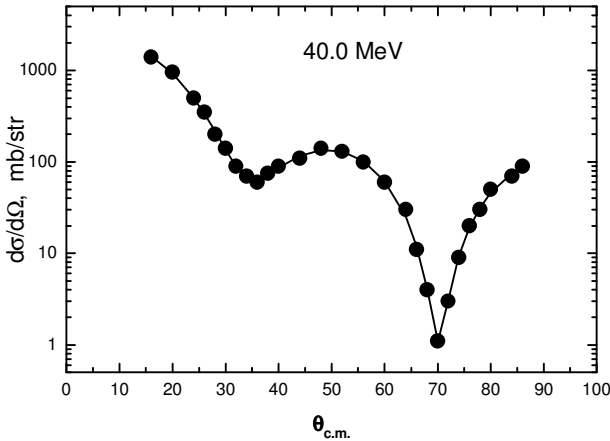
Рисунок 7.8 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 38.5 МэВ.

В работе [223] на рисунках приведены данные для энергий 39, 40 и 41 МэВ, используем одну из них, а именно 40 МэВ, для фазового анализа. Принимая в качестве начальных фаз результаты предыдущего анализа, для $L=12$ получим

$$\chi^2 = 0.2234$$

Действительная часть фаз -	69.4967	49.5392	81.4271	1.3593
	0.0000	0.9287	0.0255	
Мнимая часть фаз -	0.8975	0.0000	4.5934	7.1150
	0.0000	0.1762		1.2930

Качество описания дифференциальных сечений показано на рис.7.9. Дальнейшее увеличение числа парциальных волн не приводит к заметному уменьшению χ^2 . Отметим, что полученные в результате фазового анализа фазы рассеяния, заметно отличаются от найденных для энергий 38.4, 38.5 МэВ и далее рассмотренной энергии 40.77 МэВ.



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.9 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 40.0 МэВ.

Перейдем теперь к рассмотрению энергий в области 36-47 МэВ. Экспериментальные исследования дифференциальных сечений выполнены в работе [224], а фазовый анализ этих данных вообще не проводился. Эта область энергий и 23-38 МэВ рассматривалась в работе [225], где выполнена подгонка параметров оптических потенциалов, а затем, из них вычислялись фазы упругого рассеяния.

Для энергии 36.85 МэВ в [225] найдены фазы 135^0 , $78,7^0$, 139^0 , $2,0^0$, $0,07^0$, которые мы будем использовать в качестве начальных при варьировании фаз рассеяния по нашей программе. При $L=16$

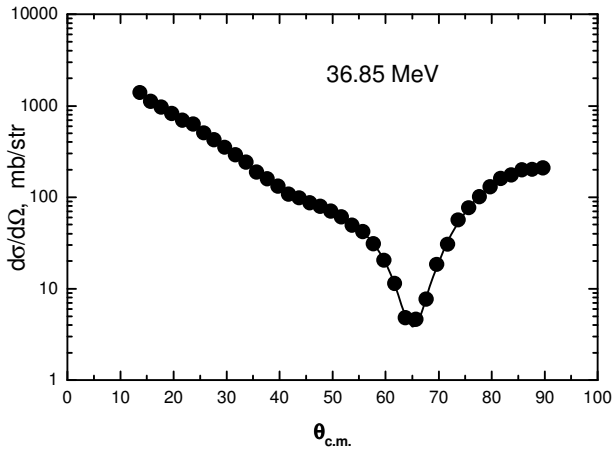
можно получить $\chi^2 = 2.135$, при $L=20$ находим $\chi^2 = 1.40$, и только при $L=30$ удастся уменьшить χ^2

$\chi^2 = 1.2846$

θ	σ_c	σ_t	χ^2
1.370E+01	1.391E+03	1.389E+03	4.654E-02
1.570E+01	1.116E+03	1.130E+03	1.286E+00
1.770E+01	9.710E+02	9.588E+02	1.840E+00
1.970E+01	8.180E+02	8.252E+02	3.601E-01
2.170E+01	6.910E+02	7.101E+02	3.640E+00
2.370E+01	6.260E+02	6.059E+02	6.293E+00
2.570E+01	5.050E+02	5.104E+02	8.240E-01
2.770E+01	4.250E+02	4.249E+02	1.733E-04
2.970E+01	3.510E+02	3.515E+02	1.146E-02
3.170E+01	2.900E+02	2.901E+02	2.303E-04
3.370E+01	2.410E+02	2.381E+02	9.179E-01
3.570E+01	1.890E+02	1.940E+02	2.749E+00
3.770E+01	1.590E+02	1.577E+02	1.796E-01
3.970E+01	1.320E+02	1.300E+02	1.029E+00
4.170E+01	1.080E+02	1.103E+02	1.309E+00
4.370E+01	9.770E+01	9.709E+01	1.880E-01
4.570E+01	8.690E+01	8.785E+01	2.774E-01
4.770E+01	7.980E+01	7.960E+01	2.913E-02
4.970E+01	7.040E+01	7.040E+01	1.251E-06
5.170E+01	6.100E+01	6.040E+01	3.589E-01
5.370E+01	4.910E+01	5.065E+01	1.997E+00
5.570E+01	4.170E+01	4.117E+01	5.635E-01
5.770E+01	3.080E+01	3.111E+01	1.481E-01
5.970E+01	2.040E+01	2.052E+01	3.888E-02
6.170E+01	1.140E+01	1.110E+01	5.624E-01
6.370E+01	4.800E+00	5.111E+00	1.151E+00
6.570E+01	4.630E+00	3.981E+00	2.503E+00
6.770E+01	7.720E+00	8.080E+00	5.196E-01
6.970E+01	1.830E+01	1.758E+01	1.045E+00
7.170E+01	3.040E+01	3.275E+01	6.815E+00
7.370E+01	5.640E+01	5.301E+01	7.966E+00
7.570E+01	7.630E+01	7.680E+01	1.123E-01
7.770E+01	1.010E+02	1.027E+02	7.378E-01
7.970E+01	1.290E+02	1.298E+02	1.780E-01
8.170E+01	1.600E+02	1.564E+02	1.436E+00
8.370E+01	1.750E+02	1.793E+02	1.160E+00
8.570E+01	1.990E+02	1.959E+02	1.094E+00
8.770E+01	2.020E+02	2.054E+02	7.337E-01
8.970E+01	2.090E+02	2.089E+02	9.085E-04

Действительная часть фаз - 126.3556 62.3458 132.7907 2.5076
 0.5551 7.0659 9.1342 6.3779 2.3275 1.5439 0.9287 0.0000
 0.4619 0.2778 0.1248 0.0000
 Мнимая часть фаз - 0.0000 0.0000 2.2830 18.8637 0.0000
 0.8903 1.8405 2.9630 2.5709 2.3248 0.8069 0.0000 0.2250
 0.0232 0.1390 0.0912

Качество описания экспериментальных данных показано на рис.7.10. Дальнейшее варьирование параметров или фаз рассеяния, или увеличение размерности базиса, т.е. при $L > 30$, не приводит к существенному улучшению величины χ^2 . Полученные при этой энергии фазы заметно отличаются от наших результатов для 37.0 МэВ.



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.10 – Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 36.85МэВ [224].

В той же работе рассмотрена энергия 38.83 МэВ, для которой в [225] получены фазы 133.4, 78.8, 154, 6.0, 0,35. Будем использовать их в качестве начальных и выполняя варьирование с $L=20$

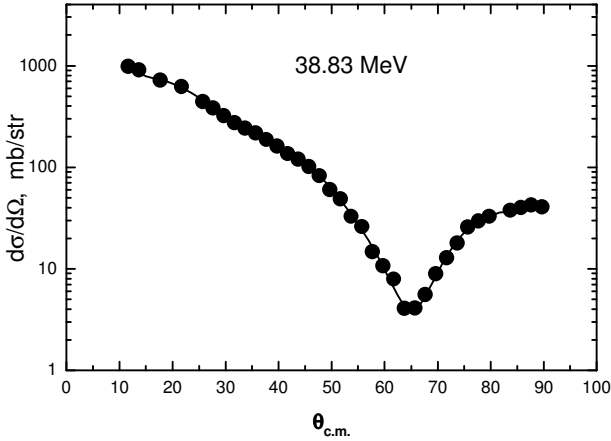
$$\chi^2 = 1.900$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
1.170E+01	9.790E+02	1.030E+03	1.484E+00
1.370E+01	9.100E+02	8.563E+02	3.683E+00
1.770E+01	7.170E+02	7.243E+02	8.369E-01

2.170E+01 6.200E+02 6.107E+02 1.774E+00
 2.570E+01 4.440E+02 4.521E+02 2.626E+00
 2.770E+01 3.830E+02 3.795E+02 7.632E-01
 2.970E+01 3.240E+02 3.213E+02 4.675E-01
 3.170E+01 2.750E+02 2.772E+02 5.583E-01
 3.370E+01 2.420E+02 2.432E+02 1.642E-01
 3.570E+01 2.170E+02 2.142E+02 8.830E-01
 3.770E+01 1.870E+02 1.870E+02 5.312E-04
 3.970E+01 1.620E+02 1.615E+02 5.736E-02
 4.170E+01 1.360E+02 1.387E+02 1.841E+00
 4.370E+01 1.200E+02 1.188E+02 3.451E-01
 4.570E+01 1.020E+02 1.004E+02 6.173E-01
 4.770E+01 8.270E+01 8.204E+01 4.379E-01
 4.970E+01 6.020E+01 6.386E+01 7.929E+00
 5.170E+01 4.880E+01 4.752E+01 2.550E+00
 5.370E+01 3.280E+01 3.431E+01 3.553E+00
 5.570E+01 2.610E+01 2.417E+01 1.033E+01
 5.770E+01 1.470E+01 1.638E+01 1.130E+01
 5.970E+01 1.070E+01 1.051E+01 4.221E-01
 6.170E+01 7.900E+00 6.516E+00 5.696E+00
 6.370E+01 4.090E+00 4.380E+00 1.349E+00
 6.570E+01 4.100E+00 3.989E+00 3.930E-02
 6.770E+01 5.540E+00 5.355E+00 2.379E-01
 6.970E+01 8.950E+00 8.529E+00 5.467E-01
 7.170E+01 1.280E+01 1.327E+01 8.982E-01
 7.370E+01 1.800E+01 1.897E+01 1.459E+00
 7.570E+01 2.580E+01 2.477E+01 2.928E+00
 7.770E+01 2.970E+01 2.984E+01 2.079E-02
 7.970E+01 3.280E+01 3.354E+01 8.610E-01
 8.370E+01 3.760E+01 3.746E+01 1.047E-02
 8.570E+01 4.000E+01 3.919E+01 2.560E-01
 8.770E+01 4.250E+01 4.100E+01 7.793E-01
 8.970E+01 4.080E+01 4.197E+01 7.024E-01

Действительные фазы - 121.9545 100.4211 163.5241 3.8082
 6.4402 4.7599 2.5298 1.3435 1.1103 0.7199 0.0000
 Мнимые фазы - 6.7218 6.5487 0.4986 0.4164 0.0906 0.0000
 2.5561 0.6655 0.4853 0.4851 0.9691

Качество описания экспериментальных данных приведено на рис.7.11. При увеличении L до 24 удается получить χ^2 на уровне 1.87, при L=30 для величины χ^2 найдено 1.80, а для L=34 получено $\chi^2 = 1.73$, но такое уменьшение χ^2 практически не сказывается на поведении фаз рассеяния .



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.11 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 38.83 МэВ [224].

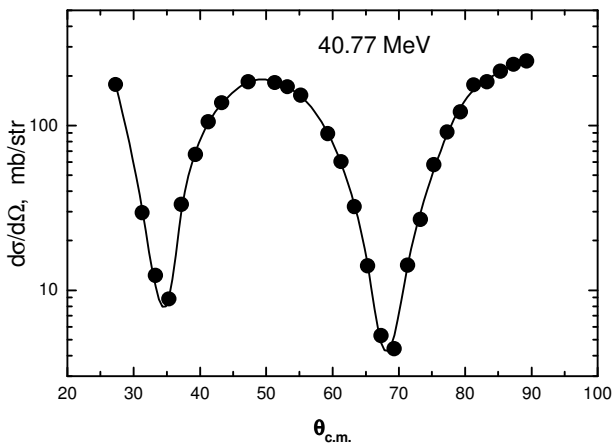
Следующая энергия, рассмотренная в работе [224], это 40.77 МэВ, для которой в [225] получены фазы 74.4, 21.8, 86.0, 5.4, 0.38. Их мы будем использовать в качестве начальных и выполним варьирование при $L=16$, тогда получаем $\chi^2 = 3.51$. Изменение L до 22 практически не меняет величину χ^2 . Только при 24 парциальных волнах начинается уменьшение χ^2 , которое оказывается равно 2.1. Приведем здесь результаты для 30 парциальных волн

$$\chi^2 = 1.5560$$

θ	σ_c	σ_r	χ^2
2.730E+01	1.770E+02	1.768E+02	8.316E-03
3.130E+01	2.950E+01	3.023E+01	4.405E-01
3.330E+01	1.230E+01	1.106E+01	1.888E+00
3.530E+01	8.820E+00	8.899E+00	1.553E-01
3.720E+01	3.320E+01	3.070E+01	4.353E+00
3.930E+01	6.660E+01	6.863E+01	2.110E+00
4.130E+01	1.050E+02	1.034E+02	6.080E-01
4.330E+01	1.370E+02	1.372E+02	3.028E-03
4.730E+01	1.840E+02	1.848E+02	3.848E-02
5.130E+01	1.820E+02	1.813E+02	2.806E-02
5.320E+01	1.720E+02	1.715E+02	2.442E-02

5.520E+01	1.530E+02	1.535E+02	1.158E-02
5.930E+01	8.940E+01	8.992E+01	2.248E-01
6.130E+01	6.030E+01	5.807E+01	1.721E+00
6.330E+01	3.220E+01	3.262E+01	7.671E-02
6.530E+01	1.400E+01	1.445E+01	4.116E-01
6.730E+01	5.310E+00	4.742E+00	9.600E-01
6.930E+01	4.390E+00	5.036E+00	1.380E+00
7.130E+01	1.420E+01	1.409E+01	2.869E-01
7.330E+01	2.690E+01	2.961E+01	6.083E+00
7.530E+01	5.760E+01	5.340E+01	3.338E+00
7.730E+01	9.120E+01	8.812E+01	1.304E+00
7.930E+01	1.210E+02	1.285E+02	6.218E+00
8.130E+01	1.760E+02	1.638E+02	9.266E+00
8.330E+01	1.840E+02	1.903E+02	2.507E+00
8.530E+01	2.130E+02	2.129E+02	1.302E-03
8.730E+01	2.350E+02	2.337E+02	1.119E-01
8.930E+01	2.460E+02	2.464E+02	1.169E-02

Действительные фазы - 127.3870 40.8110 87.6083 2.2358
 0.0173 1.3451 1.4785 0.0000 4.2453 2.6973 4.3213 0.2210
 0.0000 0.1755 0.5197 0.4039
 Мнимые фазы - 18.8252 0.9065 0.3905 1.9687 0.0345 1.4207
 2.1880 0.4515 0.0000 0.3531 0.3290 2.1834 1.1953 0.3142
 0.0000 0.0000



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.12 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 40.77 МэВ [224].

Качество описания экспериментальных данных показано на рис.7.12, а найденные фазы заметно отличаются от результатов для энергии 40.0 МэВ. Увеличение L до 34 приводит нас к $\chi^2 = 1.34$, а при L= 40 к $\chi^2 = 1.21085$ мало изменяя фазы рассеяния, которые приведены ниже

Действительные фазы - 124.9455 37.3915 86.8874 1.8977
 0.0000 1.1045 1.9122 0.0897 4.1335 2.7145 4.0382 0.3077
 0.0000 0.1285 0.7936 1.1646 0.4322 0.0000 0.1584 0.0000
 0.1347
 Мнимые фазы - 18.7685 4.3167 0.0011 1.5199 0.0001 1.4317
 1.9380 0.9304 0.0000 0.3225 0.4839 2.2038 1.0627 0.6151
 0.0822 0.0000 0.5439 0.4801 0.1615 0.1930 0.0000

Далее, в работе [224] была рассмотрена энергия 41.9 МэВ. В качестве начальных принимаем фазы для предыдущей энергии и по нашей программе с 10 итерациями для L=8-10 получаем χ^2 порядка 10. Увеличение L до 14 приводит к несколько лучшему результату $\chi^2 = 5.66$ с фазами

Действительные фазы - 105.8413 53.7189 107.0094 13.1469
 2.1598 0.1235 1.1350 1.3931
 Мнимые фазы - 22.0202 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
 0.0821 0.3104

Выясним, насколько надо увеличить размерность L, чтобы получить величину χ^2 порядка единицы. Как показывают расчеты, нужно принять L=26, тогда мы можем получить $\chi^2 = 4.91$ с фазами

Действительные фазы - 107.8003 53.5006 105.7207 13.9290
 1.6358 0.0000 1.8523 1.6216 0.0000 0.2889 0.2598 0.2007
 0.0224 0.0000
 Мнимые фазы - 24.6993 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
 0.0000 0.2984 0.3034 0.0000 0.0123 0.0000 0.0114 0.1151
 0.1607

При L=30 находим

$$\chi^2 = 4.0970$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
----------	------------	------------	----------

1.220E+01 2.197E+03 1.930E+03 3.842E+01
 1.400E+01 1.824E+03 1.712E+03 1.028E+01

1.600E+01	1.466E+03	1.451E+03	4.213E-01
1.780E+01	1.132E+03	1.208E+03	2.000E+01
1.980E+01	9.540E+02	9.469E+02	1.569E-01
2.160E+01	7.861E+02	7.349E+02	1.952E+01
2.340E+01	5.694E+02	5.520E+02	9.636E+00
2.520E+01	3.923E+02	3.988E+02	3.488E+00
2.700E+01	2.683E+02	2.728E+02	2.426E+00
2.880E+01	1.738E+02	1.718E+02	1.391E+00
3.060E+01	9.440E+01	9.527E+01	6.320E-01
3.240E+01	4.500E+01	4.369E+01	4.802E+00
3.420E+01	1.620E+01	1.671E+01	2.695E+00
3.620E+01	1.289E+01	1.256E+01	1.198E+00
3.800E+01	2.679E+01	2.667E+01	1.346E-01
3.980E+01	5.090E+01	5.116E+01	1.375E-01
4.180E+01	8.300E+01	8.343E+01	2.846E-01
4.360E+01	1.147E+02	1.125E+02	3.330E+00
4.580E+01	1.430E+02	1.445E+02	1.004E+00
4.780E+01	1.676E+02	1.675E+02	1.216E-03
5.000E+01	1.844E+02	1.824E+02	1.284E+00
5.200E+01	1.847E+02	1.831E+02	7.668E-01
5.420E+01	1.712E+02	1.697E+02	8.656E-01
5.620E+01	1.450E+02	1.479E+02	3.346E+00
5.840E+01	1.203E+02	1.181E+02	2.748E+00
6.060E+01	8.620E+01	8.544E+01	7.212E-01
6.280E+01	5.150E+01	5.281E+01	4.733E+00
6.500E+01	2.566E+01	2.493E+01	4.613E+00
6.700E+01	7.770E+00	8.024E+00	1.997E+00
6.920E+01	2.220E+00	2.032E+00	1.563E+00
7.140E+01	9.830E+00	1.017E+01	1.902E+00
7.360E+01	3.120E+01	3.068E+01	1.099E+00
7.580E+01	6.180E+01	6.076E+01	1.699E+00
7.800E+01	9.510E+01	9.869E+01	7.614E+00
8.020E+01	1.448E+02	1.426E+02	1.705E+00
8.220E+01	1.875E+02	1.833E+02	3.025E+00
8.440E+01	2.234E+02	2.216E+02	4.999E-01
8.640E+01	2.439E+02	2.453E+02	1.681E-01
8.847E+01	2.567E+02	2.579E+02	1.105E-01
9.040E+01	2.681E+02	2.603E+02	3.459E+00

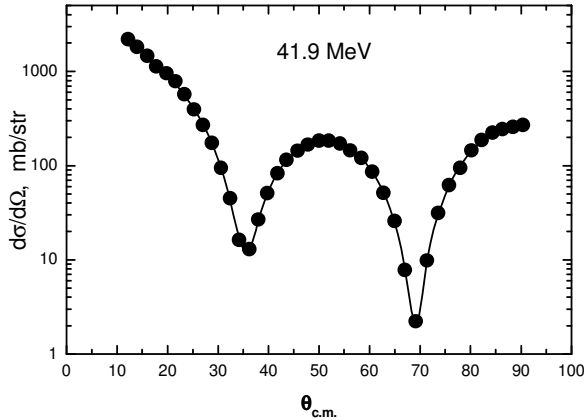
Действительные фазы - 112.6611 53.5342 104.2262 15.7344							
0.0000	0.0000	3.9450	1.8310	0.0000	1.0262	0.4863	0.0000
		0.3765	0.0000	0.0000	0.0000		
Мнимые фазы - 28.4867 0.0000 0.0000 0.5922 0.0000 0.0000							
0.3468	0.0000	0.0109	0.2538	0.0000	0.0000	0.2712	0.1621

0.0000 0.0978

И только увеличение L до 40 позволяет получить заметно меньшее $\chi^2 = 0.8573$, со следующими фазами рассеяния

Действительные фазы - 105.8962 53.0717 103.3716 16.0950
 0.0000 0.0710 3.9094 1.5391 0.0000 0.5518 1.4615 0.0091
 0.4501 0.0000 1.1544 0.0631 0.1885 0.8750 0.0000 0.4869
 0.0000
 19.0395 0.0005 0.0000 0.2844 0.0000 0.1207 0.4153
 0.0000 0.2214 0.1117 0.0968 0.0069 0.5820 0.2484 0.2132
 0.3826 0.3416 0.3118 0.0642 0.1986 0.1950

Которые несколько отличаются от, полученных при $L=30$, только в S – волне. Качество писания экспериментальных сечений показано на рисунке 7.13.



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.13 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 41.9 МэВ [224].

Следующая энергия, рассмотренная в работе [224], это 44.41 МэВ. Используем фазы, полученные в предыдущем случае и выполним варьирование с $L=20$ и учете мнимой части фаз. Один из лучших результатов, который можно получить дает $\chi^2 = 4.97$, с фазами

Действительные фазы - 99.4301 74.5262 126.0065 18.5705
 4.4035 0.7213 0.2493 0.0000 0.1380 0.5229 0.3010

Мнимые фазы - 23.6077 4.0092 4.9234 0.0626 0.8233 1.4425
 0.5864 0.1271 0.0000 0.0000 0.1546

Отметим, что при меньших L , например, 12-16 величина χ^2 находится на уровне 6.0-6.2. Увеличим L до 30, тогда получим $\chi^2 = 0.97$ и фазы

Действительные фазы - 119.3874 72.3364 116.1525 16.8884
 3.6282 0.3916 0.0005 0.0670 0.0000 2.5644 2.2477 0.0013
 0.1206 0.0000 0.0000 0.1876

Мнимые фазы - 29.7369 9.3575 3.6540 0.0717 1.4200
 3.1324 1.7457 1.0906 0.0000 0.1427 0.4842 0.0000 0.2488
 0.0862 0.0244 0.0019

Видно, что только учет комбинации малых вкладов высших парциальных волн позволяет, как и в предыдущем случае, получить приемлемую величину χ^2 порядка единицы.

Проверим, можно ли получить лучшие результаты, если еще увеличить число парциальных волн. В частности, для $L=34$ можно получить некоторое улучшение качества описания экспериментальных сечений при $\chi^2 = 0.68$ и только увеличение L до 40 приводит к заметному улучшению описания дифференциальных сечений, которое приведено ниже

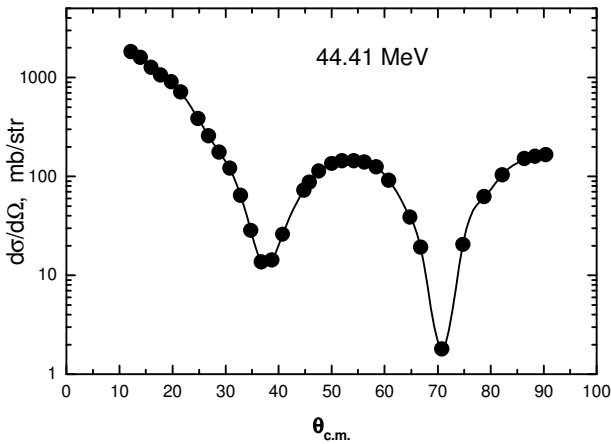
$\chi^2 = 0.47672$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
1.220E+01	1.820E+03	1.869E+03	1.748E+00
1.400E+01	1.602E+03	1.550E+03	2.521E+00
1.600E+01	1.263E+03	1.272E+03	1.248E-01
1.780E+01	1.058E+03	1.082E+03	1.323E+00
1.980E+01	9.050E+02	8.935E+02	5.874E-01
2.160E+01	7.114E+02	7.085E+02	3.722E-02
2.480E+01	3.820E+02	3.858E+02	5.897E-01
2.680E+01	2.580E+02	2.554E+02	7.759E-01
2.880E+01	1.760E+02	1.779E+02	9.484E-01
3.080E+01	1.210E+02	1.182E+02	1.903E+00
3.280E+01	6.440E+01	6.476E+01	1.987E-01
3.480E+01	2.840E+01	2.840E+01	1.354E-06
3.680E+01	1.360E+01	1.356E+01	4.869E-02
3.880E+01	1.420E+01	1.426E+01	8.793E-02
4.080E+01	2.600E+01	2.592E+01	7.489E-02
4.480E+01	7.290E+01	7.319E+01	1.753E-01
4.580E+01	8.760E+01	8.749E+01	1.390E-02

4.760E+01 1.126E+02 1.120E+02 2.646E-01
 5.000E+01 1.344E+02 1.353E+02 4.518E-01
 5.200E+01 1.442E+02 1.431E+02 5.952E-01
 5.420E+01 1.435E+02 1.442E+02 2.838E-01
 5.620E+01 1.399E+02 1.402E+02 3.298E-02
 5.840E+01 1.249E+02 1.240E+02 6.015E-01
 6.080E+01 9.160E+01 9.210E+01 3.076E-01
 6.480E+01 3.880E+01 3.868E+01 8.438E-02
 6.680E+01 1.920E+01 1.924E+01 2.047E-02
 7.080E+01 1.790E+00 1.791E+00 5.952E-04
 7.480E+01 2.050E+01 2.057E+01 2.996E-02
 7.880E+01 6.230E+01 6.205E+01 1.268E-01
 8.220E+01 1.038E+02 1.047E+02 3.731E-01
 8.640E+01 1.512E+02 1.495E+02 8.028E-01
 8.840E+01 1.600E+02 1.618E+02 5.796E-01
 9.040E+01 1.651E+02 1.648E+02 1.804E-02

Действительные фазы - 117.3916 72.1036 115.9565 16.7765
 3.3375 0.3926 0.0756 0.0270 0.0000 2.6021 2.2519 0.2051
 0.1094 0.0091 0.0000 0.2321 0.3424 0.0896 0.0557 0.0609
 0.0279

Мнимые фазы - 30.1833 9.4258 3.4545 0.1919 1.4489
 2.9905 1.8006 1.2168 0.0054 0.1728 0.3725 0.0587 0.3169
 0.1322 0.0572 0.0000 0.0583 0.0817 0.0583 0.0316 0.0383



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.14 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 44.41 МэВ [224].

Результаты описания дифференциальных сечений показаны на рис.7.14.

Следующая энергия, рассмотренная в работе [224], это 46.12 МэВ. Принимая в качестве начальных, фазы полученные в предыдущем случае получим для $L=20$ величину χ^2 равную 5.08. При увеличении числа парциальных волн до 34 находим $\chi^2 = 3.97$ и только при $L=40$ получаем

$$\chi^2 = 2.2050$$

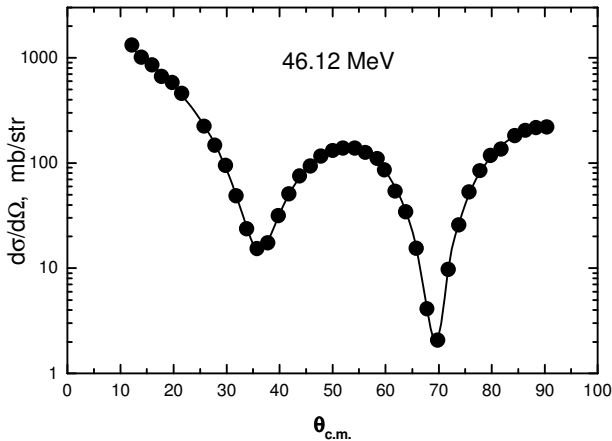
θ	σ_c	σ_t	χ^2
1.220E+01	1.319E+03	1.304E+03	1.798E-01
1.400E+01	1.012E+03	1.044E+03	3.126E+00
1.600E+01	8.570E+02	8.179E+02	6.802E+00
1.780E+01	6.660E+02	6.866E+02	2.936E+00
1.980E+01	5.800E+02	5.729E+02	5.025E-01
2.160E+01	4.561E+02	4.597E+02	2.692E-01
2.580E+01	2.240E+02	2.214E+02	7.735E-01
2.780E+01	1.470E+02	1.503E+02	2.800E+00
2.980E+01	9.510E+01	9.328E+01	2.307E+00
3.180E+01	4.880E+01	4.899E+01	9.975E-02
3.380E+01	2.370E+01	2.390E+01	4.445E-01
3.580E+01	1.530E+01	1.508E+01	1.231E+00
3.780E+01	1.740E+01	1.766E+01	1.753E+00
3.980E+01	3.170E+01	3.081E+01	4.991E+00
4.180E+01	5.080E+01	5.207E+01	4.478E+00
4.380E+01	7.520E+01	7.398E+01	2.338E+00
4.580E+01	9.340E+01	9.435E+01	9.021E-01
4.780E+01	1.155E+02	1.146E+02	4.679E-01
5.000E+01	1.313E+02	1.318E+02	1.365E-01
5.200E+01	1.379E+02	1.378E+02	3.423E-03
5.420E+01	1.375E+02	1.360E+02	1.049E+00
5.620E+01	1.254E+02	1.287E+02	5.504E+00
5.840E+01	1.101E+02	1.070E+02	6.479E+00
5.980E+01	8.560E+01	8.573E+01	1.793E-02
6.180E+01	5.370E+01	5.536E+01	5.601E+00
6.380E+01	3.440E+01	3.284E+01	9.715E+00
6.580E+01	1.550E+01	1.581E+01	2.472E+00
6.780E+01	4.130E+00	4.077E+00	4.421E-01
6.980E+01	2.070E+00	2.101E+00	2.619E-01
7.180E+01	9.700E+00	9.462E+00	1.413E+00
7.380E+01	2.570E+01	2.610E+01	9.809E-01
7.580E+01	5.290E+01	5.299E+01	2.041E-02
7.780E+01	8.470E+01	8.435E+01	1.207E-01

7.980E+01	1.180E+02	1.141E+02	3.874E+00
8.180E+01	1.360E+02	1.421E+02	9.351E+00
8.440E+01	1.817E+02	1.790E+02	1.682E+00
8.640E+01	2.039E+02	2.028E+02	2.506E-01
8.840E+01	2.162E+02	2.169E+02	1.034E-01
9.040E+01	2.194E+02	2.202E+02	1.157E-01

Действительные фазы - 134.8902 56.3774 126.0122 12.2513
 1.8657 0.0000 0.7520 2.6370 0.0000 0.4870 1.6064 0.0000
 0.6390 0.9047 0.0000 0.5808 0.4622 0.0000 0.4953 0.3246
 0.2539

Мнимые фазы - 34.2819 5.3999 1.4059 1.8203 0.9929
 2.1676 0.8192 1.3869 0.4775 0.2946 0.7548 0.2448 0.0286
 0.0773 0.1094 0.1046 0.3101 0.0000 0.0000 0.0359 0.0545

Качество описания экспериментальных сечений показано на рис.7.15. Как видно, при данной энергии даже при 40 парциальных волнах не удастся получить приемлемое значение χ^2 .



Точки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.15 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 46.12 МэВ [224].

В работе [224] приведены и данные по дифференциальным сечениям и для энергии 47.1 МэВ. Измеренные сечения также даны в таблицах, а анализ [225] приводит к следующим действительным фазам рассеяния 99^0 , 51.8^0 , 145.5^0 , 18.7^0 , 2.8^0 . Наши вычисления с

такими фазами дают следующий результат для $\chi^2 = 156$.

Видно, что согласие с экспериментом сравнительно плохое, потому что при такой энергии, как и в предыдущем случае, уже возможны неупругие каналы, а мнимая часть фаз в работе [225] не приводится. Используем варьирование фаз по нашей программе с включением их дополнительной мнимой части и 10 итерациями. В результате находим для $L=8$

$$\chi^2 = 2.63$$

Действительная часть - 105.3432 55.0540 140.6032 18.8508
2.8351

Мнимая часть - 5.4793 0.5167 0.7782 0.8478 0.0251

Увеличим теперь L и посмотрим, сколько парциальных волн нужно учитывать для получения χ^2 порядка единицы. При четырнадцати парциальных волнах получаем $\chi^2 = 1.33$, и только для $L=20$ находим

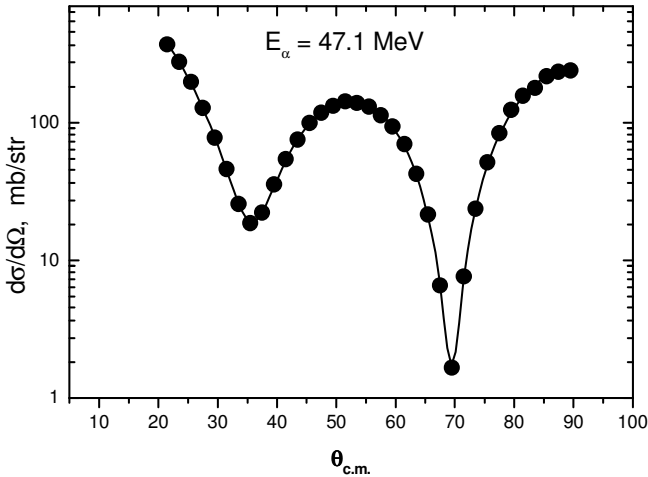
$$\chi^2 = 1.0181$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2
2.150E+01	3.680E+02	3.693E+02	1.949E-01
2.350E+01	2.750E+02	2.755E+02	2.807E-02
2.550E+01	1.966E+02	1.941E+02	1.953E+00
2.750E+01	1.275E+02	1.280E+02	1.252E-01
2.950E+01	7.740E+01	7.844E+01	2.199E+00
3.150E+01	4.600E+01	4.480E+01	2.933E+00
3.350E+01	2.550E+01	2.548E+01	2.196E-03
3.550E+01	1.860E+01	1.865E+01	2.393E-02
3.750E+01	2.220E+01	2.249E+01	5.202E-01
3.950E+01	3.550E+01	3.506E+01	7.805E-01
4.150E+01	5.420E+01	5.397E+01	6.503E-02
4.350E+01	7.510E+01	7.627E+01	8.126E-01
4.550E+01	9.890E+01	9.868E+01	1.898E-02
4.750E+01	1.177E+02	1.181E+02	5.638E-02
4.950E+01	1.316E+02	1.323E+02	1.080E-01
5.150E+01	1.425E+02	1.395E+02	1.986E+00
5.350E+01	1.383E+02	1.391E+02	1.526E-01
5.550E+01	1.303E+02	1.307E+02	4.182E-02
5.750E+01	1.129E+02	1.149E+02	1.076E+00
5.950E+01	9.320E+01	9.307E+01	6.900E-03
6.150E+01	6.940E+01	6.790E+01	1.571E+00
6.350E+01	4.240E+01	4.272E+01	2.052E-01
6.550E+01	2.140E+01	2.118E+01	3.026E-01

6.750E+01 6.530E+00 6.643E+00 4.988E-01
 6.950E+01 1.650E+00 1.639E+00 2.656E-02
 7.150E+01 7.630E+00 7.512E+00 3.496E-01
 7.350E+01 2.360E+01 2.427E+01 2.835E+00
 7.550E+01 5.120E+01 5.059E+01 4.531E-01
 7.750E+01 8.350E+01 8.390E+01 7.011E-02
 7.950E+01 1.229E+02 1.207E+02 2.976E+00
 8.150E+01 1.567E+02 1.570E+02 1.061E-02
 8.350E+01 1.783E+02 1.893E+02 1.192E+01
 8.550E+01 2.167E+02 2.150E+02 2.345E-01
 8.750E+01 2.342E+02 2.321E+02 9.678E-01
 8.950E+01 2.389E+02 2.397E+02 1.310E-01

Действительная часть - 105.3332 52.3046 135.3000 17.4462
 2.5823 0.6332 0.7840 0.0600 0.2724 0.1426 0.2977
 Мнимая часть - 11.8524 2.4806 1.1357 0.1707 0.0803 0.8866
 0.7752 0.4579 0.3014 0.1366 0.2743

Поскольку фазы при такой энергии становятся комплексными, то появляется сечение неупругих процессов или реакций σ_r и учет мнимой части фаз позволяет улучшить согласие расчета с экспериментом, как показывает рисунок 7.16.



Кружки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.16 - Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-

При увеличении L до 30 получает $\chi^2 = 0.700$ со следующими фазами

Действительная часть - 106.1704 51.6346 134.1084 17.2203							
2.3269	0.3964	0.6347	0.0000	0.4220	0.2338	0.4530	0.0000
		0.0020	0.0000	0.1307	0.3588		
Мнимая часть - 11.9789 3.4758 1.2031 0.0000 0.0544 1.0305							
1.1103	0.5890	0.2763	0.1363	0.4951	0.2665	0.2795	0.0000
			0.0000	0.1021			

Такие фазы мало отличаются от приведенных выше для случая с $L=20$. Это говорит о том, что в процессе поиска ядерных фаз рассеяния достигнуто насыщение, т.е. при увеличении числа парциальных волн каждая фаза стремится к некоторому пределу, который и является ее истинным значением.

Рассмотрим теперь энергию 51.1 МэВ. Сечения были измерены в работе [102] (данные приведены на рисунках), а фазовый анализ вообще не проводился. Поэтому используем в качестве начальных фаз результаты работы [226] при 53.4 МэВ, где для реальной части фаз получено $\delta_0 = 104,8 \pm 2.4^0$, $\delta_2 = 47.9 \pm 1.7^0$, $\delta_4 = 137.9 \pm 1.3^0$, $\delta_6 = 27.5 \pm 0.6^0$, $\delta_8 = 2.0 \pm 0.5^0$. Для мнимой части найдено 12.1 ± 3.1^0 , 22.1 ± 1.7^0 , 16.3 ± 1.1^0 , 3.2 ± 0.5^0 , 0 ± 0.4^0 . Выполняя по нашей программе варьирование начальных фаз с десятью итерациями и $L=20$, получим $\chi^2 = 0.97$ и фазы рассеяния

Действительная часть фаз - 110.8739 55.0885 151.8536 24.9089							
3.2213	0.0379	0.0000	0.2313	0.1331	0.2534	0.2644	
Мнимая часть фаз - 14.9625 20.3880 23.6627 1.8434 0.3412							
0.1910	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1214	

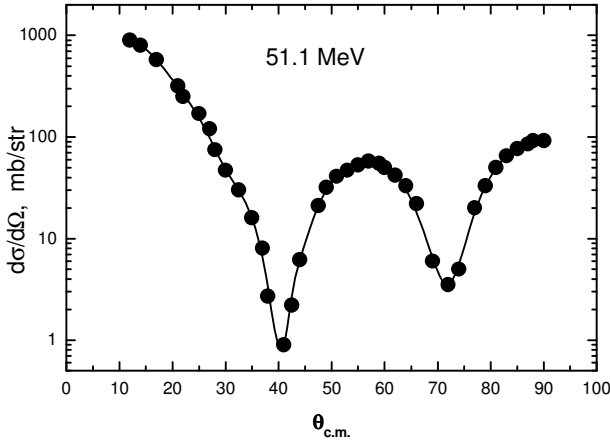
Увеличение L до 30 приводит нас к следующим фазам при $\chi^2 = 0.565$

Действительная часть фаз - 110.4496 55.9184 151.6671 24.5942							
2.9661	0.0000	0.0540	0.3384	0.4010	0.3354	0.2822	0.0000
		0.0987	0.0696	0.2609	0.3980		
Мнимая часть фаз - 16.3963 20.2218 23.6944 1.6822 0.4220							
0.2718	0.0000	0.0000	0.1552	0.0598	0.1692	0.1597	0.0271
			0.0604	0.0002	0.1763		

Найденные, таким образом, фазы вполне согласуются с общим ходом фаз в этой области энергий, а экспериментальные и вычис-

ленные, с найденными фазами, сечения рассеяния показаны на рисунке 7.17.

В качестве экспериментальных ошибок, использовались ошибки определения сечений из рисунка, которые составляют примерно 5-10%.



Кружки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.17 - Сечения упругого $^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при энергии 51.1 МэВ.

И в заключение выполним фазовый анализ экспериментальных данных при энергии 49.9 МэВ [227], для которой такие расчеты не проводился, принимая в качестве начальных фаз предыдущие результаты. Ранее было получено, что при $L=8$ величина χ^2 оказывается порядка 130 [219]. Столь большое значение обусловлено малостью экспериментальных ошибок, полученные в работе [227].

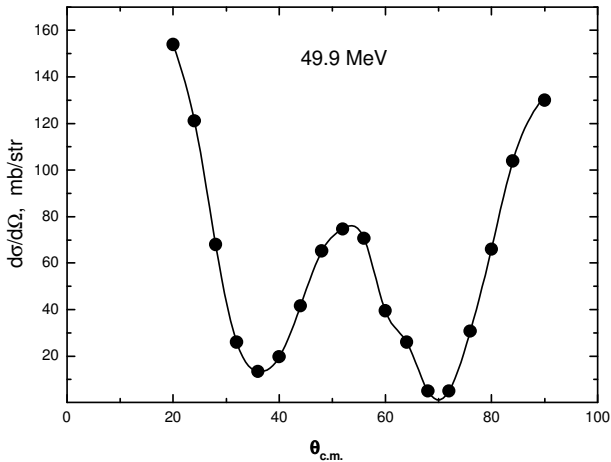
Рассмотрим теперь более высокие парциальные волна. Так при $L=20$ для χ^2 получается еще довольно большая величина 20.2 со следующими фазами

Действительная часть фаз -	128.4722	26.0885	138.4599	6.8897
	0.0000	0.9080	3.3861	1.2455
	4.9559	2.7870	0.0000	
Мнимая часть фаз -	20.8384	21.9793	5.6456	0.0000
	4.7497	6.2505	4.7320	0.0000
	1.4833	1.1623	0.2628	

И только при 30 парциальных волн удается хорошо воспроизвести экспериментальные результаты по дифференциальным сечениям

$\chi^2 = 0.0189$

θ	σ_e	σ_i	χ^2
2.000E+01	1.539E+02	1.539E+02	1.493E-04
2.400E+01	1.211E+02	1.211E+02	1.918E-03
2.800E+01	6.790E+01	6.792E+01	8.305E-04
3.200E+01	2.600E+01	2.599E+01	5.691E-04
3.600E+01	1.350E+01	1.351E+01	1.308E-03
4.000E+01	1.970E+01	1.969E+01	4.197E-03
4.400E+01	4.160E+01	4.163E+01	8.151E-03
4.800E+01	6.520E+01	6.515E+01	1.474E-02
5.200E+01	7.470E+01	7.474E+01	9.153E-03
5.600E+01	7.060E+01	7.055E+01	1.293E-02
6.000E+01	3.950E+01	3.951E+01	8.638E-04
6.400E+01	2.600E+01	2.599E+01	1.315E-03
6.800E+01	5.000E+00	5.003E+00	2.404E-03
7.200E+01	5.000E+00	5.006E+00	8.882E-03
7.600E+01	3.070E+01	3.068E+01	1.911E-02
8.000E+01	6.600E+01	6.606E+01	3.758E-02
8.400E+01	1.038E+02	1.038E+02	1.204E-02
9.000E+01	1.300E+02	1.318E+02	2.042E-01



Кружки – экспериментальные данные, сплошная кривая - расчет сечений с найденными фазами.

Рисунок 7.18 - Сечения упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при энергии 49.9 МэВ.

Действительная часть фаз - 127.5003 34.3877 141.3168 8.0940

0.0092	0.3824	1.8194	0.7321	4.4653	2.4917	0.0005	0.9836
		0.1437	0.0018	0.5503	0.3922		
Мнимая часть фаз - 31.2338 17.9109 6.1097 0.2166 3.4990							
5.1733	4.1288	0.0000	1.8539	1.1013	0.0491	0.9386	0.3148
		0.0746	0.2505	0.1446			

На рисунке 7.18 показаны расчетные и экспериментальные сечения рассеяния.

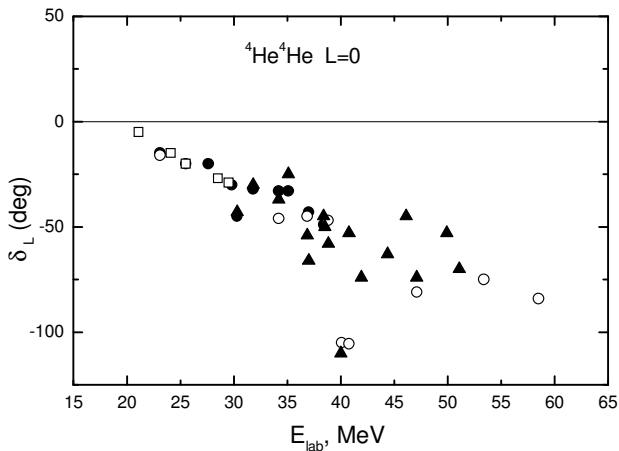
Приведем теперь сводную таблицу 7.2 фаз рассеяния в области энергий 30-50 МэВ, полученных в наших расчетах и результаты при более низких энергиях 6-30 МэВ.

Таблица 7.2 - Сводная таблица фаз ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния.

E, МэВ		δ_0	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8	χ^2
6.47	Re δ_L	80.4	80.7	---	---	---	0.2
12.3	Re δ_L	28.4	105.0	2.6	---	---	3.4
17.8	Re δ_L	7.2	103.9	17.0	---	---	0.5
22.9	Re δ_L	169.3	94.5	59.5	1.0	---	1.5
25.5	Re δ_L	160.5	89.0	88.6	1.4	0.2	0.9
29.5	Re δ_L	150.9	86.7	121.0	2.2	0.15	0.6
30.3	Re δ_L	136.8	72.6	121.0	0.0	1.1	0.2
	Im δ_L	1.9	4.2	0.4	2.7	0.1	
31.8	Re δ_L	149.9	70.1	126.6	1.4	4.3	0.1
	Im δ_L	0.0	2.1	4.6	1.6	0.5	
34.2	Re δ_L	142.7	63.9	134.2	1.1	0.0	0.6
	Im δ_L	0.0	0.0	2.3	0.0	0.0	
35.1	Re δ_L	155.1	70.2	137.8	0.0	1.0	0.01
	Im δ_L	3.4	0.5	4.6	0.8	1.0	
37.0	Re δ_L	114.1	55.9	140.2	7.0	0.0	0.2
	Im δ_L	5.3	1.5	8.9	6.6	0.0	
38.4	Re δ_L	135.0	82.1	169.2	4.0	1.5	0.6
	Im δ_L	0.0	2.9	0.1	0.1	0.7	
38.5	Re δ_L	129.9	77.2	165.7	1.5	0.6	0.2
	Im δ_L	3.8	2.5	1.1	0.9	1.4	
40.0	Re δ_L	69.5	49.5	81.4	1.4	0.0	0.2
	Im δ_L	0.9	0.0	4.6	7.1	1.3	
36.85	Re δ_L	126.3	62.3	132.8	2.5	0.6	1.3
	Im δ_L	0.0	0.0	2.3	18.9	0.0	
38.83	Re δ_L	121.9	100.4	163.5	3.8	6.4	1.9
	Im δ_L	6.7	6.5	0.5	0.4	0.1	

40.77	Re δ_L	127.4	40.8	87.6	2.2	0.0	1.6
	Im δ_L	18.8	0.9	0.4	2.0	0.0	
41.9	Re δ_L	105.9	53.1	103.4	16.1	0.0	0.9
	Im δ_L	19.0	0.0	0.0	0.3	0.0	
44.41	Re δ_L	117.4	72.1	116.0	16.8	3.3	0.5
	Im δ_L	30.2	9.4	3.4	0.2	1.4	
46.12	Re δ_L	134.8	56.4	126.0	12.2	1.9	2.2
	Im δ_L	34.3	5.4	1.4	1.8	1.0	
47.1	Re δ_L	106.2	51.6	134.1	17.2	2.3	0.7
	Im δ_L	12.0	3.5	1.2	0.0	0.0	
49.9	Re δ_L	127.5	34.4	141.3	8.1	0.0	0.02
	Im δ_L	31.2	17.9	6.1	0.2	3.5	
51.1	Re δ_L	110.4	55.9	151.7	24.6	3.0	0.6
	Im δ_L	16.4	20.2	23.7	1.7	0.4	

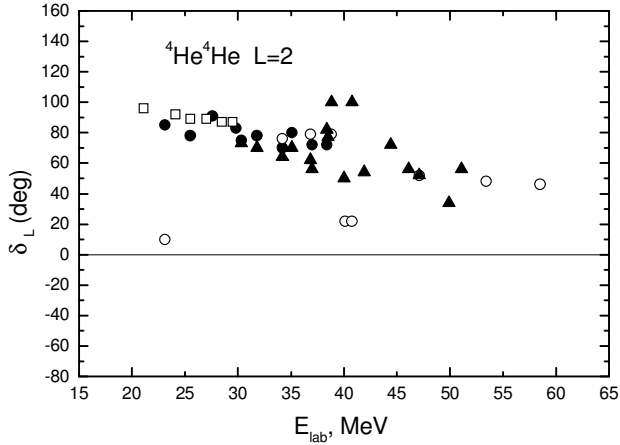
На рисунках 7.19-7.22 приведено сравнение, полученных в наших расчетах фаз рассеяния (треугольниками) в тех областях энергий, где отсутствовал фазовый анализ или был представлен ранее только на рисунках, с имеющимися на сегодняшний день результатами фазовых анализов при других энергиях.



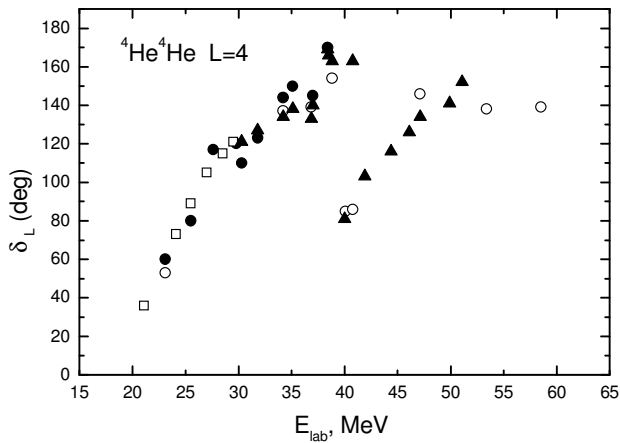
Кружки – данные работ [225] и [226] при энергии больше 50 МэВ, точки – [221], квадраты – [200], треугольники – наши результаты.
Рисунок 7.19 - Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L=0$.

Следует отметить, что найденные наборы параметров рассматриваемой вариационной задачи, т.е. фазы рассеяния при каж-

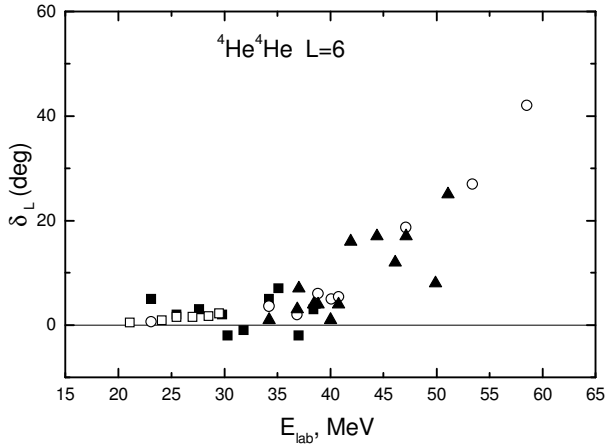
дой энергии, могут лишь претендовать на то, что каждый из них определяет глобальный минимум χ^2 . В частности, при энергии 46.12 МэВ, по-видимому, так и не удалось найти нужный набор фаз рассеяния, определяющий истинный минимум величины χ^2 .



Кружки – данные работ [225] и [226] при энергии больше 50 МэВ, точки – [221], квадраты – [200], треугольники – наши результаты.
Рисунок 7.20 - Фазы упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при $L=2$.



Кружки – данные работ [225] и [226] при энергии больше 50 МэВ, точки – [221], квадраты – [200], треугольники – наши результаты.
Рисунок 7.21 - Фазы упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при $L=4$.



Кружки – данные работ [225] и [226] при энергии больше 50 МэВ, точки – [221], квадраты – [200], треугольники – наши результаты.
 7.22 - Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L=6$.

Однако, при многих других энергиях, можно найти такие наборы параметров или фаз рассеяния, которые с увеличением числа парциальных волн, стремятся к некоторому пределу, определяющему их истинное значение.

Из этих результатов видно, что предложенная программа позволяет вполне успешно выполнять минимизацию функционала χ^2 в поле многих вариационных параметров (действительных и комплексных фаз рассеяния) при всех рассмотренных энергиях сталкивающихся ядерных частиц.

В широкой энергетической области выполнено уточнение известных значений ядерных фаз ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния [228]. Фазовый анализ при других рассмотренных энергиях в области 30-50 МэВ приводит нас к вполне разумным результатам и, в целом, согласуется с данными других работ.

7.2 Система частиц с полным спином 1/2

Перейдем теперь к рассмотрению процессов упругого рассеяния в ядерной системе $p{}^4\text{He}$, полный спин которой равен 1/2. В случае упругого рассеяния таких частиц сечения выражаются через фазы ядерного рассеяния следующим образом (эти формулы были приведены в предыдущей главе, но мы снова приведем их для большей наглядности) [57]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |A(\theta)|^2 + |B(\theta)|^2, \quad (7.3)$$

где

$$A(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} \{(L+1)S_L^+ + LS_L^- - (2L+1)\} \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos\theta),$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} (S_L^+ - S_L^-) \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos\theta). \quad (7.4)$$

Здесь $S_L^{\pm} = \eta_L^{\pm} \exp(2i\delta_L^{\pm})$ - матрица рассеяния, η_L^{\pm} - параметры неупругости, а знаки “ \pm ” соответствуют полному моменту системы $J = L \pm 1/2$, f_c - кулоновская амплитуда, описанная выше (6.3), $P_n^m(x)$ - присоединенные полиномы или функции Лежандра.

Приведем теперь текст компьютерной программы на языке Turbo Basic для поиска фаз рассеяния в системе частиц со спином 1/2 по заданным экспериментальным сечениям [229].

REM * ПРОГРАММА ФАЗОВОГО АНАЛИЗА AL-N 9.954 *

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,L,J,N,M,K

DIM SE(50), ST(50), DS(50), FP(50), FM(50), TT(50), XP(50), DE(50), POL(50)

REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *****

FAIL\$="C:\BASICA\FAZ-ALN.DAT": PI=4*ATN(1.): Z1=1: Z2=2

AM1=1: AM2=4: AM=AM1+AM2: P1=3.14159265: A1=41.4686

PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1: LMI=0: LH=1: LMA=3

EP=1.0D-05: NV=1: FH=1.1: NI=10: NPP=2*LMA

REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА *****

REM ***** PHASE SHIFTS FOR P-AL ON E=9.954 *****

FP(0)=107.2: FP(1)=103.3: FP(2)=3.2: FP(3)=2.3: FP(4)=0.

FM(0)=FP(0): FM(1)=54.7: FM(2)=-2.9: FM(3)=2.9: FM(4)=0.

FPI(0)=.1: FPI(1)=.1: FPI(2)=.1: FPI(3)=.1: FPI(4)=.1

FMI(0)=FPI(0): FMI(1)=.1: FMI(2)=.1: FMI(3)=.1: FMI(4)=.1

REM ***** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION 9.954 *****

SE(1)=371: SE(2)=339: SE(3)=305: SE(4)=232: SE(5)=205

SE(6)=176: SE(7)=124: SE(8)=82.0: SE(9)=49.2: SE(10)=39.1

SE(11)=26.2: SE(12)=22.5: SE(13)=21: SE(14)=23: SE(15)=24.5

SE(16)=31.9: SE(17)=33.2: SE(18)=37.8: SE(19)=47.3

SE(20)=54.0: SE(21)=61.6: SE(22)=70.4: SE(23)=78.4: SE(24)=84.9

TT(1)= 25.1: TT(2)=30.89: TT(3)=35.07: TT(4)=49.03


```

TT(5)=54.7: TT(6)= 60.1: TT(7)=70.10: TT(8)=80: TT(9)=90
TT(10)=94.07: TT(11)=102.17: TT(12)=106.9: TT(13)=109.9
TT(14)=120.6: TT(15)=122.8: TT(16)=130.13: TT(17)=130.9
TT(18)=134.87: TT(19)=140.8: TT(20)=145: TT(21)=149.4
TT(22)=154.9: TT(23)=160: TT(24)=164.4
REM ***** FOR AL-N ON E=9.954 *****
NT=24: EL=9.954
REM ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: FM(L)=FM(L)*PI/180
FP(L)=FP(L)*PI/180
FMI(L)=FMI(L)*PI/180: FPI(L)=FPI(L)*PI/180: NEXT:
FH=FH*PI/180
REM NP=2*NPP+1: REM - ПРИ УЧЕТЕ МНИМОЙ ЧАСТИ ФАЗ
NP=NPP: REM - ПРИ УЧЕТЕ ТОЛЬКО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ
ЧАСТИ ФАЗ
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I)=FP(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+LMA+1)=FM(I+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+2*LMA+1)=FPI(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+3*LMA+2)=FMI(I+1):
NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
EC=EL*PM/AM1: SK=EC*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS
CALL VAR(ST(),FH,LMA,NI,XP(),EP,XI,NV)
CLS: PRINT: PRINT " XI-KV=";
PRINT USING " ####.### ";XI;NI
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FP(I)=XP(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: FM(I+1)=XP(I+LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FPI(I)=XP(I+2*LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: FMI(I+1)=XP(I+3*LMA+2):
NEXT
FMI(0)=FPI(0): FM(0)=FP(0): SIGMAR=0: SIGMAS=0
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: AP=FP(L): AM=FM(L)
135 ETP(L)=EXP(-2*FPI(L)): ETM(L)=EXP(-2*FMI(L))
SIGMAR=SIGMAR+((L+1)*(1-(ETP(L))^2)+L*(1-(ETM(L))^2))
SIGMAS = SIGMAS + ((L + 1)*(ETP(L))^2*(SIN(AP))^2 +
L*(ETM(L))^2*(SIN(AM))^2): NEXT L
SIGMAR=10*4*PI*SIGMAR/SK: SIGMAS=10*4*PI*SIGMAS/SK
PRINT " SIGMR-TOT=";
PRINT USING " ####.### ";SIGMAR
PRINT " SIGMS-TOT=";
PRINT USING " ####.### ";SIGMAS
PRINT " T SE ST XI T SE ST XI"

```

```

FOR I=1 TO NT/2
PRINT USING " #####.## ";TT(I); SE(I); ST(I); DS(I), TT(I+12);
SE(I+12); ST(I+12); DS(I+12); NEXT I: CLS
PRINT " T POL T POL ": FOR I=1 TO NT/2
PRINT USING " #####.## ";TT(I); POL(I)*100; TT(I+12);
POL(I+12)*100
NEXT I: PRINT " FP FPI FM FMI"
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: FM(L)=FM(L)*180/PI
FP(L)=FP(L)*180/PI: FMI(L)=FMI(L)*180/PI: FPI(L)=FPI(L)*180/PI
PRINT USING " ###.### ";FP(L);FPI(L);FM(L);FMI(L): NEXT
GOTO 1111: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, " ALPHA - ALPHA FOR LAB E=";
PRINT#1, E1(NN): FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " #.#####^ ^ ^ ";T;SEC(T): NEXT
1111 END
SUB VAR(ST(50),PHN,LMA,NL,XP(50),EP,AMIN,NV)
DIM XPN(50): SHARED LH,LMI,NT,PI,DS(),NP,NPP
REM ***** ПОИСК МИНИМУМА *****
FOR I=LMI TO NP STEP LH: XPN(I)=XP(I): NEXT: NN=LMI
PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN)*180/PI: PH=PHN
CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA: IF NV=0 GOTO 3012
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ";ALA
REM -----
FOR IIN=1 TO NI: NN=-LH
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ";ALA;IIN
GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH:REM IF NN>NP GOTO 3012: IN=0
2229 A=B: XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN): IF NP=NPP GOTO
7777
IF NN<(NP/2) GOTO 7777: IF XPN(NN)<0 GOTO 1159
7777 IN=IN+1
REM -----
CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA: GOTO 5678
PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN)*180/PI;
PRINT USING " +#.#####^ ^ ^ ";ALA;
PRINT
5678 REM -----
IF B<A GOTO 2229: C=A: XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF IN>1 GOTO 3339: PH=-PH: GOTO 5559
3339 IF ABS((C-B)/(B))<EP GOTO 4449: PH=PH/2
5559 B=C: GOTO 2229

```

```

4449 PH=PHN: B=C: IF NN<NP GOTO 1119
3012 AMIN=B: PH=PHN: NEXT IIN: FOR I=LMI TO NP STEP LH
XP(I)=XPN(I): NEXT: END SUB
SUB DET(XP(50),ST(50),XI)
SHARED SE(),DS(),DE(),NT
S=0: CALL SEC(XP(),ST()): FOR I=1 TO NT
DS(I)=-((ST(I)-SE(I))/0.01/SE(I))^2
S=S+DS(I): NEXT: XI=S/NT: END SUB
SUB SEC(XP(50),S(50))
SHARED PI,NT,GG,SS,LMI,LMA,LH,POL(),TT(),NP,NPP
DIM S0(20),P(20),PP(20),FP(20),FM(20),EP(20),EM(20)
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FP(I)=XP(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: FM(I+1)=XP(I+LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FPI(I)=XP(I+2*LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: FMI(I+1)=XP(I+3*LMA+2):
NEXT
FMI(0)=FPI(0): FM(0)=FP(0): CALL CULFAZ(GG,S0())
FOR I=1 TO NT: TT=TT(I): T=TT*PI/180: X=COS(T): A=2/(1-X)
S0=2*S0(0): BB=-GG*A
ALO=GG*LOG(A)+S0: REC=BB*COS(ALO): AMC=BB*SIN(ALO)
REA=0: AMA=0: REB=0: AMB=0: FOR L=LMI TO LMA STEP
LH
FP=2*FP(L): FM=2*FM(L): EP(L)=EXP(-2*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2*FMI(L)): A=EP(L)*COS(FP)-EM(L)*COS(FM)
B=EP(L)*SIN(FP)-EM(L)*SIN(FM): SL=2*S0(L)
CALL FUNLEG(X,L,PP())
REB=REB+(B*COS(SL)+A*SIN(SL))*PP(L)
AMB=AMB+(B*SIN(SL)-A*COS(SL))*PP(L): LL=2*L+1: JJ=L+1
A=JJ*EP(L)*COS(FP)+L*EM(L)*COS(FM)-LL
B=JJ*EP(L)*SIN(FP)+L*EM(L)*SIN(FM): CALL POLLEG(X,L,P())
REA=REA+(B*COS(SL)+A*SIN(SL))*P(L)
AMA=AMA+(B*SIN(SL)-A*COS(SL))*P(L): NEXT L
REA=REC+REA: AMA=AMC+AMA
RE=REA^2+AMA^2: AM=REB^2+AMB^2
S(I)=10*(RE+AM)/4/SS^2
POL(I)=2*(REB*AMA-REA*AMB)/(RE+AM)
NEXT I: END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB FUNLEG(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): P(2)=3*X*P(1)
FOR I=2 TO L: P(I+1)=(2*I+1)*X/I*P(I)-(I+1)/I*P(I-1)
NEXT: END SUB

```

SUB CULFAZ(G,F(20))

REM COULOMB PHASE SHIFTS

C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5

FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A

NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ: FOR I=1 TO 20

F(I)=F(I-1)+ATN(G/(I)): NEXT: END SUB

Приведем теперь вариант контрольного счета по этой программе, который выполнен для $r^4\text{He}$ рассеяния при энергии 9.954 МэВ с данными из работы [202]. В работе приведены экспериментальные сечения при энергиях 2 - 11 МэВ и результаты фазового анализа, которые приведены в предыдущей главе и в таблице 7.3 для $E = 9.954$ МэВ.

Таблица 7.3 - Фазы $r^4\text{He}$ рассеяния.

E, МэВ	S ₀ , град	P _{3/2} , град	P _{1/2} , град	D _{5/2} , град	D _{3/2} , град
9.954	111,0	103,0	52,0	-2,0	-4,0

Результаты расчета сечений σ_t при этой энергии с точными значениями углов рассеяния и табличными фазами приведены в предыдущей главе, где было получено $\chi^2 = 0.96$.

Представляется интересным выяснить, насколько хорошо был выполнен фазовый анализ сечений, и можно ли получить меньший χ^2 варьируя фазы из работы [202]. Выполняем уточнение (варьирование) фаз по нашей программе при 10 итерациях (экспериментальные ошибки по сечениям приняты равными 2%)

$\chi^2 = 0.401$				$\sigma_s = 1402.41$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
25.10	371.00	371.09	0.00	109.90	21.00	20.71	0.47
30.89	339.00	333.69	0.61	120.60	23.00	22.61	0.72
35.07	305.00	310.01	0.67	122.80	24.50	24.23	0.30
49.03	232.00	232.29	0.00	130.13	31.90	32.01	0.03
54.70	205.00	200.96	0.97	130.90	33.20	33.01	0.08
60.00	176.00	172.49	0.99	134.87	37.80	38.58	1.05
70.10	124.00	122.35	0.45	140.80	47.30	47.84	0.32
80.00	82.00	81.03	0.35	145.00	54.00	54.74	0.47
90.00	49.20	49.49	0.09	149.40	61.60	61.96	0.08
94.07	39.10	39.90	1.04	154.90	70.60	70.53	0.00
102.17	26.20	26.54	0.42	160.00	78.40	77.61	0.26
106.90	22.00	22.20	0.21	164.40	83.00	82.76	0.02

$$S_0 = 109.14, \quad P_{3/2} = 101.92, \quad P_{1/2} = 50.74, \quad D_{5/2} = -2.21, \\ D_{3/2} = -5.40 \text{ - Улучшенный вариант фаз.}$$

Как видно, очень не большие изменения фаз позволяют заметно улучшить описание экспериментальных сечений. Отметим, что такие изменения фаз заметно меняют расчетные поляризации, поэтому минимизацию χ^2 нужно проводить при совместном анализе сечений и поляризаций.

В работе [230] был приведен вариант фазового анализа для энергии 9.89 МэВ, в котором получены положительные D фазы и среднее $\chi^2 = 0.60$. В этом анализе использованы 22 точки по сечениям из [202] при энергии 9.954 МэВ (в [230] не указано, какие именно 22 точки были взяты из 24 - х, приведенных в работе [202]) и несколько точек по поляризациям из работ [230, 231]. В последнем случае, по - видимому, использованы данные при углах 46.5^0 , 55.9^0 , 56.2^0 , 73.5^0 , 89.7^0 , 99.8^0 , 114.3^0 , 128.3^0 и энергиях 9.89, 9.84 и 9.82 МэВ.

Фазы из работы [230] приведены в таблице 7.4, а χ^2 по нашей программе с учетом 24 точек только по сечениям из [202] (при энергии 9.954 МэВ) и этими фазами получается равным 0.59, как показано на распечатке ниже.

Таблица 7.4 - Фазы рассеяния из работы [230].

Е, МэВ	S ₀ , град		P _{3/2} , град		P _{1/2} , град		D _{5/2} , град		D _{3/2} , град	
9.954	119,3	+2.0 -1.8	112,4	+3.5 -5.2	65,7	+2.7 -3.2	5,3	+1.6 -2.5	3,7	+1.6 -2.8

$\chi^2_s = 0.586$				$\sigma_s = 1363.87$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
25.10	371.00	366.85	0.31	109.90	21.00	20.70	0.51
30.89	339.00	331.54	1.21	120.60	23.00	22.59	0.79
35.07	305.00	308.40	0.31	122.80	24.50	24.19	0.40
49.03	232.00	230.61	0.09	130.13	31.90	31.91	0.00
54.70	205.00	199.10	2.07	130.90	33.20	32.90	0.21
60.00	176.00	170.56	2.39	134.87	37.80	38.44	0.71
70.10	124.00	120.59	1.89	140.80	47.30	47.69	0.17
80.00	82.00	79.77	1.85	145.00	54.00	54.62	0.33
90.00	49.20	48.82	0.15	149.40	61.60	61.88	0.05
94.07	39.10	39.44	0.19	154.90	70.60	70.54	0.00
102.17	26.20	26.39	0.13	160.00	78.40	77.71	0.19
106.90	22.00	22.15	0.12	164.40	83.00	82.94	0.00

Для данных [230,231] по поляризациям при энергиях 9.82-9.89 МэВ и восьми углах, с фазами из [230], можно получить следующие результаты (углы в даны градусах, поляризации в процентах, т.е. поляризация умножена на 100%, а энергия, по-прежнему, задается равной 9.954 МэВ)

$$\chi^2_p = 0.589$$

θ	P_e	ΔP_e	P_t	χ^2_i
46.50	-32.30	2.10	-33.11	0.15
55.90	-41.30	2.20	-42.50	0.30
56.20	-44.40	0.90	-42.81	3.11
73.50	-62.60	3.00	-62.84	0.01
73.50	-64.80	1.90	-62.84	1.06
89.70	-76.10	3.60	-76.33	0.01
89.70	-75.50	2.40	-76.33	0.12
99.80	-59.30	2.50	-58.55	0.09
114.30	48.20	3.20	51.03	0.78
128.30	99.40	3.30	97.66	0.28

Здесь P_e - экспериментальные поляризации, ΔP_e - экспериментальные ошибки для поляризаций и P_t - расчетные поляризации. Если усреднить χ^2 по всем точкам (24+10=34), результаты для которых приведены выше, т.е. использовать выражение

$$\chi^2 = \frac{1}{(N_s + N_p)} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i^t - \sigma_i^e}{\Delta \sigma_i^e} \right]^2 + \sum_{i=1}^N \left[\frac{P_i^t - P_i^e}{\Delta P_i^e} \right]^2 \right\}$$

то получается величина $\chi^2 = 0.5875 \approx 0.59$ в полном соответствии с результатами работы [230], где для значения χ^2 приведено 0.60. Здесь N_s и N_p - число данных по сечениям (24 точки) и поляризациям (10 точек), s^e , P^e , s^t , P^t - экспериментальные и теоретические значения сечений и поляризаций.

Если выполнить дополнительную минимизацию χ^2 по приведенной программе, то для χ^2_s по сечениям получим 0.576, для поляризаций $\chi^2_p = 0.561$ и полное $\chi^2 = 0.572$ при следующих значениях фаз

$$S_0 = 119.01, \quad P_{3/2} = 112.25, \quad P_{1/2} = 65.39, \quad D_{5/2} = 5.24, \quad D_{3/2} = 3.63$$

которые полностью ложатся в полосу ошибок, приведенных в работе [230].

Учтем теперь данные по поляризациям для энергии 10 МэВ

при девяти углах из работы [232], тогда, для 19 - ти точек по поляризациям, получим (здесь использованы фазы из работы [230] и энергия 9.954 МэВ)

$$\chi^2_p = 0.825$$

θ	P_e	ΔP_e	P_t	χ^2_i
46.50	-32.30	2.10	-33.11	0.15
55.90	-41.30	2.20	-42.50	0.30
56.20	-44.40	0.90	-42.81	3.11
73.50	-62.60	3.00	-62.84	0.01
73.50	-64.80	1.90	-62.84	1.06
89.70	-76.10	3.60	-76.33	0.00
89.70	-75.50	2.40	-76.33	0.12
99.80	-59.30	2.50	-58.55	0.09
114.30	48.20	3.20	51.03	0.78
128.30	99.40	3.30	97.66	0.28
123.30	96.20	1.70	95.61	0.12
124.70	95.40	1.80	97.46	1.30
126.90	99.20	1.60	98.25	0.35
127.40	98.00	1.80	98.13	0.01
128.70	96.80	1.50	97.37	0.14
129.60	97.20	1.60	96.51	0.18
130.00	94.30	1.50	96.06	1.38
131.40	92.30	1.60	94.16	1.35
133.50	93.70	1.40	90.58	4.96

Для полного χ^2 , найденного по сечениям (24 точки по сечениям из [202] и фазы из [230]) и поляризациям (19 точек из [230,231,232] и фазы из [230]), получим 0.692, т.е. всего учитывались 43-и точки с экспериментальными данными.

Используем теперь фазы, найденные в работе [232], которые приведены в таблице 7.5. Тогда для сечений и поляризаций (43 точки с данными) получим следующие результаты (энергия рассеяния, по - прежнему, задается 9.954 МэВ)

Таблица 7.5 - Фазы рассеяния из работы [232].

E, МэВ	S_0 , град	$P_{3/2}$, град	$P_{1/2}$, град	$D_{5/2}$, град	$D_{3/2}$, град
9.954	119,75±0.69	112,99±0.92	66.18±1.26	5,39±0.57	3,78±0.57

$$\chi^2_s = 0.678 \qquad \sigma_s = 1358.18$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
25.10	371.00	366.04	0.45	109.90	21.00	20.80	0.22

30.89	339.00	330.43	1.60	120.60	23.00	22.65	0.57
35.07	305.00	307.24	0.13	122.80	24.50	24.24	0.27
49.03	232.00	229.64	0.26	130.13	31.90	31.93	0.00
54.70	205.00	198.30	2.67	130.90	33.20	32.92	0.17
60.00	176.00	169.91	2.99	134.87	37.80	38.46	0.75
70.10	124.00	120.24	2.30	140.80	47.30	47.71	0.19
80.00	82.00	79.66	2.04	145.00	54.00	54.64	0.35
90.00	49.20	48.86	0.12	149.40	61.60	61.91	0.07
94.07	39.10	39.51	0.28	154.90	70.60	70.59	0.00
102.17	26.20	26.50	0.32	160.00	78.40	77.78	0.16
106.90	22.00	22.26	0.35	164.40	83.00	83.03	0.00

$$\chi^2_p = 0.740$$

θ	P_e	ΔP_e	P_t	χ^2_i
46.50	-32.30	2.10	-33.35	0.25
55.90	-41.30	2.20	-42.80	0.46
56.20	-44.40	0.90	-43.12	2.02
73.50	-62.60	3.00	-63.26	0.05
89.70	-76.10	3.60	-76.80	0.04
99.80	-59.30	2.50	-59.05	0.01
114.30	48.20	3.20	50.36	0.45
123.30	96.20	1.70	95.35	0.25
124.70	95.40	1.80	97.27	1.08
126.90	99.20	1.60	98.17	0.42
127.40	98.00	1.80	98.06	0.00
128.30	99.40	3.30	97.63	0.29
128.70	96.80	1.50	97.35	0.14
129.60	97.20	1.60	96.53	0.18
130.00	94.30	1.50	96.09	1.42
131.40	92.30	1.60	94.22	1.44
133.50	93.70	1.40	90.69	4.61

Для полного χ^2 теперь получим 0.705, а в работе [232] приводится значение 0.6. Если отбросить последнюю точку по поляризациям, которая дает наибольший χ^2_i (т.е. использовать 18 точек), то получим $\chi^2_p = 0.52$ и полный $\chi^2 = 0.6$ в полном согласии с результатами работы [232].

Выполним теперь варьирование фаз при десяти итерациях $N_i = 10$ с этими начальными фазами (при 42 - х экспериментальных точках) и одновременно минимизируя χ^2 по сечениям и поляризациям

$$\chi^2_s = 0.605$$

$$\sigma_s = 1363.85$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
25.10	371.00	366.53	0.36	109.90	21.00	20.67	0.62
30.89	339.00	331.37	1.27	120.60	23.00	22.49	1.23
35.07	305.00	308.30	0.29	122.80	24.50	24.07	0.74
49.03	232.00	230.62	0.09	130.13	31.90	31.76	0.04
54.70	205.00	199.14	2.04	130.90	33.20	32.75	0.44
60.00	176.00	170.62	2.34	134.87	37.80	38.29	0.43
70.10	124.00	120.69	1.78	140.80	47.30	47.55	0.07
80.00	82.00	79.89	1.66	145.00	54.00	54.49	0.21
90.00	49.20	48.92	0.08	149.40	61.60	61.77	0.02
94.07	39.10	39.51	0.28	154.90	70.60	70.46	0.01
102.17	26.20	26.41	0.17	160.00	78.40	77.66	0.22
106.90	22.00	22.14	0.11	164.40	83.00	82.92	0.00

$$\chi^2_p = 0.538$$

θ	P_e	ΔP_e	P_t	χ^2_i
46.50	-32.30	2.10	-33.43	0.29
55.90	-41.30	2.20	-42.81	0.47
56.20	-44.40	0.90	-43.13	2.02
73.50	-62.60	3.00	-62.96	0.01
73.50	-64.80	1.90	-62.96	0.94
89.70	-76.10	3.60	-76.02	0.00
89.70	-75.50	2.40	-76.02	0.05
99.80	-59.30	2.50	-58.03	0.26
114.30	48.20	3.20	51.34	0.96
128.30	99.40	3.30	97.56	0.31
123.30	96.20	1.70	95.69	0.09
124.70	95.40	1.80	97.48	1.34
126.90	99.20	1.60	98.20	0.39
127.40	98.00	1.80	98.05	0.00
128.70	96.80	1.50	97.24	0.09
129.60	97.20	1.60	96.36	0.27
130.00	94.30	1.50	95.89	1.13
131.40	92.30	1.60	93.94	1.06

$$\chi^2 = 0.572 \approx 0.57 - \text{Среднее значение.}$$

$$S_0 = 119.36, P_{3/2} = 112.40, P_{1/2} = 65.67, D_{5/2} = 5.32, D_{3/2} = 3.89$$

В этом случае для среднего χ^2 по всем этим точкам получим 0.57, т.е. процессы минимизации такого функционала приводят к дальнейшему улучшению описания экспериментальных данных. Как и в предыдущем случае, мы снова получаем для χ^2 такую же

величину 0.57, которая является, по-видимому, минимально возможной для такого типа экспериментальных данных.

7.3 Нетождественные частицы с полуцелым спином

Рассмотрим теперь процессы упругого рассеяния в системе нетождественных частиц, типа $p^3\text{He}$, когда спины каждой частицы равны $1/2$. В случае упругого рассеяния таких частиц сечения выражаются через фазы ядерного рассеяния следующим образом [57]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = 1/4 \frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} + 3/4 \frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega} \quad , \quad (7.5)$$

где индексы s и t относятся к синглетному и триплетному состоянию рассеяния и

$$\frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} = |f_s(\theta)|^2 \quad , \quad \frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega} = |f_t(\theta)|^2 \quad . \quad (7.6)$$

Для триплетного состояния, при учете спин - орбитального расщепления, можно использовать формулы, которые совпадают с выражениями для $^2\text{H}^4\text{He}$ рассеяния [57]

$$\frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{3} \left[|A|^2 + 2(|B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2) \right] \quad ,$$

а для синглетного сечения используем формулы предыдущей главы (6.26), (6.27) и (6.29).

Приведем теперь программу для поиска ядерных фаз на основе дифференциальных сечений упругого рассеяния в такой системе [233].

REM *** ПРОГРАММА ФАЗОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ЗНе-Р
ПРИ 11.48 МЭВ*******

CLS: DEFDBL A-Z: DEFINT I,L,J,N,M,K

DIM SE(50), ST(50), DS(50), FP(50), FO(50), FM(50), FS(50), FT(50),
TT(50), T20(50), T22(50), T21(50)

DIM XP(50), DE(50), POL(50), FPI(50), FOI(50), FMI(50), FSI(50)

REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *****

FAIL\$="C:\BASICA\FAZ-ALN.DAT": PI=4*ATN(1.): Z1=1: Z2=2

AM1=1: AM2=3: AM=AM1+AM2: P1=3.14159265: A1=41.4686

PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1: LMI=0: LH=1: LMA=2

LN=LMI: LV=LMA: EP=1.0D-05: NV=1: FH=.1: NI=10:

```

NPP=2*LMA
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА *****
REM *** EXPERIMENTAL CROSS SECTION 11.48 ***
SE(1)=223.1: SE(2)=222: SE(3)=211.9: SE(4)=54.27
SE(5)=36.76: SE(6)=25.7: SE(7)=16.78: SE(8)=13.21
SE(9)=13.21: SE(10)=20.26: SE(11)=32.21: SE(12)=45.95
SE(13)=58.82: SE(14)=75.46: SE(15)=92.72: SE(16)=97.7:
SE(17)=101.1
TT(1)=27.64: TT(2)=31.97: TT(3)=36.71: TT(4)=82.53
TT(5)=90: TT(6)=96.03: TT(7)=103.8: TT(8)=110.55
TT(9)=116.57: TT(10)=125.27: TT(11)=133.48
TT(12)=140.79: TT(13)=147.21: TT(14)=153.9
TT(15)=162.14: TT(16)=165.67: TT(17)=166.59: NT=17
REM ***** FOR P-3HE ON E=11.48 *****
FP(0)=-88.8: FPI(0)=1: FP(1)=66.7: FPI(1)=1
FP(2)=2.5: FPI(2)=1: FP(3)=1: FPI(3)=1
FO(0)=-88.8: FOI(0)=1: FO(1)=49.4: FOI(1)=1
FO(2)=2.5: FOI(2)=1: FO(3)=1: FOI(3)=1
FM(0)=-88.8: FMI(0)=1: FM(1)=44.3: FMI(1)=1
FM(2)=2.5: FMI(2)=1: FM(3)=1: FMI(3)=1
FS(0)=-84.6: FSI(0)=1: FS(1)=21.4: FSI(1)=1
FS(2)=-18.6: FSI(2)=1: FS(3)=1: FSI(3)=1
REM ***** TRANSFORM TO RADIANS *****
FOR L=LN TO LV STEP LH
FM(L)=FM(L)*PI/180: FP(L)=FP(L)*PI/180
FO(L)=FO(L)*PI/180: FMI(L)=FMI(L)*PI/180
FPI(L)=FPI(L)*PI/180: FOI(L)=FOI(L)*PI/180
FT(L)=FT(L)*PI/180: FS(L)=FS(L)*PI/180
FSI(L)=FSI(L)*PI/180: EP(L)=EXP(-2*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2*FMI(L)): E0(L)=EXP(-2*FOI(L))
ES(L)=EXP(-2*FSI(L)): NEXT: FH=FH*PI/180
REM *****
REM NP=4*NPP+3: REM ПРИ УЧЕТЕ КОМПЛЕКСНЫХ ФАЗ
NP=2*NPP+1: REM ПРИ УЧЕТЕ ТОЛЬКО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ
ФАЗ
IF NP<>(2*NPP+1) GOTO 9988: FOR L=LN TO LV STEP LH:
FMI(L)=0
FPI(L)=0: FOI(L)=0: FSI(L)=0: NEXT
9988 FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I)=FP(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+LMA+1)=FO(I+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+2*LMA+1)=FM(I+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+3*LMA+1)=FS(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+4*LMA+2)=FPI(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+5*LMA+3)=FOI(I+1): NEXT

```

```

FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+6*LMA+3)=FMI(I+1):
NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+7*LMA+3)=FSI(I): NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
EL=11.48: EC=EL*PM/AM1: SK=EC*B1: SS=SQR(SK)
GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS
CALL VAR(ST(),FH,LMA,NI,XP(),EP,XI,NV)
CLS: PRINT: PRINT "          XI-KV=";
PRINT USING " #####.### ";XI
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FP(I)=XP(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: F0(I+1)=XP(I+LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: FM(I+1)=XP(I+2*LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FS(I)=XP(I+3*LMA+1): NEXT
F0(0)=FP(0): FM(0)=FP(0): FOR I=LMI TO LMA STEP LH
FPI(I)=XP(I+4*LMA+2): NEXT: FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH
FOI(I+1)=XP(I+5*LMA+3): NEXT: FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH
FMI(I+1)=XP(I+6*LMA+3): NEXT: FOR I=LMI TO LMA STEP LH
FSI(I)=XP(I+7*LMA+3): NEXT: FOI(0)=FPI(0): FMI(0)=FPI(0)
FOR L=LN TO LV STEP LH: EP(L)=EXP(-2*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2*FMI(L))
E0(L)=EXP(-2*FOI(L)): ES(L)=EXP(-2*FSI(L)): NEXT
SRT=0: SRS=0: SST=0: SSS=0: FOR L=LN TO LV STEP LH
AP=FP(L): AM=FM(L): A0=F0(L): ASS=FS(L): L1=2*L+3
L2=2*L+1: L3=2*L-1
SRT = SRT + L1*(1 - EP(L)^2) + L2*(1 - E0(L)^2) + L3*(1 -
EM(L)^2)
SRS=SRS + L2*(1 - ES(L)^2)
SST = SST + L1*EP(L)^2*SIN(AP)^2 + L2*E0(L)^2*SIN(A0)^2 +
L3*EM(L)^2*SIN(AM)^2: SSS = SSS + L2*ES(L)^2*SIN(ASS)^2
NEXT L
SRT=10*PI*SRT/SK/3: SRS=10*PI*SRS/SK
SIGR=1/4*SRS+3/4*SRT: SST=10*4*PI*SST/SK/3
SSS=10*4*PI*SSS/SK: SIGS=1/4*SSS+3/4*SST
PRINT "          SIGMR-TOT=";
PRINT USING " #####.### ";SIGR: PRINT "          SIGMS-
TOT=";
PRINT USING " #####.### ";SIGS
PRINT " T SE ST XI T SE ST XI"
FOR I=1 TO NT/2: PRINT USING " #####.###
";TT(I);SE(I);ST(I);DS(I),TT(I+9);SE(I+9);ST(I+9);DS(I+9): NEXT I
PRINT
PRINT " FP FPI F0 FOI FM FMI FS FSI"
FOR L=LMI TO LMA STEP LH: FM(L)=FM(L)*180/PI

```

```

FP(L)=FP(L)*180/PI
FMI(L)=FMI(L)*180/PI: FPI(L)=FPI(L)*180/PI
FO(L)=FO(L)*180/PI: FOI(L)=FOI(L)*180/PI
FS(L)=FS(L)*180/PI: FSI(L)=FSI(L)*180/PI
PRINT USING "+###.### "; FP(L); FPI(L), FO(L); FOI(L), FM(L);
FMI(L), FS(L); FSI(L): NEXT: GOTO 1111: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, "      P - 3He FOR LAB E=";
PRINT#1, EC: FOR I=1 TO NP: PRINT#1, USING "#####^^^"
";TT(I);ST(I): NEXT
1111 END
SUB VAR(ST(50),PHN,LMA,NI,XP(50),EP,AMIN,NV)
DIM XPN(50): SHARED LH,LMI,NT,PI,DS(),NP,NPP
REM ***** ПОИСК МИНИМУМА *****
FOR I=LMI TO NP STEP LH: XPN(I)=XP(I): NEXT: NN=LMI
PRINT USING "### ";NN;
PRINT USING "+###.##### ";XPN(NN)*180/PI: PH=PHN
CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA: IF NV=0 GOTO 3012
PRINT USING "      +#.#####^^^ ";ALA
PRINT "-----"
REM -----
FOR IIN=1 TO NI: NN=-LH: PRINT USING "      +#.#####^^^"
";ALA;IIN
GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH: REM IF NN>NP GOTO 3012: IN=0
2229 A=B: XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
IF NP=2*NPP+1 GOTO 7777: IF NN<(NP/2) GOTO 7777
IF XPN(NN)<0 GOTO 1159
7777 IN=IN+1
REM -----
CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA: GOTO 5678
PRINT USING "### ";NN;
PRINT USING "+###.##### ";XPN(NN)*180/PI;
PRINT USING "      +#.#####^^^ ";ALA;: PRINT
5678 REM -----
IF B<A GOTO 2229: C=A: XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF IN>1 GOTO 3339: PH=-PH: GOTO 5559
3339 IF ABS((C-B)/(B))<EP GOTO 4449: PH=PH/2
5559 B=C: GOTO 2229
4449 PH=PHN: B=C: IF NN<NP GOTO 1119
3012 AMIN=B: PH=PHN: NEXT IIN: FOR I=LMI TO NP STEP LH
XP(I)=XPN(I): NEXT: END SUB
SUB DET(XP(50),ST(50),XI)
SHARED SE(),DS(),DE(),NT

```

```

S=0: CALL SEC(XP(),ST()): FOR I=1 TO NT
DS(I)=((ST(I)-SE(I))/0.025/SE(I))^2: S=S+DS(I)
NEXT: XI=S/NT: END SUB
SUB SEC(XP(50),S(50))
SHARED FP(), FPI(), EP(), F0(), FOI(), E0(), FM(), FMI(), EM(),
FS(), FSI(), ES(), T20(), T22(), T21()
SHARED SS,GG,PI,LN,LV,LH,NT,POL(),TT(),NP
DIM S0(20),P(20),P1(20),P2(20)
FOR I=LN TO LV STEP LH: FP(I)=XP(I): NEXT
FOR I=LN TO LV-1 STEP LH: F0(I+1)=XP(I+LV+1): NEXT
FOR I=LN TO LV-1 STEP LH: FM(I+1)=XP(I+2*LV+1): NEXT
FOR I=LN TO LV STEP LH: FS(I)=XP(I+3*LV+1): NEXT
F0(0)=FP(0): FM(0)=FP(0): FOR I=LN TO LV STEP LH
FPI(I)=XP(I+4*LV+2)
NEXT: FOR I=LN TO LV-1 STEP LH: FOI(I+1)=XP(I+5*LV+3)
NEXT: FOR I=LN TO LV-1 STEP LH: FMI(I+1)=XP(I+6*LV+3)
NEXT: FOR I=LN TO LV STEP LH: FSI(I)=XP(I+7*LV+3)
NEXT: F0I(0)=FPI(0): FMI(0)=FPI(0): FOR L=LN TO LV STEP LH
EP(L)=EXP(-2*FPI(L)): EM(L)=EXP(-2*FMI(L))
E0(L)=EXP(-2*FOI(L)): ES(L)=EXP(-2*FSI(L)): NEXT
CALL CULFAZ(GG,S0()): FOR I=1 TO NT STEP 1
T=TT(I)*PI/180: X=COS(T)
CALL CULAMP(X,GG,S0(),RECUL,AMCUL)
CALL POLLEG(X,LV,P()): CALL FUNLEG1(X,LV,P1())
CALL FUNLEG2(X,LV,P2()): RES=0: AMS=0: REA=0: AMA=0
REB=0: AMB=0: REC=0: AMC=0: RED=0: AMD=0: REE=0:
AME=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: FP=2*FP(L): FM=2*FM(L):
F0=2*F0(L)
SL=2*S0(L): C=COS(SL): S=SIN(SL): FS=2*FS(L)
ALS=ES(L)*COS(FS)-1: BS=ES(L)*SIN(FS)
RES=RES+(2*L+1)*(BS*C+ALS*S)*P(L)
AMS=AMS+(2*L+1)*(BS*S-ALS*C)*P(L)
AL1P=EP(L)*COS(FP)-1: AL2P=EP(L)*SIN(FP)
AL1M=EM(L)*COS(FM)-1: AL2M=EM(L)*SIN(FM)
AL10=E0(L)*COS(F0)-1: AL20=E0(L)*SIN(F0)
A1=(L+1)*AL1P+L*AL1M: A2=(L+1)*AL2P+L*AL2M
REA=REA+(A2*C+A1*S)*P(L): AMA=AMA+(A2*S-A1*C)*P(L)
B1=(L+2)*AL1P+(2*L+1)*AL10+(L-1)*AL1M
B2=(L+2)*AL2P+(2*L+1)*AL20+(L-1)*AL2M
REB=REB+(B2*C+B1*S)*P(L)/2: AMB=AMB+(B2*S-B1*C)*P(L)/2
IF L<1 GOTO 2111: C1=AL1P-AL1M: C2=AL2P-AL2M
CC1=1/(SQR(2)): REC=REC+(C2*C+C1*S)*P1(L)*CC1
AMC=AMC+(C2*S-C1*C)*P1(L)*CC1: DD1=1/(SQR(2)*L*(L+1))

```

```

D1=L*(L+2)*AL1P-(2*L+1)*AL10-(L^2-1)*AL1M
D2=L*(L+2)*AL2P-(2*L+1)*AL20-(L^2-1)*AL2M
RED=RED+(D2*C+D1*S)*P1(L)*DD1
AMD=AMD+(D2*S-D1*C)*P1(L)*DD1
2111 IF L<2 GOTO 2222: EE1=1/(2*L*(L+1))
E1=L*AL1P-(2*L+1)*AL10+(L+1)*AL1M
E2=L*AL2P-(2*L+1)*AL20+(L+1)*AL2M
REE=REE+(E2*C+E1*S)*P2(L)*EE1
AME=AME+(E2*S-E1*C)*P2(L)*EE1
2222 NEXT L: RES=RECU+RES: AMS=AMCUL+AMS
SES=10*(RES^2+AMS^2)/4/SS^2
REA=RECU+REA: AMA=AMCUL+AMA: REB=RECU+REB
AMB=AMCUL+AMB: AA=REA^2+AMA^2: BB=REB^2+AMB^2
CC=RECU^2+AMC^2: DD=RED^2+AMD^2: EE=REE^2+AME^2
SET=10*(AA+2*(BB+CC+DD+EE))/4/SS^2/3:
S(I)=3/4*SET+1/4*SES
POL(TT)=SQR(2/3)*SQR(3/2)*2*SQR(2)/3*(AMA*REC-
REA*AMC+AMB*RED-REB*AMD+AMD*REE-RED*AME)/SEC
T20(TT)=1/SQR(2)*(1-(AA+2*DD)/SEC)
T22(TT)=1/SQR(3)*(2*(REB*REE+AMB*AME)-CC)/SEC
T21(TT)=-SQR(2/3)*(REA*REC+AMA*AMC-REB*RED-
AMB*AMD+RED*REE+AMD*AME)/SEC: NEXT I: END SUB
SUB CULAMP(X,GG,S0(20),RECU,AMCUL)
A=2/(1-X): S0=2*S0(0): BB=-GG*A: AL=GG*LOG(A)+S0
RECU=BB*COS(AL): AMCUL=BB*SIN(AL): END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
NEXT: END SUB
SUB FUNLEG1(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): FOR I=2 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-1)*P(I-1)-I/(I-1)*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB FUNLEG2(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=0: P(2)=3*ABS(1-X^2): FOR I=3 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-2)*P(I-1)-(I+1)/(I-2)*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB CULFAZ(G,F(20))
C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A
NEXT: FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ
FOR I=1 TO 20: F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB

```

Приведем результаты контрольного счета по этой программе для рассеяния в системе $r^3\text{He}$ при энергии 11.48 МэВ, которая рассматривалась в предыдущей главе. Экспериментальные сечения определялись в работе [211], а фазовый анализ выполнен в работе

[212] (фазы приводились в шестой главе).

В последней работе для χ^2 приведена величина 0.45, полученная для найденных фаз рассеяния с учетом спин - орбитального взаимодействия и синглет - триплетного смешивания состояний. В предыдущей главе, с этими фазами, мы получили для χ^2 значение 0.74 при учете только спин - орбитального взаимодействия.

Посмотрим теперь насколько можно улучшить величину χ^2 , используя только спин - орбитальное расщепление фаз рассеяния. Выполняя варьирование исходных фаз из [212] по нашей программе с одной итерацией, получим

$\chi^2 = 0.316$				$\sigma_s = 1148.53$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
27.64	223.10	228.88	1.07	125.27	20.26	20.12	0.08
31.97	222.00	222.71	0.02	133.48	32.21	32.19	0.00
36.71	211.90	211.32	0.01	140.79	45.95	46.51	0.24
82.53	54.27	53.82	0.11	147.21	58.82	60.64	1.53
90.00	36.76	36.65	0.01	153.90	75.46	75.48	0.00
96.03	25.70	25.93	0.13	162.14	92.72	91.71	0.19
103.80	16.78	16.66	0.08	165.67	97.70	97.37	0.02
110.55	13.21	13.07	0.19	166.59	101.10	98.68	0.92

	δ^+	δ^0	δ^-	δ_s
L = 0	-87.948	-87.948	-87.948	-86.224
L = 1	+66.540	+48.926	+44.300	+22.838
L = 2	+3.220	+2.452	+2.716	-18.511

Видно, что удается заметно улучшить описание экспериментальных данных даже при не большом изменении исходных фаз рассеяния. Выполним теперь варьирование фаз с 10 итерациями.

$\chi^2 = 0.291$				$\sigma_s = 1141.38$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
27.64	223.10	226.09	0.29	125.27	20.26	20.10	0.10
31.97	222.00	220.17	0.11	133.48	32.21	32.18	0.00
36.71	211.90	209.07	0.29	140.79	45.95	46.52	0.24
82.53	54.27	53.69	0.19	147.21	58.82	60.66	1.56
90.00	36.76	36.61	0.03	153.90	75.46	75.51	0.00
96.03	25.70	25.93	0.12	162.14	92.72	91.78	0.16
103.80	16.78	16.67	0.07	165.67	97.70	97.45	0.01
110.55	13.21	13.07	0.19	166.59	101.10	98.76	0.86

	δ^+	δ^0	δ^-	δ_s
L = 0	-87.948	-87.948	-87.948	-86.224
L = 1	+65.900	+48.503	+44.087	+22.838
L = 2	+2.602	+2.788	+2.896	-18.511

И в этом случае небольшое изменение фаз приводит к уменьшению величины χ^2 .

7.4 Частицы с полуцелым спином и синглет - триплетным смешиванием

Система с полуцелым спином и триплет - синглетным смешиванием была рассмотрена в предыдущей главе, и здесь мы приведем только программу фазового анализа с учетом синглет - триплетного смешивания состояний [234].

REM *** ПРОГРАММА ФАЗОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ЗНе-Р 11.48 ****

```

CLS:DEFDBL A-Z:DEFINT I,L,J,N,M,K
DIM SE(50), ST(50), DS(50), FP(50), F0(50), FM(50), FS(50), FT(50),
TT(50)
DIM XP(50), DE(50), POL(50), FPI(50), F0I(50), FMI(50), FSI(50),
EPS(50)
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *****
G$="C:\BASICA\FAZ-ALN.DAT": PI=4*ATN(1.): Z1=1: Z2=2
AM1=1: AM2=3: AM=AM1+AM2: P1=3.14159265: A1=41.4686
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): B1=2*PM/A1: LMI=0: LH=1: LMA=2
LN=LMI: LV=LMA: EPP=1.0D-05: NV=1: FH=.1: NI=10:
NPP=2*LMA
REM ***** НАЧАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ АЛЬФА *****
REM ***** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION 11.48 *****
SE(1)=223.1: SE(2)=222: SE(3)=211.9: SE(4)=54.27: SE(5)=36.76
SE(6)=25.7: SE(7)=16.78: SE(8)=13.21: SE(9)=13.21: SE(10)=20.26
SE(11)=32.21: SE(12)=45.95: SE(13)=58.82: SE(14)=75.46
SE(15)=92.72: SE(16)=97.7: SE(17)=101.1
TT(1)=27.64: TT(2)=31.97: TT(3)=36.71: TT(4)=82.53
TT(5)=90: TT(6)=96.03: TT(7)=103.8: TT(8)=110.55
TT(9)=116.57: TT(10)=125.27: TT(11)=133.48
TT(12)=140.79: TT(13)=147.21: TT(14)=153.9
TT(15)=162.14: TT(16)=165.67: TT(17)=166.59: NT=17
REM ***** FOR P-3HE ON E=11.48 *****
FP(0)=-88.8: FPI(0)=1: FP(1)=66.7: FPI(1)=1
FP(2)=3.0: FPI(2)=1: FP(3)=.0: FPI(3)=1
F0(0)=FP(0): F0I(0)=1: F0(1)=49.4: F0I(1)=1

```

```

F0(2)=2.5:   F0I(2)=1: F0(3)=.0:   F0I(3)=1
FM(0)=FP(0): FMI(0)=1: FM(1)=44.3:   FMI(1)=1
FM(2)=2.:   FMI(2)=1: FM(3)=.0:   FMI(3)=1
FS(0)=-84.6: FSI(0)=1: FS(1)=21.4:   FSI(1)=1
FS(2)=-18.6: FSI(2)=1: FS(3)=.0:   FSI(3)=1: EPS(1)=-11.2
REM ***** TRANSFORM TO RADIANS *****
FOR L=LN TO LV STEP LH
FM(L)=FM(L)*PI/180: FP(L)=FP(L)*PI/180
F0(L)=F0(L)*PI/180: EPS(L)=EPS(L)*PI/180
FMI(L)=FMI(L)*PI/180: FPI(L)=FPI(L)*PI/180
F0I(L)=F0I(L)*PI/180: FS(L)=FS(L)*PI/180
FSI(L)=FSI(L)*PI/180: EP(L)=EXP(-2*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2*FMI(L)): E0(L)=EXP(-2*F0I(L))
ES(L)=EXP(-2*FSI(L)): NEXT
REM *****
FH=FH*PI/180: NP=9*LMA+4: REM Для комплексных фаз рассеяния
NP=5*LMA+2: REM Для действительных фаз рассеяния
IF NP>(5*LMA+2) GOTO 9988: FOR L=LN TO LV STEP LH
FMI(L)=0: FPI(L)=0: F0I(L)=0: FSI(L)=0: NEXT
9988 FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I)=FP(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+LMA+1)=F0(I+1)
NEXT: FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+2*LMA+1)=FM(I+1)
NEXT: FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+3*LMA+1)=FS(I)
NEXT: FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+4*LMA+2)=EPS(I)
NEXT: FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+5*LMA+3)=FPI(I)
NEXT: FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+6*LMA+4)=F0I(I+1)
NEXT: FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: XP(I+7*LMA+4)=FMI(I+1)
NEXT: FOR I=LMI TO LMA STEP LH: XP(I+8*LMA+4)=FSI(I):
NEXT
REM ***** TRANSFORM TO C.M. *****
EL=11.48: EC=EL*PM/AM1
SK=EC*B1: SS=SQR(SK): GG=3.44476E-02*Z1*Z2*PM/SS
CALL VAR(ST(),FH,LMA,NI,XP(),EPP,XI,NV): CLS
PRINT: PRINT "                XI-KV=";: PRINT USING "#####.###"
";XI
REM ***** TOTAL CROSS SECTION *****
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FP(I)=XP(I): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: F0(I+1)=XP(I+LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH: FM(I+1)=XP(I+2*LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: FS(I)=XP(I+3*LMA+1): NEXT
FOR I=LMI TO LMA STEP LH: EPS(I)=XP(I+4*LMA+2): NEXT
F0(0)=FP(0): FM(0)=FP(0): FOR I=LMI TO LMA STEP LH

```

```

FPI(I)=XP(I+5*LMA+3): NEXT: FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH
FOI(I+1)=XP(I+6*LMA+4): NEXT: FOR I=LMI TO LMA-1 STEP LH
FMI(I+1)=XP(I+7*LMA+4): NEXT: FOR I=LMI TO LMA STEP LH
FSI(I)=XP(I+8*LMA+4): NEXT: FOI(0)=FPI(0): FMI(0)=FPI(0)
FOR L=LN TO LV STEP LH: EP(L)=EXP(-2*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2*FMI(L))
E0(L)=EXP(-2*FOI(L)): ET(L)=EXP(-2*FTI(L)): ES(L)=EXP(-
2*FSI(L))
NEXT: SRT=0: SRS=0: SST=0: SSS=0: FOR L=LN TO LV STEP
LH
AP=FP(L): AM=FM(L): A0=F0(L): ASS=FS(L)
L1=2*L+3: L2=2*L+1: L3=2*L-1
SRT=SRT+L1*(1-EP(L)^2)+L2*(1-E0(L)^2)+L3*(1-EM(L)^2)
SRS=SRS+L2*(1-ES(L)^2)
SST=SST+L1*EP(L)^2*SIN(AP)^2+L2*E0(L)^2*SIN(A0)^2+L3*EM(
L)^2*SIN(AM)^2: SSS=SSS+L2*ES(L)^2*SIN(ASS)^2: NEXT L
SRT=10*PI*SRT/SK/3: SRS=10*PI*SRS/SK
SIGR=1/4*SRS+3/4*SRT: SST=10*4*PI*SST/SK/3
SSS=10*4*PI*SSS/SK: SIGS=1/4*SSS+3/4*SST
PRINT " SIGMR-TOT=":; PRINT USING " #####.##
";SIGR
PRINT " SIGMS-TOT=":; PRINT USING " #####.##
";SIGS
PRINT " T SE ST XI T SE ST XI"
FOR I=1 TO NT/2
PRINT USING " #####.## ";TT(I); SE(I); ST(I); DS(I), TT(I+8);
SE(I+8); ST(I+8); DS(I+8): NEXT I: PRINT " L FP F0
FM FS EPS"
FOR L=LMI TO LMA STEP LH
FM(L)=FM(L)*180/PI: FP(L)=FP(L)*180/PI
FMI(L)=FMI(L)*180/PI: FPI(L)=FPI(L)*180/PI
F0(L)=F0(L)*180/PI: FOI(L)=FOI(L)*180/PI
FS(L)=FS(L)*180/PI: FSI(L)=FSI(L)*180/PI
EPS(L)=EPS(L)*180/PI
PRINT USING "+###.### ";L;FP(L);F0(L);FM(L);FS(L);EPS(L)
PRINT USING "+###.### ";L;FPI(L);FOI(L);FMI(L);FSI(L): NEXT
INPUT A: IF A=0 GOTO 1111: CLS: PRINT " T POL T
POL "
FOR I=1 TO NT/2: PRINT USING " #####.##
";TT(I);POL(I);TT(I+8);POL(I+8)
NEXT I: GOTO 1111: OPEN "O",1,G$
PRINT#1, " P - 3He FOR LAB E=";
PRINT#1, EC: FOR T=TMI TO TMA STEP TH
PRINT#1, USING " #.#####^ ^ ^ ";T;ST(T): NEXT

```

```

1111 END
SUB VAR(ST(50),PHN,LMA,NI,XP(50),EP,AMIN,NV)
DIM XPN(50): SHARED LH,LMI,NT,PI,DS(),NP,NPP
REM ***** ПОИСК МИНИМУМА *****
FOR I=LMI TO NP STEP LH: XPN(I)=XP(I): NEXT
NN=LMI: PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN)*180/PI
PH=PHN: CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA: IF NV=0 GOTO
3012
PRINT USING "      +#.#####^ ^ ^ ";ALA
PRINT "-----"
REM -----
FOR IIN=1 TO NI: NN=-LH: PRINT USING "      +#.#####^ ^ ^
";ALA;IIN
GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH: IN=0
2229 A=B: XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
IF NN<(5*LMA+3) GOTO 7777
IF XPN(NN)<0 GOTO 1159
7777 IN=IN+1
REM -----
CALL DET(XPN(),ST(),ALA): B=ALA: GOTO 5678
PRINT USING " ### ";NN;
PRINT USING " +###.##### ";XPN(NN)*180/PI;
PRINT USING "      +#.#####^ ^ ^ ";ALA;: PRINT
5678 REM -----
IF B<A GOTO 2229: C=A: XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF IN>1 GOTO 3339: PH=-PH: GOTO 5559
3339 IF ABS((C-B)/ABS(B))<EP GOTO 4449: PH=PH/2
5559 B=C: GOTO 2229
4449 PH=PHN: B=C: IF NN<NP GOTO 1119
3012 AMIN=B: PH=PHN: NEXT IIN: FOR I=LMI TO NP STEP LH
XP(I)=XPN(I): NEXT: END SUB
SUB DET(XP(50),ST(50),XI)
SHARED SE(),DS(),DE(),NT
S=0: CALL SEC(XP(),ST()): FOR I=1 TO NT
DS(I)=(ST(I)-SE(I))/0.025/SE(I)^2: S=S+DS(I): NEXT
XI=S/NT: END SUB
SUB SEC(XP(50),S(50))
SHARED SS,GG,PI,LN,LV,LH,NT,POL(),TT()
DIM S0(20),P(20),P1(20),P2(20)
FOR I=LN TO LV STEP LH: FP(I)=XP(I): NEXT
FOR I=LN TO LV-1 STEP LH: F0(I+1)=XP(I+LV+1): NEXT

```

```

FOR I=LN TO LV-1 STEP LH: FM(I+1)=XP(I+2*LV+1): NEXT
FOR I=LN TO LV STEP LH: FS(I)=XP(I+3*LV+1): NEXT
FOR I=LN TO LV STEP LH: EPS(I)=XP(I+4*LV+2): NEXT
F0(0)=FP(0): FM(0)=FP(0): FOR I=LN TO LV STEP LH
FPI(I)=XP(I+5*LV+3): NEXT: FOR I=LN TO LV-1 STEP LH
FOI(I+1)=XP(I+6*LV+4): NEXT: FOR I=LN TO LV-1 STEP LH
FMI(I+1)=XP(I+7*LV+4): NEXT: FOR I=LN TO LV STEP LH
FSI(I)=XP(I+8*LV+4): NEXT: FOI(0)=FPI(0): FMI(0)=FPI(0)
FOR L=LN TO LV STEP LH? EP(L)=EXP(-2*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2*FMI(L)): E0(L)=EXP(-2*FOI(L))
ES(L)=EXP(-2*FSI(L)): NEXT: CALL CULFAZ(GG,S0())
FOR I=1 TO NT STEP 1: T=TT(I)*PI/180: X=COS(T)
CALL CULAMP(X,GG,S0(),RECU,AMCU)
CALL POLLEG(X,LV,P()): CALL FUNLEG1(X,LV,P1())
CALL FUNLEG2(X,LV,P2()): REA=0: AMA=0: REB=0: AMB=0
REC=0: AMC=0: RED=0: AMD=0: REE=0
AME=0: RRG=0: AAG=0: REH=0: AMH=0: REF=0: AMF=0
FOR L=LN TO LV STEP LH: FP=2*FP(L): FM=2*FM(L):
F0=2*F0(L)
SL=2*S0(L): C=COS(SL): S=SIN(SL): FS=2*FS(L)
SO=SIN(EPS(L))^2: CO=COS(EPS(L))^2
AL1P=EP(L)*COS(FP)-1: AL2P=EP(L)*SIN(FP)
AL1M=EM(L)*COS(FM)-1: AL2M=EM(L)*SIN(FM)
AL10=SO*ES(L)*COS(FS)+CO*E0(L)*COS(F0)-1
AL20=SO*ES(L)*SIN(FS)+CO*E0(L)*SIN(F0)
A1=(L+2)*AL1P+(2*L+1)*AL10+(L-1)*AL1M
A2=(L+2)*AL2P+(2*L+1)*AL20+(L-1)*AL2M
REA=REA+(A1*C-A2*S)*P(L)/2:
AMA=AMA+(A1*S+A2*C)*P(L)/2
ALS=CO*ES(L)*COS(FS)+SO*E0(L)*COS(F0)-1
BS=CO*ES(L)*SIN(FS)+SO*E0(L)*SIN(F0)
RES=(2*L+1)*(ALS*C-BS*S): AMS=(2*L+1)*(ALS*S+BS*C)
B1=(L+1)*AL1P+L*AL1M: B2=(L+1)*AL2P+L*AL2M
REB=REB+(B1*C-B2*S+RES)*P(L)/2
AMB=AMB+(B1*S+B2*C+AMS)*P(L)/2
REC=REC+(B1*C-B2*S-RES)*P(L)/2
AMC=AMC+(B1*S+B2*C-AMS)*P(L)/2: IF L<1 GOTO 1211
SI2=1/2*SIN(2*EPS(L)): AL1=SI2*(ES(L)*COS(FS)-
E0(L)*COS(F0))
AL2=SI2*(ES(L)*SIN(FS)-E0(L)*SIN(F0))
RE1=(2*L+1)*(AL2*C+AL1*S)/SQR(L*(L+1))
AM1=(2*L+1)*(AL2*S-AL1*C)/SQR(L*(L+1))
C1=AL1P-AL1M: C2=AL2P-AL2M
RED=RED+(C2*C+C1*S-RE1)*P1(L)/2

```

```

AMD=AMD+(C2*S-C1*C-AM1)*P1(L)/2
REE=REE+(C2*C+C1*S+RE1)*P1(L)/2
AME=AME+(C2*S-C1*C+AM1)*P1(L)/2
D1=(L+2)/(L+1)*AL1P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL10-(L-1)/L*AL1M
D2=(L+2)/(L+1)*AL2P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL20-(L-1)/L*AL2M
RRG=RRG+(D2*C+D1*S-RE1)*P1(L)/2
AAG=AAG+(D2*S-D1*C-AM1)*P1(L)/2
REH=REH+(D2*C+D1*S+RE1)*P1(L)/2
AMH=AMH+(D2*S-D1*C+AM1)*P1(L)/2
1211 IF L<2 GOTO 2122
F1=1/(L+1)*AL1P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL10+AL1M/L
F2=1/(L+1)*AL2P-(2*L+1)/(L*(L+1))*AL20+AL2M/L
REF=REF+(F2*C+F1*S)*P2(L)/2
AMF=AMF+(F2*S-F1*C)*P2(L)/2
2122 NEXT L: REA=RECU+REA: AMA=AMCU+AMA
REB=RECU+REB: AMB=AMCU+AMB
AA=REA^2+AMA^2: BB=REB^2+AMB^2
CC=REC^2+AMC^2: DD=RED^2+AMD^2
EE=REE^2+AME^2: FF=REF^2+AMF^2
HH=REH^2+AMH^2: GGG=RRG^2+AAG^2
SUM=AA+BB+CC+DD+EE+GGG+HH+FF
S(I)=10*SUM/2/SS^2/4: POL(I)= - 2*(REA*REE + AMA*AME +
REB*REH + AMB*AMH + REC*RRG + AMC*AAG + RED*REF +
AMD*AMF)/SUM
NEXT I: END SUB
SUB CULAMP(X,GG,S0(20),RECU,AMCU)
A=2/(1-X): S0=2*S0(0): BB=-GG*A: AL=GG*LOG(A)+S0
RECU=-BB*SIN(AL): AMCU=BB*COS(AL): END SUB
SUB POLLEG(X,L,P(20))
P(0)=1: P(1)=X: FOR I=2 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB FUNLEG1(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=SQR(ABS(1-X^2)): FOR I=2 TO L
P(I)=(2*I-1)*X/(I-1)*P(I-1)-I/(I-1)*P(I-2): NEXT: END SUB
SUB FUNLEG2(X,L,P(20))
P(0)=0: P(1)=0: P(2)=3*ABS(1-X^2)
FOR I=3 TO L: P(I)=(2*I-1)*X/(I-2)*P(I-1)-(I+1)/(I-2)*P(I-2): NEXT
END SUB
SUB CULFAZ(G,F(20))
C=0.577215665: S=0: N=50: A1=1.202056903/3: A2=1.036927755/5
FOR I=1 TO N: A=G/I-ATN(G/I)-(G/I)^3/3+(G/I)^5/5: S=S+A: NEXT
FAZ=-C*G+A1*G^3-A2*G^5+S: F(0)=FAZ
FOR I=1 TO 20: F(I)=F(I-1)+ATN(G/I): NEXT: END SUB

```

Приведем результаты контрольного счета по этой программе для рассеяния в системе $p^3\text{He}$ при энергии 11.48 МэВ. Экспериментальные сечения определялись в работе [211], а фазовый анализ выполнен в работе [212]. В последней работе для χ^2 приведена величина 0.45, полученная для найденных фаз рассеяния с учетом спин - орбитального взаимодействия и синглет - триплетного смешивания состояний. Для параметра смешивания было получено 11.2^0 .

По нашей программе [234] с такими фазами и триплет - синглетным смешиванием можно получить следующие результаты (они приведены в предыдущей главе, но для большей наглядности мы приводим из снова)

$\chi^2 = 0.294$				$\sigma_s = 1146.06$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
27.64	223.10	228.04	0.78	116.57	13.21	13.39	0.31
31.97	222.00	221.73	0.00	125.27	20.26	19.97	0.32
36.71	211.90	210.38	0.08	133.48	32.21	32.07	0.03
82.53	54.27	54.22	0.00	140.79	45.95	46.48	0.21
90.00	36.76	36.97	0.05	147.21	58.82	60.70	1.64
96.03	25.70	26.15	0.49	153.90	75.46	75.66	0.01
103.80	16.78	16.74	0.01	162.14	92.72	92.03	0.09
110.55	13.21	13.03	0.29	165.67	97.70	97.73	0.00

	δ^+	δ^0	δ^-	δ_s	ϵ
L = 0	-88.800	-88.800	-88.800	-84.600	+0.000
L = 1	+66.700	+49.400	+44.300	+21.400	-11.200
L = 2	+2.500	+2.500	+2.500	-18.600	+0.000

Найденное значение χ^2 меньше, приведенной в работе [212] величины 0.45, поскольку мы использовали среднее значение экспериментальных ошибок, приняв их равными 2.5%, а реально, некоторые из них доходят до 2.2%, увеличивая, тем самым, среднюю величину χ^2 . Если принять экспериментальную ошибку равной 2.2%, то для величины χ^2 получается 0.6 и среднее между этими значениями дает нам 0.45, в полном соответствии с результатами работы [212].

Посмотрим теперь насколько можно улучшить величину χ^2 , используя спин - орбитальное расщепление фаз рассеяния и синглет - триплетное смешивание. Выполняя варьирование исходных фаз из [212] по нашей программе с одной итерацией, получим

$$\chi^2 = 0.276 \qquad \sigma_s = 1141.87$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
27.64	223.10	226.64	0.40	116.57	13.21	13.42	0.39
31.97	222.00	220.49	0.07	125.27	20.26	19.99	0.29
36.71	211.90	209.27	0.25	133.48	32.21	32.06	0.03
82.53	54.27	53.95	0.06	140.79	45.95	46.43	0.17
90.00	36.76	36.80	0.00	147.21	58.82	60.60	1.47
96.03	25.70	26.06	0.31	153.90	75.46	75.51	0.00
103.80	16.78	16.71	0.03	162.14	92.72	91.83	0.15
110.55	13.21	13.04	0.27	165.67	97.70	97.52	0.01

	δ^+	δ^0	δ^-	δ_s	ϵ
L = 0	-88.800	-88.800	-88.800	-84.600	+0.000
L = 1	+66.060	+49.357	+44.300	+21.437	-11.317
L = 2	+2.548	+2.478	+2.500	-18.600	+0.000

Видно, что удается несколько улучшить описание экспериментальных данных при небольшом изменении исходных фаз рассеяния. Выполним теперь варьирование исходных фаз с 10 итерациями

$\chi^2 = 0.274$				$\sigma_s = 1142.47$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2	θ	σ_e	σ_t	χ^2
27.64	223.10	226.61	0.40	116.57	13.21	13.41	0.38
31.97	222.00	220.52	0.07	125.27	20.26	19.98	0.31
36.71	211.90	209.32	0.24	133.48	32.21	32.05	0.04
82.53	54.27	53.95	0.06	140.79	45.95	46.42	0.17
90.00	36.76	36.81	0.00	147.21	58.82	60.61	1.47
96.03	25.70	26.06	0.32	153.90	75.46	75.52	0.00
103.80	16.78	16.72	0.02	162.14	92.72	91.86	0.14
110.55	13.21	13.04	0.26	165.67	97.70	97.55	0.00

	δ^+	δ^0	δ^-	δ_s	ϵ
L = 0	-88.800	-88.800	-88.800	-84.563	+0.000
L = 1	+65.900	+49.357	+44.455	+21.736	-12.080
L = 2	+2.618	+2.504	+2.579	-18.632	+0.000

Из приведенных результатов видно, что дополнительное варьирование фаз позволяет выполнять минимизацию функционала χ^2 в поле нескольких параметров - фаз ядерного рассеяния и, найдя другие варианты для фаз, получить несколько лучшее согласие расчетных дифференциальных сечений с экспериментальными данными.

Таким образом, были протестированы все программы для фазового анализа и получено хорошее согласие с более ранними ре-

зультатами других авторов.

На их основе получены новые физические результаты по фазовому анализу в упругом рассеянии ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ при энергиях 49.9 МэВ и некоторых других энергиях, которые хорошо описывают экспериментальные сечения упругого рассеяния и в целом согласуются с общим ходом фаз в этой области энергий.

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

В настоящей главе изложены математические и численные методы, используемые для решения задач ядерных фотопроцессов. В этом случае решается одно уравнение Шредингера, на основе этого решения находятся волновые функции системы и вычисляются матричные элементы фотопроцессов, которые определяют полные сечения фотоядерных реакций.

8.1 Векторные соотношения

Двухкластерная модель предполагает наличие только двух обособленных фрагментов - кластеров, между которыми перераспределены все нуклоны ядра. Первый кластер содержит M_1 нуклонов с зарядом Z_1 , второй M_2 с зарядом Z_2 . Векторная схема кластерной модели приведена на рисунке 8.1. Межкластерное расстояние R определяет относительное положение центров масс фрагментов. Радиусы ρ_i и ρ_j задают положение каждого нуклона в первом и втором кластерах относительно их центров.

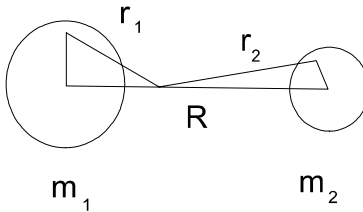


Рисунок 8.1 - Векторная схема кластерной модели.

Радиусы r_i и r_j указывают положение каждого нуклона в обоих кластерах относительно общего центра масс ядра. Векторы R_1 и R_2 определяют положение центров масс кластеров относительно их общего центра масс.

При таком определении радиус - векторов, между ними существуют простые соотношения:

$$\sum r_k = \sum r_i + \sum r_j = 0, \quad \sum \rho_i = \sum \rho_j = 0,$$

$$r_i = R_1 + \rho_i = RM_2/M + \rho_i, \quad r_j = R_2 + \rho_j + RM_1/M - \rho_j,$$

$$R = R_1 - R_2,$$

$$R_1 = 1/M \sum_i r_i = \frac{M_2}{M} R,$$

$$R_2 = 1/M \sum_j r_j = -\frac{M_1}{M} R, \quad (8.1)$$

$$1 < i < M_1, \quad M_1 + 1 < j < M, \quad 1 < k < M,$$

$$M = M_1 + M_2, \quad Z = Z_1 + Z_2, \quad \mu = M_1 M_2 / M.$$

Эти векторные соотношения будут использоваться в дальнейшем для вычисления различных ядерных характеристик в двухкластерной модели.

Рассмотрим, например, вывод формулы для среднеквадратичного зарядового радиуса ядра, который определяется следующим образом

$$\langle r^2 \rangle = \langle \Psi | r^2 | \Psi \rangle.$$

В кластерной модели квадрат радиус - вектора может быть представлен в виде

$$r^2 = 1/M \sum_k r_k^2.$$

Таким же образом определим зарядовые радиусы кластеров

$$\langle r^2 \rangle_{1,2} = \langle \Psi(1,2) | \frac{1}{M_{1,2}} \sum_n \rho_n^2(1,2) | \Psi(1,2) \rangle,$$

где 1,2 - первый или второй кластер, а индекс n определяет суммирование по i или j. Используя теперь выражения (8.1), устанавливающие связь между межкластерным расстоянием и векторами r_k

$$r^2 = 1/M \sum r_i^2 + 1/M \sum r_j^2 = 1/M \sum \rho_i^2 + 1/M \sum \rho_j^2 + \mu/M R^2,$$

для радиуса ядра в кластерной модели с волновыми функциями (2.3) получим окончательное выражение

$$R_r^2 = \frac{M_1}{M} \langle r^2 \rangle_1 + \frac{M_2}{M} \langle r^2 \rangle_2 + \frac{M_1 M_2}{M^2} I_2, \quad (8.2)$$

где

$$I_2 = \langle \Phi(R) | R^2 | \Phi(R) \rangle$$

матричный элемент по радиальным волновым функциям относительного движения кластеров от квадрата межкластерного расстояния.

Таким образом, радиус ядра в кластерной модели может быть легко выражен через радиусы кластеров и эффективное межкластерное расстояние. Аналогичным образом можно использовать векторные соотношения кластерной модели при выводе формул для формфакторов, квадрупольных, магнитных моментов ядер, матричных элементов ядерных реакций, в частности процессов фоторазвала или радиационного захвата ассоциаций и т.д.

Рассмотрим далее методы вычисления полных сечений ядерных фотопроцессов, а также характеристик связанных состояний кластеров в ядре для чисто центральных межкластерных потенциалов. Затем перейдем к учету тех эффектов, которые дают тензорные взаимодействия в двухчастичной системе, и приведем некоторые основные формулы для рассмотрения сечений рассеяния и реакций в супермультиплетном приближении, которое используется для анализа взаимодействий легчайших кластерных систем.

8.2 Фоторазвал и радиационный захват

Одной из самых интересных ядерных реакций является процесс ядерного фоторазвала или обратная ему реакция - радиационного захвата. Налетающая частица - фотон не вступает в сильные ядерные взаимодействия с ядром мишенью. Происходит только электромагнитное взаимодействие, операторы которого точно известны. Поэтому можно учитывать только ядерные взаимодействия связанных кластеров, что существенно упрощает рассмотрение по сравнению с трехтельной задачей, когда, наряду с межкластерными силами, нужно включать и ядерное взаимодействие налетающей частицы [235,236, 237,238,239,240,241,242,243].

Общие методы расчета сечений подобных процессов подробно изложены в прекрасной монографии [244]. Поэтому далее будем исходить из уже известных определений дифференциальных сечений радиационных и фотоядерных процессов. Для расчетов сечений радиационного захвата в длинноволновом приближении будем использовать известное выражение [244,245]

$$\frac{d\sigma_c(N)}{d\Omega} = \frac{K\mu}{2\pi \hbar^2 q} \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \sum_{m_i, m_f, \lambda} |M_{J\lambda}(N)|^2, \quad (8.3)$$

где $N = E$ - электрические или M - магнитные переходы и

$$M_{J\lambda}(N) = \sum_J i^J \sqrt{2\pi (2J+1)} \frac{K^J}{(2J+1)!!} \left[\frac{J+1}{J} \right]^{1/2} \times$$

$$\lambda \sum_m D_{m\lambda}^J \langle f | H_{Jm}(N) | i \rangle,$$

$$H_{Jm}(E) = Q_{Jm}(L) + Q_{Jm}(S),$$

$$H_{Jm}(M) = W_{Jm}(L) + W_{Jm}(S),$$

$$Q_{Jm}(L) = e \sum_i Z_i r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i),$$

$$Q_{Jm}(S) = -\frac{e \hbar}{m_0 c} K \left[\frac{J}{J+1} \right]^{1/2} \sum_i \mu_i \hat{S}_i r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i),$$

$$W_{Jm}(L) = i \frac{e \hbar}{m_0 c} \frac{1}{(J+1)} \sum_i \frac{Z_i}{M_i} \hat{L}_i \nabla_i (r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i)),$$

$$W_{Jm}(S) = i \frac{e \hbar}{m_0 c} \sum_i \mu_i \hat{S}_i \nabla_i (r_i^J Y_{Jm}(\Omega_i)).$$

Здесь J - мультипольность, q - волновое число относительного движения кластеров, $D_{m\lambda}^J$ - функция Вигнера, μ - приведенная масса, M_i , Z_i , S_i и S_i - массы, заряды, спины и орбитальные моменты i - го кластера, μ_i - магнитные моменты кластеров, K - волновое число фотона, m_0 - масса нуклона.

Знак оператора $Q_{Jm}(S)$ выбран отрицательным, как приведено в работе [114]. Интегрируя по углам и суммируя это выражение по λ , для полного сечения захвата получаем [19,213,246]

$$\sigma_c(J) = \frac{8\pi K^{2J+1}}{\hbar^2 q} \frac{\mu}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \frac{J+1}{J[(2J+1)!!]^2} \sum_{m, m_i, m_f} \left| M_{Jm}(N) \right|^2,$$

$$M_{Jm}(N) = i^J \langle f | H_{Jm}(N) | i \rangle. \quad (8.4)$$

В кластерной модели электромагнитные операторы принимают простой вид

$$Q_{Jm}(L) = e \mu^J \left[\frac{Z_1}{M_1^J} + (-1)^J \frac{Z_2}{M_2^J} \right] R^J Y_{Jm} = A_J R^J Y_{Jm},$$

$$\begin{aligned}
 Q_{Jm}(S) &= -\frac{e\hbar}{m_0 c} K \left[\frac{J}{J+1} \right]^{1/2} \left[\mu_1 \hat{S}_1 \frac{M_2^J}{M^J} + (-1)^J \mu_2 \hat{S}_2 \frac{M_1^J}{M^J} \right] R^J Y_{Jm} = \\
 &= (B_{1J} \hat{S}_1 + B_{2J} \hat{S}_2) R^J Y_{Jm}, \\
 W_{Jm}(L) &= i \frac{e\hbar}{m_0 c} \frac{\sqrt{J(2J+1)}}{J+1} \left[\frac{Z_1}{M_1} \frac{M_2^J}{M^J} + (-1)^{J-1} \frac{Z_2}{M_2} \frac{M_1^J}{M^J} \right] R^{J-1} \hat{L} Y_{Jm}^{J-1} = \\
 &= C_J R^{J-1} \hat{L} Y_{Jm}^{J-1}, \\
 W_{Jm}(S) &= i \frac{e\hbar}{m_0 c} \sqrt{J(2J+1)} \left[\mu_1 \hat{S}_1 \frac{M_2^{J-1}}{M^{J-1}} + (-1)^{J-1} \mu_2 \hat{S}_2 \frac{M_1^{J-1}}{M^{J-1}} \right] R^{J-1} Y_{Jm}^{J-1} = \\
 &= (D_{1J} \hat{S}_1 + D_{2J} \hat{S}_2) R^{J-1} Y_{Jm}^{J-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь R - межкластерное расстояние и M - масса ядра. Используем в дальнейшем волновые функции связанных состояний кластеров в обычной форме [19,213]

$$|f\rangle = \Psi_f = \sum_{L_f J_f} R_{L_f J_f} \Phi_{J_f m_f}^{L_f S}, \quad R_{LJ} = \frac{U_{LJ}}{r}. \quad (8.5)$$

Функцию рассеяния запишем в виде разложения по спин - угловым функциям [19,213]

$$|i\rangle = \Psi_i = \frac{1}{q} \sum_{L_i J_i} i^{L_i} \sqrt{4\pi(2L_i+1)} (L_i 0 S m_i | J_i m_i) e^{i\delta_{L_i J_i}} R_{L_i J_i} \Phi_{J_i m_i}^{L_i S}. \quad (8.6)$$

Здесь R_{LJ} - радиальная волновая функция рассеяния, получаемая из решения уравнения Шредингера (В.4) с заданными межкластерными потенциалами, Φ_{Jm}^{LS} - спин - угловая функция начального i состояния системы, δ_{LJ} - фазы упругого рассеяния [247].

Используя, приведенные в [120], известные формулы матричных элементов различных операторов, для полного сечения захвата можно получить окончательное выражение [19,213]

$$\sigma_c(J) = \frac{8\pi K^{2J+1}}{\hbar^2 q^3} \frac{\mu}{(2S_1+1)(2S_2+1) J[(2J+1)!!]^2} \sum_{\substack{L_i, L_f, \\ J_i, J_f}} \left| T_J(N) \right|^2, \quad (8.7)$$

где матричные элементы приобретают вид

$$\begin{aligned} T_J(E) &= A_J I_J P_J + (B_{1J} N_{1J} + B_{2J} N_{2J}) I_J, \\ T_J(M) &= C_J I_{J-1} G_J + (D_{1J} N_{1J} + D_{2J} N_{2J}) I_{J-1}, \\ P_J &= \sqrt{4\pi} \langle J_f L_f S \parallel Y_J \parallel J_i L_i S \rangle = (-1)^{J+S+L_i+L_f} (L_i 0 J 0 \mid L_f 0) \times \\ &\times \sqrt{(2J_i+1)(2J_f+1)(2J+1)(2L_i+1)} \begin{Bmatrix} L_i & S & J_i \\ J_f & J & L_f \end{Bmatrix}, \\ G_J &= \sqrt{4\pi} \langle J_f L_f S \parallel \hat{L} Y_J^k \parallel J_i L_i S \rangle = (-1)^{S+L_i+J_i} (L_i 0 k 0 \mid L_f 0) (2L_i+1) \times \\ &\times \sqrt{L_i(2L_i+1)(2k+1)(2J_i+1)(2J_f+1)(2J+1)} \begin{Bmatrix} L_i & 1 & L_i \\ k & L_f & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S & L_i & J_i \\ J & J_f & L_f \end{Bmatrix}, \\ N_J &= \sqrt{4\pi} \langle J_f L_f S \parallel \hat{S} Y_J^k \parallel J_i L_i S \rangle = (-1)^{k+1-J+L_i+L_f+2S-J_i-J_f} (L_i 0 k 0 \mid L_f 0) \times \\ &\times \begin{Bmatrix} S & 1 & S \\ L_i & k & L_f \\ J_i & J & J_f \end{Bmatrix} \sqrt{S(S+1)(2S+1)(2k+1)(2L_i+1)(2J_i+1)(2J_f+1)}, \end{aligned}$$

а I_J - радиальные интегралы от волновых функций

$$I_J = \langle J_f L_f \mid R^J \mid J_i L_i \rangle.$$

Сечение обратного процесса - фоторазвала можно получить из принципа детального равновесия [244]

$$\sigma_d(J) = \frac{q^2 (2S_1+1)(2S_2+1)}{K^2 2(2J_0+1)} \sigma_c(J), \quad (8.8)$$

где J_0 - полный момент ядра в основном состоянии.

В полученных выражениях аналитически вычисляются все величины, кроме радиальных интегралов, которые находятся численно по определенным из решения уравнения Шредингера волновым функциям связанных состояний и рассеяния. Асимптотика радиальной волновой функции рассеяния обычно представляется в виде

суперпозиции кулоновских F_L и G_L функций на границе области ядерного взаимодействия при $r = R$

$$R_{LJ} \rightarrow N[F_L(qr) \text{Cos}(\delta_{LJ}) + G_L(qr) \text{Sin}(\delta_{LJ})], \quad (8.9)$$

где δ_{LJ} - фазы рассеяния, N - нормировочная константа. Получив численную радиальную волновую функцию, из этого соотношения можно определить фазы рассеяния и нормировочную константу с данным орбитальным L и полным J моментами кластерной системы.

Приведенные выше выражения позволяют выполнять расчеты полных сечений ядерных фотопроцессов в кластерной модели ядра, когда известно межкластерное взаимодействие. Однако, ядерные потенциалы, как правило, неизвестны и приходится использовать различные дополнительные методы и предположения для их определения. Одним из таких методов является анализ фаз упругого рассеяния кластеров, который позволяет определять приближенный вид кластерных потенциалов. Обычно считается, что если потенциалы способны правильно передать экспериментальные фазы рассеяния, то они могут быть использованы для рассмотрения ядерных характеристик связанных состояний кластеров в ядре [248].

В дальнейшем, результаты таких расчетов, будут целиком зависеть от степени кластеризации ядра в рассматриваемый кластерный канал. Это предположение вытекает из общего принципа квантовой механики, который утверждает, что квантовая система должна иметь единый гамильтониан взаимодействия в дискретном и непрерывном спектре. Поэтому перейдем теперь к рассмотрению различных характеристик для связанных состояний, считая, что межкластерная волновая функция и потенциал взаимодействия в принципе известны или могут быть определены теми или иными методами [249].

8.3. Программа расчетов фотоядерных процессов

Приведем теперь саму программу [250] для расчета сечений электрических $E1$ процессов $n^6\text{Li}$ модели ядра ^7Li . Здесь используются следующие обозначения: $AM1, AM2, Z1, Z2$ - Массы и заряды частиц, $V0, R0, V00, R00$ - Параметры ядерных потенциалов, $RCU, L, L0, L2$ - Кулоновский радиус и орбитальные моменты, NN, NV, NH, EN, EH - Задание энергии для расчета фотосечений, SKN, HC - Интервал для поиска энергии связанного состояния, EP - Точность вычислений.

REM РАСЧЕТ СЕЧЕНИЙ ФОТОРАЗВАЛА ЯДРА ^7Li В ^6Li

КАНАЛ

```

DEFDBL A - Z: DEFNT I,J,K,L,N,M
DIM EL(50),F32(50),EG(50),F52(50),F72(50),SZ(50)
DIM S0(50),S2(50),SR(50),ЕСМ(50): NN=4000
DIM V(NN+1),U(NN+1),U0(NN+1)
REM *****
A$=" ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ФОТОЗАХВАТА "
B$="E(GAM) E(LAB) S(R) S(Z) S0 S2 "
C$=" Q R F FP G GP W": H$=" Z1 Z2 M1 M2 H N NM"
G$="C:\BASICA\FOTLI7N8.DAT":
GG$="C:\BASICA\IMPALT.DAT"
GGG$="C:\BASICA\WF - ALT.DAT": F$=" V R": F1$=" V3/2 R"
F2$=" V5/2 R": F0$=" VS R"
REM *****
PRINT: PRINT A$: PRINT
REM ***** ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ *****
NN=0: NV=50: NH=1: EN=0.1: EH=.5: AM1=1: AM2=6: Z1=0: Z2=3
PI=3.1415926535899: PM=AM1*AM2/(AM1+AM2): A1=41.4686
B1=2*PM/A1: AK1=1.439975*Z1*Z2*B1
GK=3.44476E - 02*Z1*Z2*PM
REM *****
N=1000: N3=2*N: H=0.02: SKN= - 8: HC=1: SKN=SKN*B1
HC=HC*B1: EP=1.E - 05
REM ***** ПАРАМЕТРЫ ПОТЕНЦИАЛОВ *****
V0=252.6: R0=0.25: V00=140: R00=0.15: V22=V00: R22=R00
A2= - V0*B1: A00= - V00*B1: A22= - V22*B1: RCU=0
L=1: L0=0: L2=2
REM ***** БЛОК ПЕЧАТИ *****
PRINT F$: PRINT USING " +#.####^"; - V0,R0
PRINT F0$: PRINT USING " +#.####^"; - V00,R0
PRINT F1$: PRINT USING " +#.####^"; - V32,R32
PRINT F2$: PRINT USING " +#.####^"; - V52,R52
PRINT H$: PRINT USING ".^^^ ";Z1,Z2,AM1,AM2,H,N3,NV
REM ***** ПОИСК ЭНЕРГИИ СОСОЯНИЯ *****
CALL MIN(EP, B1, PM, SKN, HC, H, N, L, A2, R0, AK1, RCU, GK,
E32, SKS)
REM **** РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ****
U(0)=0: U(1)=0.001: HK=H*N: FOR K=1 TO N - 1: X=K*N
Q1=A2*EXP( - R0*X*X)+L*(L+1)/(X*X): IF X>RCU GOTO 157
Q1=Q1+(3 - (X/RCU)^2)*AK1/(2*RCU): GOTO 158
157 Q1=Q1+AK1/X
158 Q2= - Q1*HK - 2+SKS*HK: U(K+1)= - Q2*U(K) - U(K - 1):
NEXT K
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМИРОВКИ * * * * *

```

```

XX=H*N": SS=SQR(ABS(SKS)): SQQ=SQR(2.*SS)
WW=EXP(-XX*SS): GG=GK/SS
CCC=U(N)/(WW*SQQ)*(SS*2.*XX)^GG: FOR I1=N+1 TO N3
XX=I1*H: SXS=XX*SS: WW=EXP(-SXS)*SQQ/(2.*SXS)^GG
U(I1)=CCC*WW: NEXT I1: FOR I1=0 TO N3: V(I1)=U(I1)^2
NEXT I1: A=0: B=0: FOR II=1 TO N3 - 1 STEP 2: B=B+V(II)
NEXT II: FOR JJ=2 TO N3 - 2 STEP 2: A=A+V(JJ): NEXT JJ
SIM=H*(V(0)+V(N3)+2*A+4*B)/3: HN=1/SQR(SIM): FOR I1=0 TO
N3
U(I1)=U(I1)*HN: NEXT I1
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА *****
FOR I1=0 TO N3: X=I1*H: V(I1)=X^2*U(I1)^2: NEXT I1
A=0: B=0: FOR II=1 TO N3 - 1 STEP 2: B=B+V(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO N3 - 2 STEP 2: A=A+V(JJ): NEXT JJ
RKV=H*(V(0)+V(N3)+2*A+4*B)/3: AM=AM1+AM2
RK= AM1 / AM * (0) ^ 2 + AM2 / AM * (2.50) ^ 2 + AM1 * AM2 /
AM ^ 2 * RKV: PRINT: PRINT " (R^2)^1/2=";
PRINT USING "#.####^####";SQR(RK);SQR(RKV); RKV: PRINT
REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ И МАТРИЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ
PRINT B$: FOR I=NN TO NV STEP NH: ECM(I)=EN+EH*I
EG(I)=ECM(I)+ABS(E32): EG1=ECM(I)+ER: SK=ECM(I)*B1
SS1=SQR(SK): G=GK/SS1: X1=H*SS1*(N3 - 4): X2=H*SS1*(N3)
REM ** ВЫЧИСЛЕНИЕ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ **
CALL CULFUN(L0,X1,G,F10,G10,W0)
CALL CULFUN(L0,X2,G,F20,G20,W0)
CALL CULFUN(L2,X1,G,F12,G12,W0)
CALL CULFUN(L2,X2,G,F22,G22,W0)
REM * * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ * * *
U0(0)=0: U0(1)=0.001: НК=H*H: FOR K=1 TO N3 - 1: X=K*H
Q1=A00*EXP(-R00*X*X)+L0*(L0+1)/(X*X): IF X>RCU GOTO
1157
Q1=Q1+(3 - (X/RCU)^2)*AK1/(2*RCU): GOTO 1158
1157 Q1=Q1+AK1/X
1158 Q2=- Q1*HK - 2.+SK*HK: U0(K+1)= - Q2*U0(K) - U0(K - 1)
NEXT K
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗ *****
U10=U0(N3 - 4): U20=U0(N3): F1=F10: G1=G10: F2=F20: G2=G20
AF=- (F1 - F2*U10/U20)/(G1 - G2*U10/U20): F00=ATN(AF)
XН0=(COS(F00)*F2+SIN(F00)*G2)/U20: IF F00>0 GOTO 90
F00=F00+PI
90 F32(I)=F00*180/PI: FOR J=0 TO N3: U0(J)=U0(J)*XН0: NEXT J
REM ** ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ **
FOR II=0 TO N3: X=H*II: V(II)=U(II)*X*U0(II): NEXT II

```

```

A=0: B=0: FOR II=1 TO N3 - 1 STEP 2: B=B+V(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO N3 - 2 STEP 2: A=A+V(JJ): NEXT JJ
S=H*(V(0)+V(N3)+2*A+4*B)/3: AI0=S
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ * *
FOR K=1 TO N3 - 1: X=K*H
Q1=A22*EXP(-R22*X*X)+L2*(L2+1)/(X*X)
IF X>RCU GOTO 2157
Q1=Q1+(3-(X/RCU)^2)*AK1/(2*RCU)
GOTO 2158
2157 Q1=Q1+AK1/X
2158 Q2=-Q1*HK-2.+SK*HK: U0(K+1)=-Q2*U0(K)-U0(K-1)
NEXT K
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗ * * * * *
U10=U0(N3-4): U20=U0(N3): F1=F12: G1=G12: F2=F22: G2=G22
AF=- (F1-F2*U10/U20)/(G1-G2*U10/U20): F00=ATN(AF)
XH0=(COS(F00)*F2+SIN(F00)*G2)/U20: IF F00>0. GOTO 902
F00=F00+PI
902 F52(I)=F00*180/PI: FOR J=0 TO N3: U0(J)=U0(J)*XH0: NEXT J
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ * *
FOR II=0 TO N3: X=H*II: V(II)=U(II)*X*U0(II): NEXT II: A=0: B=0
FOR II=1 TO N3 - 1 STEP 2: B=B+V(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO N3 - 2 STEP 2
A=A+V(JJ): NEXT JJ: S=H*(V(0)+V(N3)+2*A+4*B)/3: AI2=S
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЙ * * * * *
M0=4*AI0^2: M2=14*AI2^2: KP=SS1: KG=(EG(I))/197.331
BBB=344.46*8*PI^2/(2*3*9)*PM^3*(Z1/AM1-Z2/AM2)^2/1000
S0(I)=BBB*(KG/KP)^3*M0: S2(I)=BBB*(KG/KP)^3*M2
SZ(I)=S0(I)+S2(I)
SR(I)=SZ(I)*(KP/KG)^2*2*3/(2*4):
S0(I)=S0(I)*(KP/KG)^2*2*3/(2*4)
S2(I)=S2(I)*(KP/KG)^2*2*3/(2*4): EL(I)=ECM(I)*AM1/PM
PRINT USING "#.#####^"; EG(I); EL(I); SR(I); SZ(I); S0(I); S2(I)
NEXT I
REM * * * * * ЗАПИСЬ В ФАЙЛ * * * * *
OPEN "O",1,G$
PRINT1.: PRINT1, A$: PRINT1.: PRINT1, F$
PRINT1, USING "+#.#####^"; - V0,R0
PRINT1.: PRINT1, F0$: PRINT1, USING "+#.#####^"; - V00,R00
PRINT1.: PRINT1, F1$: PRINT1, USING "+#.#####^"; - V22,R22
PRINT1.: PRINT1, H$: PRINT1,
PRINT1, USING "#.#####^"; Z1,Z2,AM1,AM2,H,N3,NM
PRINT1.: PRINT1, " ES=";E32: PRINT1.: PRINT1, B$
PRINT1.: FOR I=NN TO NV STEP NH
PRINT1, USING "#.#####^"; EG(I); ECM(I); EL(I); SR(I); SZ(I);

```

```

S0(I); S2(I)
NEXT I: PRINT1,; PRINT1, " R U": PRINT1,; FOR L=1 TO N3
R=L*H: PRINT1, USING " +#.#####^ ^ ^ ^ ";R,U(L)
NEXT L
END
SUB CULFUN(L0,X1,G,F10,G10,W)
РЕМ ВЫЧИСЛЕНИЕ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ
Q=G: R=X1: F0=1: GK=Q*Q: GR=Q*R: RK=R*R
B01=(L0+1)/R+Q/(L0+1): K=1: BK=(2*L0+3)*((L0+1)*(L0+2)+GR)
AK= - R*((L0+1)^2+GK)/(L0+1)*(L0+2): DK=1/BK: DEHK=AK*DK
S=B01+DEHK
15 K=K+1: AK= - RK*((L0+K)^2 - 1)*((L0+K)^2+GK)
BK=(2*L0+2*K+1)*((L0+K)*(L0+K+1)+GR): DK=1/(DK*AK+BK)
IF DK>0 GOTO 35
25 F0= - F0
35 DEHK=(BK*DK-1)*DEHK: S=S+DEHK
IF (ABS(DEHK)-1E-6)>0 GOTO 15
FL=S: K=1: RMG=R - Q: LL=L0*(L0+1): CK= - GK - LL: DK=Q
GKK=2*RMG: HK=2: AA1=GKK*GKK+HK*HK: PBK=GKK/AA1
RBK= - HK/AA1: OMEK=CK*PBK - DK*RBK
EPSK=CK*RBK+DK*PBK
PB=RMG+OMEK: QB=EPSK
52 K=K+1: CK= - GK - LL+K*(K - 1): DK=Q*(2*K - 1): HK=2*K
FI=CK*PBK - DK*RBK+GKK: PSI=PBK*DK+RBK*CK+HK
AA2=FI*FI+PSI*PSI: PBK=FI/AA2: RBK= - PSI/AA2
VK=GKK*PBK - HK*RBK: WK=GKK*RBK+HK*PBK
OM=OMEK: EPK=EPSK: OMEK=VK*OM - WK*EPK - OM
EPSK=VK*EPK+WK*OM - EPK: PB=PB+OMEK
QB=QB+EPSK: IF (ABS(OMEK)+ABS(EPSK) - 1E - 06)>0 GOTO
52
PL= - QB/R: QL=PB/R: G0=(FL - PL)*F0/QL
G0P=(PL*(FL - PL)/QL - QL)*F0: F0P=FL*F0
ALFA=1/(SQR(ABS(F0P*G0 - F0*G0P))); G10=ALFA*G0
GP10=ALFA*G0P: F10=ALFA*F0: FP10=ALFA*F0P
W=1 - FP10*G10+F10*GP10
END SUB
SUB MIN(EP, B1, PM, SKN, HC, H, N3, L, A22, R0, AK1, RCU,
GK, E, SKS)
РЕМ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ СОСТОЯНИЙ
I1=0
777 A2=SKN: DK=A2
CALL DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD)
D12=DD: B2=A2+HC
51 DK=B2: CALL DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD)

```

```

D11=DD: IF D12*D11>0 GOTO 4
3 I1=I1+1: A3=A2: B3=B2
11 C3=(A3+B3)/2: IF (ABS(A3 - B3))<1D - 10 GOTO 151: DK=C3
CALL DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD): F2=DD
IF D12*F2>0 GOTO 14: B3=C3: D11=F2: GOTO 155
14 A3=C3: D12=F2
155 IF ABS(F2)>EP GOTO 11
151 CO=C3: IF I1<NC GOTO 777: GOTO 7
4 IF ABS(D11*D12)<1D - 10 GOTO 3: A2=A2+HC: B2=B2+HC
D12=D11: IF B2 - SKV<0.1 GOTO 51: YS=SKV: GOTO 88
7 YS=NC
88 E=CO/B1
SKS=CO
END SUB
SUB DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD)
REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА
HK=H^2: S1=SQR(ABS(DK)): G2=GK/S1: D1=0: D=1: N1=N3 - 1
FOR I1=1 TO N1: X=I1*H: F=A22*EXP(- X*X*R0)+L*(L+1)/(X*X)
IF X>RCU GOTO 67: F=F+AK1/(2*RCU)*(3 - (X/RCU)^2): GOTO
66
67 F=F+AK1/X
66 D2=D1: D1=D: OM=DK*HK - F*HK - 2: D=D1*OM - D2: NEXT
I1
X=H*N3: F=A22*EXP(- X*X*R0)+L*(L+1)/(X*X)
IF X>RCU GOTO 68
F=F+AK1/(2*RCU)*(3 - (X/RCU)^2): GOTO 69
68 F=F+AK1/X
69 Z=2*X*S1: OM=DK*HK - F*HK - 2
W5= - S1 - 2*S1*G2/Z - 2*S1*(L - G2)/(Z*Z)
OM=OM+2*H*W5
DD=OM*D - 2*D1
END SUB
SUB WW(SK,L,GK,R,N,H,WH,V(5000))
REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ УИТТЕКЕРА
SS=SQR(ABS(SK)): AA=GK/SS: BB=L: NN=N: HH=0.02
ZZ=1+AA+BB: AAA=1/ZZ: NNN=100000: FOR I2=1 TO NNN
AAA=AAA*I2/(ZZ+I2): NEXT I2: GAM=AAA*NNN^ZZ: RR=R
CC=RR*SS^2: FOR I=0 TO NN: TT=HH*I
V(I)=TT^(AA+BB)*(1+TT/CC)^(BB - AA)*EXP(- TT): NEXT I
A=0: B=0: FOR I1=1 TO NN - 1 STEP 2: B=B+V(I1): NEXT I1
FOR I1=2 TO NN - 2 STEP 2: A=A+V(I1)
NEXT I1
SIM=HH*(V(0)+V(NN)+2*A+4*B)/3
WH=SIM*EXP(- CC/2)/(CC^AA*GAM)

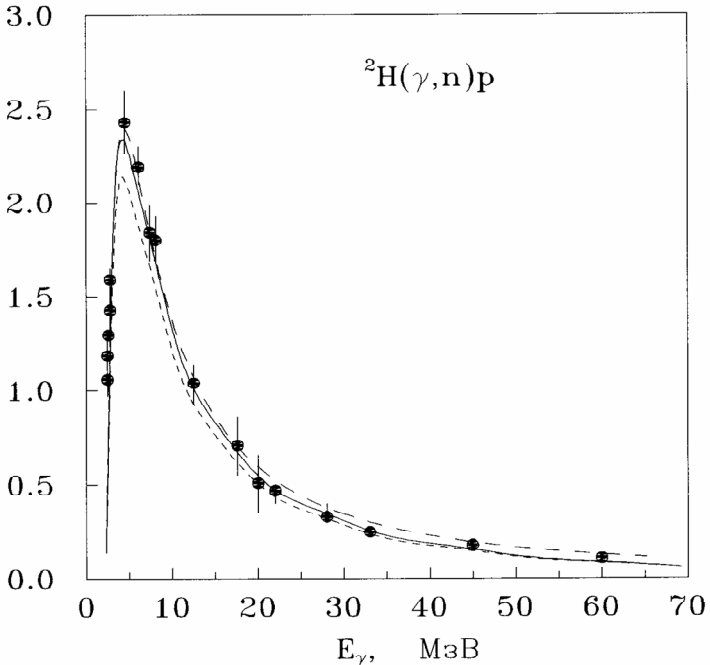
```

END SUB

В качестве контрольного счета, описанной программы, можно привести результаты расчета полных сечений фоторазвала дейтрона и сравнение их с классической формулой фоторазвала [59]

$$\sigma_c(E1) = \frac{8\pi e^2 h^2 W^{1/2} E^{3/2}}{3hc m(E+W)(1-k_0 r_{0t})}$$

Здесь E - энергия нуклонов в непрерывном спектре, W - энергия связи дейтрона. На рис 8.2 показаны результаты расчета. Пунктир – приведенная выше формула, непрерывная линия - один из NN потенциалов, который правильно передает низкоэнергетические параметры рассеяния [59].



Пунктир – вычисления по классической формуле, непрерывная линия - один из NN потенциалов, который правильно передает низкоэнергетические параметры рассеяния [59].

Рисунок 8.2. Полные сечения фоторазвала дейтрона.

Приведем теперь текст программы для вычисления сечений E2 процессов в системе ${}^2\text{H}^4\text{He}$ ядра ${}^6\text{Li}$ [251,252].

**REM РАСЧЕТ СЕЧЕНИЯ ФОТОЗАХВАТА АЛЬФА ДЕЙТОН
В 6Li ДЛЯ E2 ПЕРЕХОДОВ**

```

DEFDBL A - Z: DEFINT I,J,K,L,N,M
DIM EG(50),SE(50),FA1(50),ECM(50),FA2(50),SEC(50)
DIM DEE(50),SR(50),S1(50),SZ(50),EL(50),FA3(50): N=4000
DIM U(N),V(N),U1(N)
REM *****
A$=" ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ФОТОЗАХВАТА АЛЬФА ДЕЙ-
ТОН"
B$=" E(G) E(CM) E(L) SR(NB) SZ(NB)": C$=" Q R F FP G GP W"
H$=" Z1 Z2 M1 M2 H N NM":
G$="C:\BASICA\FOT\RAZALDE2.DAT"
GGG$="C:\BASICA\FOT\IMPULSN.DAT": F$=" V R": F1$=" V1
R1"
F2$=" V2 R2": F3$=" V3 R3"
REM *****
PRINT: PRINT A$: PRINT
REM ***** ВХОДНЫЕ ПАРАМЕТРЫ *****
NN=1: NV=20: NH=1: HE=.5: EN=.01: MAG=0.8574: AM1=4:
AM2=2
Z1=2: Z2=1: PI=3.1415926535899: PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
A1=41.4686: B1=2*PM/A1: AK1=1.439975*Z1*Z2*B1
GK=3.44476E - 02*Z1*Z2*PM
REM *****
N=1000: N3=2*N: H=0.02: H1=H: SKN= - 2: HC=.1: SKN=SKN*B1
HC=HC*B1: EP=1.E - 07
REM ***** ПАРАМЕТРЫ ПОТЕНЦИАЛОВ *****
V0=76.12: R0=0.2: V11=53: R11=0.164: V22=62.9: R22=0.174
V33=80.88: R33=0.19: A2= - V0*B1: A11= - V11*B1: A22= -
V22*B1
A33= - V33*B1: RCU=0: L=0: L2=2
REM ***** БЛОК ПЕЧАТИ *****
PRINT F$: PRINT USING " +#.###^ ^ ^ ^"; - V0,R0
PRINT F1$: PRINT USING " +#.###^ ^ ^ ^"; - V11,R11
PRINT F2$: PRINT USING " +#.###^ ^ ^ ^"; - V22,R22
PRINT F3$: PRINT USING " +#.###^ ^ ^ ^"; - V33,R33
PRINT H$: PRINT USING "#.###^ ^ ^ ^";Z1,Z2,AM1,AM2,H,N3,NV
REM **** РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА **
CALL MIN(EP, B1, PM, SKN, HC, H1, N, L, A2, R0, AK1, RCU, GK,
ES, SKS)
CALL FUN(N,H,U(),L,A2,AK1,SKS,R0,RCU)
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМИРОВКИ * * * *
XX=H*N: SS=SQR(ABS(SKS)): SQQ=SQR(2.*SS)
WW=EXP( - XX*SS): GGG=GK/SS

```

```

CCC=U(N)/(WW*SQQ)*(SS*XX*2.)^(GGG): SQQ=SQR(2.*SS)
FOR I1=N+1 TO N3: XX=I1*H: SXS=XX*SS
REM CALL WW(SKS,L,GK,XX,N,H,WW)
WW=EXP( - SXS)*SQQ/(SXS*2.)^(GGG): U(I1)=CCC*WW: NEXT
I1
FOR I1=0 TO N3: V(I1)=U(I1)^2: NEXT I1: CALL SIM(V(),N3,H,S)
HN=1/SQR(S): FOR I1=0 TO N3: U(I1)=U(I1)*HN: NEXT I1
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА * * * * *
FOR I1=1 TO N3: X=I1*H: V(I1)=X^2*U(I1)^2: NEXT I1
CALL SIM(V(),N3,H,S): AM=AM1+AM2
RK = AM1/AM * (1.67) ^ 2 + AM2 / AM * (1.96) ^ 2 + AM1 * AM2 /
AM ^ 2*S
PRINT " (R^2)^1/2=";: PRINT USING " #####^ ^ ^ ";SQR(RK):
PRINT
REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ ФАЗ И МАТ-
РИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
PRINT B$: FOR I=NN TO NV STEP NH: EG(I)=EN+I*HE+ABS(ES)
ECM(I)=EG(I) - ABS(ES): SK=ECM(I)*B1: SS1=SQR(SK):
G=GK/SS1
X1=H*SS1*(N3 - 4): X2=H*SS1*(N3)
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ КУЛОНОВСКИХ ФУНКЦИЙ
CALL CULFUN(L2,X1,G,F11,G11,W0)
CALL CULFUN(L2,X2,G,F22,G22,W0)
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ * *
CALL FUN(N3,H,U1(),L2,A11,AK1,SK,R11,RCU)
REM * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
U10=U1(N3 - 4): U20=U1(N3): F1=F11: G1=G11: F2=F22: G2=G22
AF= - (F1 - F2*U10/U20)/(G1 - G2*U10/U20): FA1=ATN(AF)
XH1=(COS(FA1)*F2+SIN(FA1)*G2)/U20: IF FA1>0. GOTO 90
FA1=FA1+PI
90 FA1(I)=FA1*180/PI: FOR J=0 TO N3: U1(J)=U1(J)*XH1: NEXT J
REM ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
FOR I1=0 TO N3: X=H*I1: V(I1)=U1(I1)*X^2*U(I1): NEXT I1
CALL SIM(V(),N3,H,S): A111=S
REM * * * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ * * *
CALL FUN(N3,H,U1(),L2,A22,AK1,SK,R22,RCU)
REM * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
U10=U1(N3 - 4): U20=U1(N3): F1=F11: G1=G11: F2=F22: G2=G22
AF= - (F1 - F2*U10/U20)/(G1 - G2*U10/U20): FA1=ATN(AF)
XH1=(COS(FA1)*F2+SIN(FA1)*G2)/U20: IF FA1>0 GOTO 901
FA1=FA1+PI
901 FA2(I)=FA1*180/PI: FOR J=0 TO N3: U1(J)=U1(J)*XH1: NEXT J
REM ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
FOR I1=0 TO N3: X=H*I1: V(I1)=U1(I1)*X^2*U(I1): NEXT I1

```



```

CALL SIM(V(),N3,H,S): AI22=S
REM * * * ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РАССЕЯНИЯ * *
CALL FUN(N3,H,U1(),L2,A33,AK1,SK,R33,RCU)
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАЗ *****
U10=U1(N3 - 4): U20=U1(N3): F1=F11: G1=G11: F2=F22: G2=G22
AF= - (F1 - F2*U10/U20)/(G1 - G2*U10/U20): FA1=ATN(AF)
XH1=(COS(FA1)*F2+SIN(FA1)*G2)/U20: IF FA1>0. GOTO 902
FA1=FA1+PI
902 FA3(I)=FA1*180/PI: FOR J=0 TO N3: U1(J)=U1(J)*XH1: NEXT J
REM * ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ * *
FOR II=0 TO N3: X=H*II: V(II)=U1(II)*X^2*U(II): NEXT II
CALL SIM(V(),N3,H,S): AI33=S
REM ***** ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЙ *****
ME1=3*AI11^2: ME2=5*AI22^2: ME3=7*AI33^2:
ME=ME1+ME2+ME3
KG=(ECM(I)+ABS(ES))/197.331: KP=SS1
BBB= 344.46 * 4 * PI / 225 * PM ^ 5 * (Z1 / AM1 ^ 2 + Z2 / AM2 ^ 2)
^ 2 * 1000
SZ(I)=BBB*(KG/KP)^3*ME*KG^2: SR(I)=SZ(I)/2*(KP/KG)^2
EL(I)=ECM(I)*AM2/PM: PRINT USING "###^^^"; EG(I); ECM(I);
EL(I); SR(I); SZ(I): NEXT I
REM ***** ЗАПИСЬ В ФАЙЛ *****
OPEN "O",1,G$
PRINT#1,: PRINT#1, A$: PRINT#1,: PRINT#1, F$
PRINT#1, USING "###^^^"; - V0,R0
PRINT#1,: PRINT#1, F1$: PRINT#1, USING "###^^^"; -
V11,R11
PRINT#1,: PRINT#1, F2$: PRINT#1, USING "###^^^"; -
V22,R22
PRINT#1,: PRINT#1, F3$: PRINT#1, USING "###^^^"; -
V33,R33
PRINT#1,: PRINT#1, H$: PRINT#1,
PRINT#1, USING "###^^^ "; Z1, Z2, AM1, AM2, H, N3, NM
PRINT#1,: PRINT#1, " E=";ES: PRINT#1,: PRINT#1, B$: PRINT#1,
FOR LL=NN TO NV STEP NH
PRINT#1, USING "###^^^"; ECM(LL); FA1(LL); FA2(LL);
FA3(LL); SR(LL); SZ(LL): NEXT LL
PRINT#1,: PRINT#1, " R U": PRINT#1,: FOR L=1 TO N3: R=L*H
PRINT#1, USING "###^^^ ";R,U(L): NEXT L: PRINT#1,
PRINT#1," КОНЕЦ "
REM ***** КОНЕЦ ПРОГРАММЫ *****
PRINT: PRINT " КОНЕЦ ПРОГРАММЫ": END
SUB CULFUN(L0,X1,G,F10,G10,W)
Q=G: R=X1: F0=1: GK=Q*Q: GR=Q*R: RK=R*R

```

```

B01=(L0+1)/R+Q/(L0+1): K=1: BK=(2*L0+3)*((L0+1)*(L0+2)+GR)
AK=- R*((L0+1)^2+GK)/(L0+1)*(L0+2): DK=1/BK: DEHK=AK*DK
S=B01+DEHK
15 K=K+1: AK=- RK*((L0+K)^2 - 1)*((L0+K)^2+GK)
BK=(2*L0+2*K+1)*((L0+K)*(L0+K+1)+GR): DK=1/(DK*AK+BK)
IF DK>0 GOTO 35
25 F0= - F0
35 DEHK=(BK*DK-1)*DEHK: S=S+DEHK
IF (ABS(DEHK)-1E- 6)>0 GOTO 15
FL=S: K=1: RMG=R - Q: LL=L0*(L0+1): CK= - GK - LL: DK=Q
GKK=2*RMG: HK=2: AA1=GKK*GKK+HK*HK: PBK=GKK/AA1
RBK= - HK/AA1: OMEK=CK*PBK - DK*RBK
EPSK=CK*RBK+DK*PBK: PB=RMG+OMEK: QB=EPSK
52 K=K+1: CK= - GK - LL+K*(K - 1): DK=Q*(2*K - 1): HK=2*K
FI=CK*PBK - DK*RBK+GKK: PSI=PBK*DK+RBK*CK+HK
AA2=FI*FI+PSI*PSI: PBK=FI/AA2: RBK= - PSI/AA2
VK=GKK*PBK - HK*RBK: WK=GKK*RBK+HK*PBK:
OM=OMEK
EPK=EPSK: OMEK=VK*OM - WK*EPK - OM
EPSK=VK*EPK+WK*OM - EPK: PB=PB+OMEK: QB=QB+EPSK
IF (ABS(OMEK)+ABS(EPSK) - 1E - 06)>0 GOTO 52: PL= - QB/R
QL=PB/R: G0=(FL - PL)*F0/QL: G0P=(PL*(FL - PL)/QL - QL)*F0
F0P=FL*F0: ALFA=1/(SQR(ABS(F0P*G0 - F0*G0P))):
G10=ALFA*G0
GP10=ALFA*G0P: F10=ALFA*F0: FP10=ALFA*F0P
W=1 - FP10*G10+F10*GP10: END SUB
SUB MIN(EP, B1, PM, SKN, HC, H, N3, L, A22, R0, AK1, RCU,
GK, E, SKS)
I1=0
777 A2=SKN: DK=A2
CALL DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD)
D12=DD: B2=A2+HC
51 DK=B2: CALL DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD)
D11=DD
IF D12*D11>0 GOTO 4
3 I1=I1+1: A3=A2: B3=B2
11 C3=(A3+B3)/2: IF (ABS(A3 - B3))<1D - 10 GOTO 151: DK=C3
CALL DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD): F2=DD
IF D12*F2>0 GOTO 14: B3=C3: D11=F2: GOTO 155
14 A3=C3: D12=F2
155 IF ABS(F2)>EP GOTO 11
151 CO=C3: IF I1<NC GOTO 777: GOTO 7
4 IF ABS(D11*D12)<1D - 10 GOTO 3: A2=A2+HC: B2=B2+HC
D12=D11: IF B2 - SKV<+0.1 GOTO 51: YS=SKV: GOTO 88

```

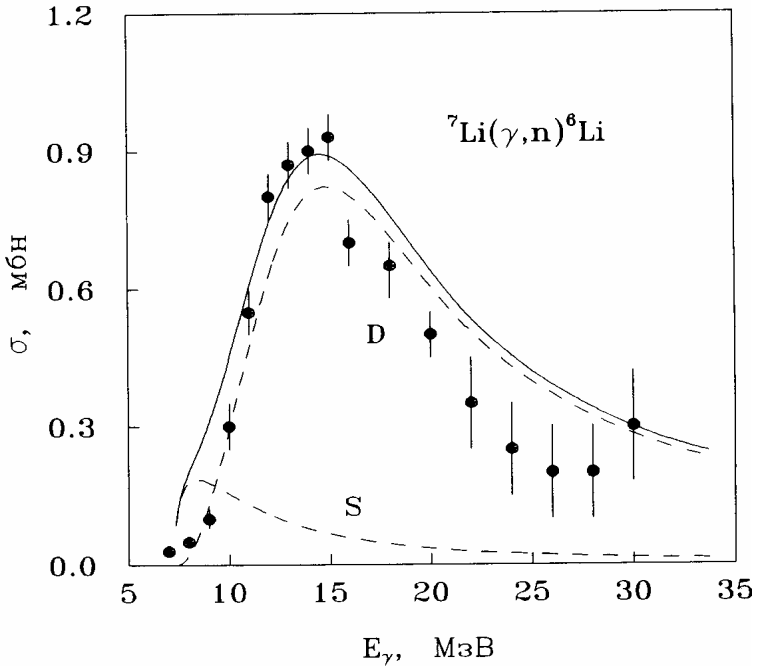
```

7 YS=NC
88 E=CO/B1:SKS=CO:END SUB
SUB DET1(DK,GK,N3,A22,R0,L,AK1,RCU,H,DD)
HK=H^2: S1=SQR(ABS(DK)): G2=GK/S1: D1=0: D=1: N1=N3 - 1
FOR II=1 TO N1: X=II*H: F=A22*EXP(-X*X*R0)+L*(L+1)/(X*X)
IF X>RCU GOTO 67: F=F+AK1/(2*RCU)*(3 - (X/RCU)^2): GOTO
66
67 F=F+AK1/X
66 D2=D1: D1=D: OM=DK*HK - F*HK - 2: D=D1*OM - D2: NEXT
II
X=H*N3: F=A22*EXP(-X*X*R0)+L*(L+1)/(X*X)
IF X>RCU GOTO 68
F=F+AK1/(2*RCU)*(3 - (X/RCU)^2): GOTO 69
68 F=F+AK1/X
69 Z=2*X*S1: OM=DK*HK - F*HK - 2
W5= - S1 - 2*S1*G2/Z - 2*S1*(L - G2)/(Z*Z): OM=OM+2*H*W5
DD=OM*D - 2*D1: END SUB
SUB WW(SK,L,GK,R,N,H,WH,V(5000))
SS=SQR(ABS(SK)): AA=GK/SS: BB=L: NN=2000: HH=0.01
ZZ=1+AA+BB: AAA=1/ZZ: NNN=30000: FOR I2=1 TO NNN
AAA=AAA*I2/(ZZ+I2): NEXT I2: GAM=AAA*NNN^ZZ: RR=R
CC=RR*SS^2: FOR I=0 TO NN: TT=HH*I
V(I)=TT^(AA+BB)*(1+TT/CC)^(BB - AA)*EXP(-TT): NEXT I
A=0: B=0: FOR II=1 TO NN - 1 STEP 2: B=B+V(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO NN - 2 STEP 2: A=A+V(JJ): NEXT JJ
SIM=HH*(V(0)+V(NN)+2*A+4*B)/3
WH=SIM*EXP(-CC/2)/(CC^AA*GAM)
END SUB
SUB FUN(N,H,U(4000),L,AV,AK,SK,R0,RCU)
U(0)=0: U(1)=0.001: HK=H*H: FOR K=1 TO N - 1: X=K*H
Q1=AV*EXP(-R0*X*X)+L*(L+1)/(X*X): IF X>RCU GOTO 1571
Q1=Q1+(3 - (X/RCU)^2)*AK/(2*RCU): GOTO 1581
1571 Q1=Q1+AK/X
1581 Q2= - Q1*HK - 2*SK*HK: U(K+1)= - Q2*U(K) - U(K - 1)
NEXT K: END SUB
SUB SIM(V(4000),N,H,S)
A=0: B=0: FOR II=1 TO N - 1 STEP 2: B=B+V(II): NEXT II
FOR JJ=2 TO N - 2 STEP 2: A=A+V(JJ): NEXT JJ
S=H*(V(0)+V(N)+2*A+4*B)/3: END SUB

```

Приведем результаты расчета для фоторазвала ядра ${}^7\text{Li}$ в ${}^6\text{Li}$ канал, выполненные по первой из этих программ. Здесь $E(\text{GAM})$ - энергия гамма кванта, $S(R)$ - полные сечения процесса фоторазвала (непрерывная линия на рисунке 8.3), S_0 - сечение обусловленное S

- волной (штриховая линия внизу на рисунке 8.3) и S2 - сечение обусловленное D - волной (штриховая линия вверх на рисунке 8.3) [45].



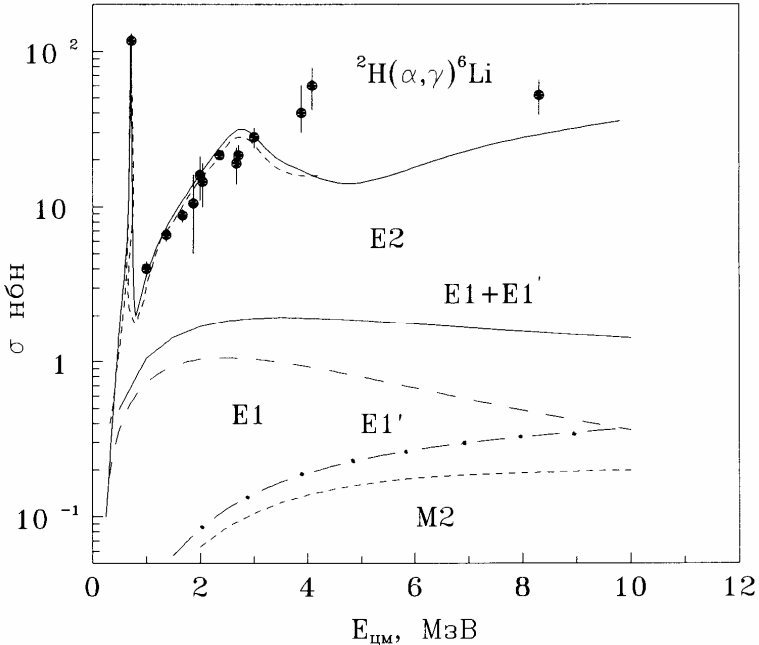
Непрерывная линия - расчет полных E1 сечений с полученным потенциалом. Штриховые линии – вклады фотопроцессов от ${}^2\text{S}$ и ${}^2\text{D}$ волн рассеяния. Точки – экспериментальные данные [253].

Рисунок 8.3 - Полные сечения фоторазвала ядра ${}^7\text{Li}$ в ${}^6\text{Li}$ канал [254].

E(GAM)	E(LAB)	S(R)	S(Z)	S0	S2
7.34E+00	1.17E-01	8.74E-02	3.90E-02	8.72E-02	1.52E-04
7.84E+00	7.00E-01	1.84E-01	1.56E-02	1.71E-01	1.26E-02
8.34E+00	1.28E+00	2.36E-01	1.24E-02	1.85E-01	5.02E-02
8.84E+00	1.87E+00	2.90E-01	1.17E-02	1.81E-01	1.09E-01
9.34E+00	2.45E+00	3.52E-01	1.21E-02	1.71E-01	1.81E-01
9.84E+00	3.03E+00	4.22E-01	1.30E-02	1.59E-01	2.63E-01
1.03E+01	3.62E+00	4.97E-01	1.42E-02	1.47E-01	3.50E-01
1.08E+01	4.20E+00	5.74E-01	1.55E-02	1.35E-01	4.39E-01
1.13E+01	4.78E+00	6.49E-01	1.69E-02	1.24E-01	5.25E-01
1.18E+01	5.37E+00	7.18E-01	1.81E-02	1.13E-01	6.04E-01
1.23E+01	5.95E+00	7.77E-01	1.92E-02	1.04E-01	6.73E-01
1.28E+01	6.53E+00	8.25E-01	2.01E-02	9.52E-02	7.29E-01

1.33E+01 7.12E+00 8.59E-01 2.08E-02 8.74E-02 7.72E-01
1.38E+01 7.70E+00 8.81E-01 2.12E-02 8.06E-02 8.00E-01
1.43E+01 8.28E+00 8.91E-01 2.14E-02 7.45E-02 8.16E-01
1.48E+01 8.87E+00 8.91E-01 2.14E-02 6.92E-02 8.22E-01
1.53E+01 9.45E+00 8.83E-01 2.13E-02 6.44E-02 8.19E-01
1.58E+01 1.00E+01 8.68E-01 2.10E-02 6.01E-02 8.08E-01
1.63E+01 1.06E+01 8.49E-01 2.06E-02 5.62E-02 7.93E-01
1.68E+01 1.12E+01 8.25E-01 2.02E-02 5.26E-02 7.73E-01
1.73E+01 1.18E+01 7.99E-01 1.97E-02 4.94E-02 7.50E-01
1.78E+01 1.24E+01 7.71E-01 1.92E-02 4.63E-02 7.25E-01
1.83E+01 1.30E+01 7.42E-01 1.86E-02 4.35E-02 6.98E-01
1.88E+01 1.35E+01 7.12E-01 1.80E-02 4.09E-02 6.71E-01
1.93E+01 1.41E+01 6.81E-01 1.75E-02 3.85E-02 6.43E-01
1.98E+01 1.47E+01 6.52E-01 1.69E-02 3.64E-02 6.15E-01
2.03E+01 1.53E+01 6.23E-01 1.63E-02 3.44E-02 5.89E-01
2.08E+01 1.59E+01 5.95E-01 1.58E-02 3.26E-02 5.63E-01
2.13E+01 1.65E+01 5.69E-01 1.52E-02 3.09E-02 5.38E-01
2.18E+01 1.70E+01 5.44E-01 1.47E-02 2.95E-02 5.15E-01
2.23E+01 1.76E+01 5.21E-01 1.43E-02 2.81E-02 4.93E-01
2.28E+01 1.82E+01 4.99E-01 1.38E-02 2.69E-02 4.72E-01
2.33E+01 1.88E+01 4.79E-01 1.34E-02 2.58E-02 4.53E-01
2.38E+01 1.94E+01 4.60E-01 1.30E-02 2.47E-02 4.35E-01
2.43E+01 2.00E+01 4.42E-01 1.27E-02 2.38E-02 4.18E-01
2.48E+01 2.05E+01 4.26E-01 1.24E-02 2.29E-02 4.03E-01
2.53E+01 2.11E+01 4.10E-01 1.21E-02 2.20E-02 3.88E-01
2.58E+01 2.17E+01 3.95E-01 1.18E-02 2.12E-02 3.74E-01
2.63E+01 2.23E+01 3.81E-01 1.15E-02 2.04E-02 3.61E-01
2.68E+01 2.29E+01 3.68E-01 1.12E-02 1.96E-02 3.48E-01
2.73E+01 2.35E+01 3.55E-01 1.10E-02 1.89E-02 3.37E-01
2.77E+01 2.39E+01 3.46E-01 1.08E-02 1.84E-02 3.27E-01
2.82E+01 2.45E+01 3.34E-01 1.05E-02 1.78E-02 3.17E-01
2.87E+01 2.51E+01 3.23E-01 1.03E-02 1.71E-02 3.06E-01
2.92E+01 2.57E+01 3.13E-01 1.01E-02 1.66E-02 2.97E-01
2.97E+01 2.63E+01 3.03E-01 9.88E-03 1.60E-02 2.87E-01
3.02E+01 2.68E+01 2.94E-01 9.69E-03 1.56E-02 2.79E-01
3.07E+01 2.74E+01 2.86E-01 9.51E-03 1.51E-02 2.70E-01
3.12E+01 2.80E+01 2.77E-01 9.35E-03 1.47E-02 2.63E-01
3.17E+01 2.86E+01 2.70E-01 9.19E-03 1.43E-02 2.55E-01
3.22E+01 2.92E+01 2.63E-01 9.05E-03 1.40E-02 2.49E-01
3.27E+01 2.98E+01 2.56E-01 8.92E-03 1.36E-02 2.42E-01
3.32E+01 3.03E+01 2.50E-01 8.80E-03 1.33E-02 2.36E-01
3.37E+01 3.09E+01 2.44E-01 8.68E-03 1.30E-02 2.31E-01
3.42E+01 3.15E+01 2.39E-01 8.58E-03 1.28E-02 2.26E-01

Приведем теперь E2 сечения, вычисленные по второй программе, для ${}^2\text{H}^4\text{He}$ захвата на основное состояние ядра ${}^6\text{Li}$ [18]. Здесь E(G), E(CM), E(L) - энергия гамма кванта, частиц в системе центра масс и лабораторной системе в МэВ, SR и SZ сечение развала и захвата в нанобарн (nb). На рисунке 8.4 эти результаты показаны верхней непрерывной линией.



Непрерывная линия сверху - расчетные E2 сечения, полученные из приведенной программы. Точечная линия внизу - сечения M2 процесса, штриховая линия - E1 сечения, обусловленное орбитальной частью электрического оператора, штрих - пунктир - E1' сечение, обусловленное спиновой частью электрического оператора, непрерывная линия внизу - E1 сечение, полученное с учетом орбитальной и спиновой частей электрического оператора. Точки - экспериментальные данные [255].

Рисунок 8.4 - полные сечения процесса радиационного захвата в ${}^4\text{He}^2\text{H}$ системе с образованием ядра ${}^6\text{Li}$ в основном состоянии.

E(G)	E(CM)	E(L)	SR(nb)	SZ(nb)
1.58E+00	1.10E-01	1.65E-01	1.02E+00	1.85E-02
1.68E+00	2.10E-01	3.15E-01	1.43E+01	1.54E-01
1.78E+00	3.10E-01	4.65E-01	5.67E+01	4.64E-01
1.88E+00	4.10E-01	6.15E-01	1.43E+02	9.89E-01
1.98E+00	5.10E-01	7.65E-01	3.03E+02	1.87E+00
2.08E+00	6.10E-01	9.15E-01	7.15E+02	4.06E+00

2.18E+00 7.10E-01 1.07E+00 2.36E+04 1.27E+02
2.28E+00 8.10E-01 1.22E+00 3.89E+02 2.00E+00
2.38E+00 9.10E-01 1.37E+00 5.51E+02 2.74E+00
2.48E+00 1.01E+00 1.52E+00 7.58E+02 3.69E+00
2.58E+00 1.11E+00 1.67E+00 9.72E+02 4.66E+00
2.68E+00 1.21E+00 1.82E+00 1.19E+03 5.67E+00
2.78E+00 1.31E+00 1.97E+00 1.43E+03 6.73E+00
2.88E+00 1.41E+00 2.12E+00 1.67E+03 7.86E+00
2.98E+00 1.51E+00 2.27E+00 1.92E+03 9.05E+00
3.08E+00 1.61E+00 2.42E+00 2.19E+03 1.03E+01
3.18E+00 1.71E+00 2.57E+00 2.47E+03 1.17E+01
3.28E+00 1.81E+00 2.72E+00 2.77E+03 1.32E+01
3.38E+00 1.91E+00 2.87E+00 3.09E+03 1.48E+01
3.48E+00 2.01E+00 3.02E+00 3.43E+03 1.65E+01
3.58E+00 2.11E+00 3.17E+00 3.80E+03 1.85E+01
3.68E+00 2.21E+00 3.32E+00 4.20E+03 2.06E+01
3.78E+00 2.31E+00 3.47E+00 4.61E+03 2.28E+01
3.88E+00 2.41E+00 3.62E+00 5.04E+03 2.52E+01
3.98E+00 2.51E+00 3.77E+00 5.46E+03 2.75E+01
4.08E+00 2.61E+00 3.92E+00 5.80E+03 2.96E+01
4.18E+00 2.71E+00 4.07E+00 6.01E+03 3.10E+01
4.28E+00 2.81E+00 4.22E+00 5.99E+03 3.12E+01
4.38E+00 2.91E+00 4.37E+00 5.74E+03 3.03E+01
4.48E+00 3.01E+00 4.52E+00 5.30E+03 2.83E+01
4.58E+00 3.11E+00 4.67E+00 4.81E+03 2.59E+01
4.68E+00 3.21E+00 4.82E+00 4.35E+03 2.37E+01
4.78E+00 3.31E+00 4.97E+00 3.98E+03 2.19E+01
4.88E+00 3.41E+00 5.12E+00 3.69E+03 2.06E+01
4.98E+00 3.51E+00 5.27E+00 3.47E+03 1.96E+01
5.08E+00 3.61E+00 5.42E+00 3.30E+03 1.88E+01
5.18E+00 3.71E+00 5.57E+00 3.14E+03 1.82E+01
5.28E+00 3.81E+00 5.72E+00 3.00E+03 1.76E+01
5.38E+00 3.91E+00 5.87E+00 2.87E+03 1.70E+01
5.48E+00 4.01E+00 6.02E+00 2.74E+03 1.64E+01
5.58E+00 4.11E+00 6.17E+00 2.62E+03 1.59E+01
5.68E+00 4.21E+00 6.32E+00 2.51E+03 1.54E+01
5.78E+00 4.31E+00 6.47E+00 2.42E+03 1.50E+01
5.88E+00 4.41E+00 6.62E+00 2.34E+03 1.47E+01
5.98E+00 4.51E+00 6.77E+00 2.28E+03 1.44E+01
6.08E+00 4.61E+00 6.92E+00 2.23E+03 1.43E+01
6.18E+00 4.71E+00 7.07E+00 2.19E+03 1.42E+01
6.28E+00 4.81E+00 7.22E+00 2.17E+03 1.42E+01
6.38E+00 4.91E+00 7.37E+00 2.16E+03 1.43E+01

В этой главе, в качестве примера, были рассмотрены фотопроцессы на ядре ${}^6\text{Li}$ в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ и на ядре ${}^7\text{Li}$ в $n^6\text{Li}$ моделях с запрещенными состояниями для потенциалов согласованными с фазами рассеяния этих ядерных частиц и характеристиками их связанных состояний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубовиченко С.Б. Свойства легких атомных ядер в потенциальной кластерной модели, Монография депонирована в Каз. Гос. ИНТИ, Алматы, 1998, № 8172 - Ка98, 332с. (Реферат опубликован в сборнике "Депонированные научные работы", Каз. Гос. ИНТИ, Алматы, 1998, № 3, с.24-25).
2. Дубовиченко С.Б. Свойства легких атомных ядер в потенциальной кластерной модели. Издание второе, исправленное и дополненное, Алматы, Данекер, 2004, 247с.
3. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах, М., Наука, 1969, 414с.
4. Вильдермут Л., Тан Я. Единая теория ядра, М., Мир, 1980, 502с. (Wildermuth K., Tang Y.C. A unified theory of the nucleus, Vieweg. Braunschweig, 1977).
5. Немец О.Ф., Неудачин В.Г., Рудчик А.Т., Смирнов Ю.Ф., Чувильский Ю.М. Нуклонные ассоциации в атомных ядрах и ядерные реакции многонуклонных передач, Киев, Наукова Думка, 1988, 488с.
6. Neudatchin V.G., Kukuljin V.I., Boyarkina A.N., Korennoy V.P. A microscopic substantiated optical potential for αt system including nucleon exchange // Lett. Nuovo Cim., 1972, V.5, P.834-838.
7. Neudatchin V.G., Kukuljin V.I., Korotkikh V.L., Korennoy V.P. A microscopically substantiated local optical potential for $\alpha\alpha$ scattering // Phys. Lett., 1971, V.34B, P.581-583.
8. Kurdyumov I.V., Neudatchin V.G., Smirnov Y.F., Korennoy V.P. The high energy limit for the αd form factors in the ${}^6\text{Li}$ nuclei // Phys. Lett., 1972, V.40B, P.607-610.
9. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Запрещенные состояния в системах двух и трех составных частиц // Современные вопросы оптики и атомной физики, Киев, Киевский Гос. Университет, 1974, С.225-241.
10. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Взаимодействие составных частиц и принцип Паули // ЭЧАЯ, 1979, Т.10, С.1236-1255.
11. Неудачин В.Г., Сахарук А.А., Смирнов Ю.Ф. Обобщенное потенциальное описание взаимодействия легчайших кластеров - рассеяние и фотоядерные реакции // ЭЧАЯ, 1992, Т.23, С.480-541.
12. Дубовиченко С.Б., Кукулин В.И., Сазонов П.Б. Структура ядер ${}^{6,7}\text{Li}$ в кластерной модели на основе потенциалов с запрещенными состояниями // Теория квантовых систем с сильным взаимодействием, Калинин, КГУ, 1983, С.65-79.
13. Дубовиченко С.Б., Мажитов М. Вариационные расчеты ядер ${}^{6,7}\text{Li}$ в кластерных моделях для потенциалов с запрещенными состояниями // Изв. АН Каз. ССР, сер. физ. - мат., 1987, № 4, С.55-

64.

14. Дубовиченко С.Б., Мажитов М. Неортогональный вариационный базис в задаче двух тел // Материалы научной конференции молодых ученых Каз.ГУ, Деп. Каз. Гос. НИИНТИ, Алма-Ата, 1987, №. 1665, С.1729-1735.

15. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Потенциальное описание кластерных каналов лития // ЯФ, 1993, Т.56, №2, С.87-98.

16. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Кулоновские формфакторы ядер лития в кластерной модели на основе потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ, 1994, Т.57, № 5, С.784-791.

17. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Фотопроцессы на ядрах ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ в кластерной модели для потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ, 1995, Т.58, С.635-641.

18. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Фотопроцессы на ядре ${}^6\text{Li}$ в кластерных моделях для потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ, 1995, Т.58, С.852-859.

19. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Электромагнитные эффекты в легких ядрах на основе потенциальной кластерной модели // ЭЧАЯ (Дубна), 1997, Т.28, С.1529-1594.

20. Frick R. et al. Strong tensor term in the optical potential for 20 MeV // Phys. Rev. Lett., 1980, V.44, P.14-16.

21. Nishioka H., Tostevin J.A., Johnson R.C. Deformation effects in aligned ${}^6\text{Li}$ scattering // Phys. Lett., 1983, V.124B, P.17-20.

22. Merchant A.C., Rowley N. Alpha - deuteron cluster model of ${}^6\text{Li}$ including tensor forces // Phys. Lett., 1985, V. B150, P.35-40.

23. Kukulín V.I., Krasnopol'sky V.M., Voronchev V.T., Sazonov P.B. Detailed study of the cluster structure of light nuclei in a three - body model. I. Ground state of ${}^6\text{Li}$ // Nucl. Phys., 1984, V.A417, P.128-156.

24. Kukulín V.I., Krasnopol'sky V.M., Voronchev V.T., Sazonov P.B. Detailed study of the cluster structure of light nuclei in a three - body model. II. The spectrum of low - lying of nuclei with $A=6$ // Nucl. Phys., 1986, V.A453, P.365-388.

25. Kukulín V.I., Voronchev V.T., Kaipov T.D., Eramzhyan R.A. Detailed study of the cluster structure of light nuclei in a three - body model. III. Electromagnetic structure of ${}^6\text{Li}$ // Nucl. Phys., 1990, V.A517, P.221-263.

26. Lehman D.R., Parke W.C. Shell structure of the $A=6$ ground states from three - body dynamics // Phys. Rev., 1983, V.C28, P.364-382.

27. Lehman D.R., Parke W.C. $A=6$ structure from three - body di-

namics // Phys. Rev. Lett., 1983, V.50, P.98-101.

28. Lehman D.R. Excluded bound state in the $S_{1/2}$ $N^4\text{He}$ interaction and the three - body binding energies of ^6He and ^6Li // Phys. Rev., 1982, V.C25, P.3146-3154.

29. Искра В., Мазур А.И., Неудачин В.Г., Нечаев Ю.И., Смирнов Ю.Ф. Интерференция различных потенциальных амплитуд во взаимном рассеянии легчайших кластеров // УФЖ, 1988, Т.32, С.1141-1147.

30. Искра В., Мазур А.И., Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Возможности потенциального описания взаимного рассеяния легчайших кластеров // ЯФ, 1988, Т.48, С.1674-1683.

31. Неудачин В.Г., Померанцев В.Н., Сахарук А.А. Потенциальное описание фотоядерных реакций $^3\text{He}\gamma \rightarrow p^2\text{H}$ и $^3\text{He}^2\text{H} \rightarrow ^5\text{Li}\gamma$ // ЯФ, 1990, Т.52, С.738-744.

32. Кукулин В.И., Неудачин В.Г., Померанцев В.Н., Сахарук А.А. Обобщенное потенциальное описание взаимного рассеяния легчайших кластеров на примере систем $p^2\text{H}$ и $^2\text{H}^3\text{He}$ // ЯФ, 1990, Т.52, С.402-411.

33. Дубовиченко С.Б., Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф., Сахарук А.А. Обобщенное потенциальное описание взаимодействия легчайших ядер pt и ph // Изв. АН СССР, сер. физ., 1990, Т.54, С.911-916.

34. Neudatchin V.G., Kukulin V.I., Pomerantsev V.N., Sakharuk A.A. Generalized potential - model description of mutual scattering of the lightest $p^2\text{H}$, $^2\text{H}^3\text{He}$ nuclei and the corresponding photonuclear reactions // Phys. Rev., 1992, V.C45. P.1512-1527.

35. Neudatchin V.G., Sakharuk A.A., Dubovichenko S.B. Photo-disintegration of ^4He and supermultiplet potential model of cluster - cluster interaction // Few Body Sys., 1995, V.18, P.159-172.

36. Neudatchin V.G., Kukulin V.I., Pomerantsev V.N., Sakharuk A.A. The generalized potential model description of $p^2\text{H}$ and $^2\text{H}^3\text{He}$ scattering // Phys. Lett., 1991, V.B255, P.482-486.

37. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Потенциальное описание процессов упругого Nd , dd , $N\alpha$ и $d\tau$ рассеяния // ЯФ, 1990, Т.51, № 6, С.1541-1550.

38. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Потенциальное описание упругого Nt и $N\tau$ рассеяния // ЯФ, 1993, Т.56, № 4, С.45-56.

39. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в Nd и $d^3\text{He}$ системах на основе кластерных моделей для потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ, 1995, Т.58, № 7, С.1253-1259.

40. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в dd канале ядра ^4He на основе потенциальной кластерной модели // 1995, Т.58, № 11,

С.1973-1979.

41. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в p^3N и n^3He каналах ядра 4He на основе потенциальных кластерных моделей // 1995, Т.58, № 8, С. 1377-1384.

42. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В., Сахарук А.А. Потенциальное описание упругого N^6Li и αt рассеяния // ЯФ, 1993, Т.56, № 8, С.90-106.

43. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Потенциальное описание упругого $\alpha\alpha$, d^6Li и N^7Li рассеяния // ЯФ, 1992, Т.55, № 11, С.2918-2926.

44. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в $^4He^{12}C$ канале ядра ^{16}O на основе потенциальной кластерной модели // ЯФ, 1996, Т.59, № 3, С. 447 - 453.

45. Дубовиченко С.Б. - Фоторазвал ядра 7Li в n^6Li канал в потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями // ЯФ, 1997, т.60, №2, с.254-258.

46. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. //М., Физ.мат.лит., 1976, 575С.

47. Абрамовиц И.Г. и др. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование. // М., Физ.мат.лит., 1961, 350С.

48. Копченова И.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. //М., Физ.мат.лит., 1972, 366С.

49. Маделунг Э. Математический аппарат физики. // М., Физ.мат.лит., 1968, 618С.

50. Троицкий В.А. Инженерные расчеты на ЭВМ. // Л., Машиностроение, 1979, 287С.

51. Джеффирс Г., Свирлс Б. Методы математической физики. // М., Мир, 1970, 350С.

52. Бабич В.М., и др. Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. //М., Наука, 1964, 367С.

53. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. // М., Атомиздат, 1972, 398С.

54. Загуский В.Л. Справочник по численным методам решения уравнений. // М., Физ.мат.лит., 1960, 215С.

55. Мелентьев П.В. Приближенные вычисления. // М.,Физ.мат.лит., 1962, 387С.

56. Демидович Б.П., Марон И.Ф. Основы вычислительной математики, М., Наука, 1966, 664с.

57. Ходгсон П.Е. Оптическая модель упругого рассеяния, М., Атомиздат, 1966, 230с. (Hodgson P.E. The optical model of elastic scattering, Oxford, Clarendon Press, 1963).

58. Марчук Г.И., Колесов В.Е. Применение численных методов для расчета нейтронных сечений, М., Атомиздат, 1970, 304с.
59. Хюльтен Л., Сугавара М. Проблема взаимодействия двух нуклонов // Структура атомного ядра, М., ИЛ, 1959, С.9. (Structure of atomic nuclei, Ed. Flugge S., Springer – Verlag, Berlin - Gottingen – Heidelberg, 1957).
60. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений, М., Мир. 1969, 756с. (Mott N., Massy H. The theory of atomic collisions, Oxford, Claren Press, 1965).
61. Браун Д.Е., Джексон А.Д. Нуклон - нуклонные взаимодействия, М., Атомиздат, 1979, 246с. (Brown G.E., Jackson A.D. The nucleon - nucleon interaction, North - Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976).
62. Никитиу Ф. Фазовый анализ, М., Мир, 1983, 416с.
63. Бейтмен Г., Эрдейн А. Справочная математическая библиотека. Высшие трансцендентные функции. Т.2. // М., Наука, 1968, 295С.
64. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. //М., Физ.мат.лит., 1963, 358С.
65. Дубовиченко С.Б. Программа расчета действительных фаз ядерного рассеяния // Вестник Каз.ГАСА, Алматы, 2003, №9/10, С.220-227.
66. Дубовиченко С.Б. Компьютерная программа и методы расчета комплексных фаз ядерного рассеяния. Тезисы докл. Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании., Каз.НУ, Алматы, Казахстан, 6 - 10 октября 2004, http://www.ict.nsc.ru/ws/show_abstract.dhtml?ru+110+7834+S.
67. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.М. Численные методы решения уравнения Шредингера // Вестник АГУ, физ.-мат. сер., Алматы, 2004, №9, С.82-87.
68. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. // Киев, Наукова думка, 1984, 598С.
69. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики, Киев, 1970, 792с.
70. Дымарский Я.С. и др. Справочник программиста, Л., 1963, 628с.
71. Положий Г.Н. и др. Математический практикум, М., Физ. - мат. литература, 1960, 512с.
72. Данилина Н.И. и др. Численные методы, М., Высшая школа, 1976, 368с.
73. Янке Е., Емде Ф., Леш Ф. Специальные функции, М., Наука, 1968, 344с. (Janke - Emde - Losch. Tafeln hoherer funktionen, Stuttgart, 1960).

74. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация. // М., Мир, 1980, 608С.
75. Melkanoff M. A fortran program for elastic scattering analysis with nuclear optical model // Univ. California Pres., Berkley, Los Angeles, 1961, 116р.
76. Lutz H.F., Karvelis M.D. Numerical calculation of coulomb wave functions for repulsive coulomb fields // Nucl. Phys., 1963, V.43, P.31-44.
77. Melkanoff M. Nuclear optical model calculations. // Meth. in Comput. Phys., Acad. press, N-Y, 1966, V.6, P.1-80.
78. Gody W.J., Hillstrom K.E. Chebyshev approximations for the coulomb phase shifts // Meth. Comput., 1970, V.111, P.671-677.
79. Smith W.R. Nuclear penetrability and phase shift subroutine // Usics Communs., 1969, V.1, P.106-112.
80. Froberg C.E. Numerical treatment of Coulomb wave functions // Rev. Mod. Phys., 1955, V.27, P.399-411.
81. Abramowitz M. Tables of Coulomb wave function, v.1, Washington, N.B.S., 1952, 141р.
82. Barnet A., et al. Coulomb wave function for all real η and ρ // Comput. Phys. Comm., 1974, V.8, P.377-395.
83. Данилов В.Л. и тд. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. Функции, пределы, цепные дроби. // М., Физ.мат.лит., 1961, 439С.
84. Кузнецов Д.С. Специальные функции. // М., Высшая школа, 1965, 272С.
85. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.С. Методы расчета кулоновских функций и фаз рассеяния // Вестник АГУ, физ.-мат. сер., Алматы, 2003, Т.1(7), С.115-122.
86. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям, М., Наука, 1979, 830с. (Handbook of mathematical functions. Edit. M. Abramowitz and I. Stegun? NBS., 1964).
87. Дубовиченко С.Б. Некоторые версии Алгоритмического языка БЕЙСИК. // УЭиП, Алматы, 2001, 166с.
88. Дубовиченко С.Б., Жусупов М.А. К вопросу о вычислении кулоновских волновых функций // Взаимодействие излучения с веществом, Алма - Ата, КазГУ, 1980, С.99-104.
89. Дубовиченко С.Б., Жусупов М.А. О вычислении кулоновских фаз рассеяния // Изв. АН Каз. ССР, сер. физ. - мат., 1981, № 6, С.24-26.
90. Reid R.V. Local phenomenological nucleon - nucleon potentials // Ann. Phys. 1968. V.50. P.411-448.
91. Schmelzbach P., Gruebler W., Konig V., Marmier P. Phase shift analysis of $^2\text{H}^4\text{He}$ elastic scattering // Nucl. Phys., 1972, V.A184, P.193-

213.

92. McIntair L., Haerberli W. Phase shift analysis of $^2\text{H}^4\text{He}$ scattering // Nucl. Phys., 1967, V.A91, P.382-398.

93. Bruno M., Cannata F., D'Agostino M., Maroni C., Massa I. Experimental study on low energy $^2\text{H}(^4\text{He}, ^4\text{He})^2\text{H}$ elastic scattering // INFN, Italy, Bologna, 1981, AE-81/9, 15P.

94. Jenny B., Gruebler W., Konig V., Schmelzbach P.A., Schweizer C. Phase shift analysis of $d\alpha$ elastic scattering between 3 and 43 MeV // Nucl. Phys., 1983, V.A397, P.61-101.

95. Darriulat P., Garreta D., Tarrats A., Arvieux J. Phase shift analysis of $^4\text{He}^2\text{H}$ scattering between 10 and 27 MeV // Nucl. Phys., 1967, V.A94, P.653-662.

96. Darriulat P., Igo G., Pugh G., Holmsgren H.D. Elastic scattering of alpha particles by helium between 53 and 120 MeV // Phys. Rev., 1965. v.137. p.B315.

97. Keller L., Haerberli W. Vector polarization measurements and phase shift analysis for $^2\text{H}^4\text{He}$ scattering between 3 and 11 MeV // Nucl. Phys., 1970, v.A156, p.465-476.

98. Барит И.Я., Бровкина Л.Н., Дулькова Л.С., Краснополяский В.М., Кузнецова Е.В., Кукулин В.И. Фазовый анализ низкоэнергетического $^2\text{H}^4\text{He}$ рассеяния и извлечение аналитической S - матрицы из экспериментальных данных // Препринт ИЯИ, Москва, 1987, № П - 0513, 38с.

99. Barnard A.C., Jones C.M., Phillips G.C. The scattering of ^3He by ^4He // Nucl. Phys., 1964, V.50, P.629-640.

100. Spiger R., Tombrello T.A. Scattering of ^3He by ^4He and ^4He by ^3H // Phys. Rev., 1967, V.163, P.964-984.

101. Ivanovich M., Young P.G., Ohlsen G.G. Elastic scattering of several hydrogen and helium isotopes from tritium // Nucl. Phys., 1968, V.A110, P.441-462.

102. Van Niftrik G., Brokman K., Van Oers W. Elastic scattering of 51 MeV alpha particles from helium // Congr. Int. Phys. Nucl. Patis. 1964, V.2, P.858-860.

103. Дубовиченко С.Б. Методы расчета и компьютерная программа для вычисления ядерных фаз упругого рассеяния в потенциалах с тензорной компонентой // Деп. Каз. Гос. ИНТИ, Алматы, 1997, №7542 - Ка97, 28с.

104. Дубовиченко С.Б., Неронов В.С. Методы расчета ядерных фаз упругого рассеяния и энергий связанных состояний частиц в потенциалах с тензорной компонентой. // Вестник Каз.АТиСО, 2006, №2, 20с.

105. Кукулин В.И., Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф., Эльховари Р. Роль принципа Паули в формировании оптических по-

тенциалов // Изв. АН СССР, сер. физ., 1974, Т.38, С.2123-2128.

106. Kukulin V.I. Latest achievements in dynamic calculations for light nuclei // *Few Body Systems, Suppl*, 1995, V.9, P.259-262.

107. Platner D. Coupling constants in few nucleon systems. Тезисы докл. Europ. Symp. on Few Body Probl. in Nucl. and Part. Phys. Sesimbra., 1980, P.31-36.

108. Platner G.R., Bornard M., Alder K. Model independent information on αd clustering in ${}^6\text{Li}$ // *Phys. Lett.*, 1976, V.61B, P.21-24.

109. Bornard M., Platner G.R., Viollier R.D., Alder K. Coupling constants for several light nuclei from a dispersion analysis of nucleon and deuteron scattering amplitudes // *Nucl. Phys.*, 1978, V.A294, P.492-512.

110. Lim T. ${}^4\text{He}$ - dd vertex constant and normalization // *Phys. Rev.*, 1976, V.C14, P.1243-1244.

111. Lim T. The ${}^6\text{Li}$ - αd vertex constant // *Phys. Lett.*, 1975, V.56B, P.321-324.

112. Lim T. αd cluster structure of ${}^6\text{Li}$ // *Phys. Lett.*, 1973, V.47B, P.397-398.

113. Tombrello T., Parker P.D. Direct - capture model for the ${}^3\text{He}({}^4\text{He},\gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}({}^4\text{He},\gamma){}^7\text{Li}$ reactions // *Phys. Rev.*, 1963, V.131, P.2578-2589.

114. Mertelmeir T., Hofmann H.M. Consistent cluster model description of the electromagnetic properties of lithium and beryllium nuclei // *Nucl. Phys.*, 1986, V.A459, P.387-416.

115. Buck B., Baldock R.A., Rubio J.A. Cluster model of $A=7$ nuclei and the astrophysical S factors for ${}^3\text{He}({}^4\text{He},\gamma){}^7\text{Be}$ at zero energy // *J. Phys.*, 1985, V.11G, P.L11-L16.

116. Buck B., Merchant A.C. Cluster model of $A=7$ nuclei revisited, and the astrophysical S factors for ${}^3\text{He}({}^4\text{He},\gamma){}^7\text{Be}$ and ${}^3\text{H}({}^4\text{He},\gamma){}^7\text{Li}$ at zero energy // *J. Phys.*, 1988, V.14G, P.L211-216.

117. Ахиезер А.И., Ситенко А.Г., Тартаковский В.К. Электродинамика ядер, Киев. Наукова Думка, 1989, 423с.

118. Bergstrom J.C. Inelastic electron scattering from ${}^6\text{Li}$ near the ${}^3\text{H}^3\text{He}$ threshold // *Nucl. Phys.*, 1980, V.A341, P.13-20.

119. Дубовиченко С.Б. Вычисление некоторых электромагнитных характеристик двух-, трех-, и четырех- кластерных систем // *Радиационная физика твердого тела, Алма - Ата*, 1993, С.29-40.

120. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента, Л., Наука, 1975, 436с.

121. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Справочная математическая библиотека. Матрицы и вычисления. // М., Физ.мат.лит., 1984, 318С.

122. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.С. Вариационные методы решения уравнения Шредингера // Вестник АГУ, физ.-мат. сер., Алматы, 2003, Т.2(8), С.50-58.
123. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.С. Методы решения обобщенной задачи на собственные значения // Вестник АГУ, физ.-мат. сер., Алматы, 2003, Т.1(7), С.110-115.
124. Скорняков Л.А. Справочная математическая библиотека. Общая алгебра. // М., Наука, 1990, 591С.
125. Мишина А.П., Проскураков И.В. Высшая алгебра, М., Физ. - мат. литература, 1962, 300с
126. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.С. Конечно - разностные методы решения уравнения Шредингера // Вестник АГУ, физ.-мат. сер., Алматы, 2003, Т.2(8), С.58-66.
127. Буркова Н.А. (private communication).
128. Кукулин В.И. Стохастический метод оптимизации базиса для вариационных расчетов многочастичных систем // Изв. АН СССР Сер. Физ. 1975, Т.39, С.535-542.
129. Kukulin V.I., Pomerantsev V.N., Cooper S.G., Dubovichenko S.B. Improved $^2\text{H}^4\text{He}$ potentials by inversion, the tensor force and validity of the double folding model // Prepr. The Open University, UK, 1997, № OUPD9710, 34p.
130. Дубовиченко С.Б. Тензорный потенциал $^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия в P_2F_2 волнах. Тезисы докл. Ядерная спектроскопия и структура атомного ядра. 1999, 21-24 апреля, Дубна, С.360.
131. Dubovichenko S.B. Tensor potential of $^2\text{H}^4\text{He}$ interaction for P_2F_2 waves. Тезисы докл. 1st Asia Pacific Conference on Few - Body Problems in Physics, NODA/KASHIWA, Japan, August 23-28, 1999, P.62.
132. Buchanan C.D., Yearian M.R. Elastic electron deuteron scattering and possible meson exchange effects // Phys. Rev. Lett., 1965, V.15, P.303-306.
133. Ellias J.I. et al. Measurements of elastic electron deuteron scattering at high momentum transfers // Phys. Rev., 1969, V.177, P.2075-2092.
134. Arnold R.G. et al. Measurement of the ed elastic scattering cross section in the range $0.8 < q < 6 \text{ GeV}^2$ // Phys. Rev. Lett., 1975, V.35, P.776-779.
135. Bhaduri R.K., et al. RMS radius of the deuteron // Phys. Rev., 1990, V.C42, P.1867-1871.
136. Cramer R. et al. Deuteron form factors at high momentum transfer // Z. Phys., 1985, V.C29, P.513-519.
137. Platchkov S. et al. Deuteron $A(q^2)$ structure function and the neutron electric form factor // Nucl. Phys., 1990, V.A508, P.343-352.

138. Auffret S. et al. Deuteron form factor // Phys. Rev. Lett., 1985, V.54, P.649-653.
139. Bosted P. et al. Measurements of the deuteron and proton magnetic form factors at large momentum transfers // Phys. Rev., 1990, V.C 42, P.38-49.
140. Benaksas D., Drickley D., Frerejacque D. Deuteron electromagnetic form factors for $3 < q < 6 \text{ Fm}^{-2}$ // Phys. Rev., 1966, V.148, P.1327-1331.
141. Drickey D.J., Hand L.N. Precise neutron and proton form factors at low momentum transfer // Phys. Rev. Lett., 1962, V.9, P.521-524.
142. Ferro-Luzzi M. et al. Measurement of tensor analyzing power for elastic electron scattering from a polarized deuteron target internal to a storage ring // Phys. Rev. Lett., 1996, V.77, P.2630-2633.
143. Afanasev A.V. et al. Relativistic charge form factor of the deuteron // E-print, LANL, USA, Nucl-th/9712082, 1997, 8P.
144. McGurk N.J., Fiedeldey H. The deuteron wave function at short range and the triton // Nucl. Phys., 1977, V.A281, P.310-324.
145. Муфазанов В.М., Троицкий В.Е. Электромагнитная структура дейтрона // ЯФ, 1981, Т.33, С.1461-1472.
146. Дубовиченко С.Б. Формфакторы дейтрона для Немегенских потенциалов // ЯФ, 2000, Т.63, №5, С.804-808.
147. Балдин А.М. Квантовая электродинамика и электромагнитная структура элементарных частиц // Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц. М., Мир, 1969, С.5.
148. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, М., Наука, 1965, 383с.
149. Дубовиченко С.Б. Методы расчета и компьютерная программа для вычисления ядерных характеристик связанных состояний в потенциалах с тензорной компонентой // Алматы, Каз. Гос. ИНТИ, 1997, 29с.
150. Кукулин В.И., Рыжих Г.Г., Чувильский Ю.М., Эрамжян Р.А. Свойства шести нуклонной системы в динамической мультикластерной модели с антисимметризацией // Препр. ИЯИ АН СССР П-0685, 1990, 36с.
151. Кукулин В.И., Рыжих Г.Г., Чувильский Ю.М., Эрамжян Р.А. Исследование проявления корреляционных и обменных эффектов в электромагнитных форм факторах легких ядер в рамках мультикластерной динамической модели // Изв. АН СССР, сер. физ., 1989, Т.53, С.121-126.
152. Кукулин В.И. Шестинуклонная система как теоретическая ядерная лаборатория // Изв. АН КазССР, сер. физ.-мат., 1988, №2, С.44-55.

153. Kukulin V.I. et al. Multicluster dynamic model for light nuclei and its verification in strong and electromagnetic interaction // J. Phys. Soc. Jnp., Suppl., 1989, V.58, P.777-789.
154. Eramzhyan R.A., Ryzhikh G.G., Kukulin V.I., Tchuvil'sky Yu.M. Exchange and correlation effects in the electromagnetic structure of light nuclei // Phys. Lett., 1989, V.B228, P.1-5.
155. Walliser H., Fliesbach T. Cluster picture of ${}^7\text{Li}$ // Phys. Rev., 1985, V.C31, P.2242-2250.
156. Афанасьев В.Д., и др. Электромагнитная структура ядер ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ // ЯФ, 1996, Т.60, С.97-98.
157. Дубовиченко С.Б. Тензорные ${}^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия в потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями // ЯФ, 1998, Т.61, С.210-217.
158. Kukulin V.I., Pomerantsev V.N., Cooper S.G., Dubovichenko S.B. Improved $d^4\text{He}$ potentials by inversion: The tensor force and validity of the double folding model // Phys. Rev., 1998, V.C57, P.2462-2473.
159. Dubovichenko S.B. Binding energy and ${}^7\text{Li}$ characteristics in three - body model. Тезисы докл. 1st Asia Pacific Conference on Few - Body Problems in Physics, NODA/KASHIWA, Japan, August 23-28, 1999, P.63.
160. Дубовиченко С.Б. Характеристики ядра ${}^7\text{Li}$ в трехтельной $n^2\text{H}^4\text{He}$ модели. Тезисы докл. Ядерная спектроскопия и структура атомного ядра. 1999, 21-24 апреля, Дубна, С.361.
161. Ali S., Ahmad A.A.Z., Ferdous N. A survey of N^4He interaction // Prepr. Int. Center for Theor. Phys., 1984, 1C/84/195, 108p.
162. Collard H., Hofstadter R., Hughes E.B., Johansson A., Yearian M.R. Elastic electron scattering from ${}^3\text{H}$ and ${}^3\text{He}$ // Phys. Rev., 1965, V.138, P.B57-B65.
163. Juster F.P. et al. Tritium electromagnetic form factors // Phys. Rev. Lett., 1985, V.55, P.2261-2264.
164. Beck D., Asai J., Skopik D.M. Triton form factor at from 0.29 to 1.0 Fm^{-2} // Phys. Rev., 1982, V.C25, P.1152-1155.
165. Simon G. Elastic electron and magnetic ed scattering at low momentum transfer // Nucl. Phys., 1981, V.A365, P.285-293.
166. Beck D.H. et al. Tritium form factors at low q // Phys. Rev., 1984, V.C30, P.1403-1408.
167. Borie B. et al. Quantum electrodynamics in bound systems // Karlsruhe Univ., TKP 80-13, 1980, REC., JUN, 24p.
168. Borie B. et al. Improved calculation of the muonic - helium Lamb shift // Phys. Rev., 1978, V.A18, P.324-329.
169. Willey R.S. Excitation of individual particles states of nuclei by inelastic electron scattering // Nucl. Phys., 1963, V.40, P.529-565.

170. Frosh R.F., Mc Carthy J.S., Rand R.E., Yearian M.R. Structure of the ^4He nucleus from elastic electron scattering // *Phys. Rev.*, 1967, V.160, P.874-879.
171. McCarthy J.S., Sick I., Whitney R.R., Yearian M.R. Electromagnetic structure of the ^3He nucleus // *Phys. Rev. Lett.*, 1970, V.13, P.884-888.
172. McGarthy J.S., Sick I., Whitney R.R. Electromagnetic structure of the helium isotopes // *Phys. Rev.*, 1977, V.C15, P.1396-1414.
173. Arnold R.G. et al. Elastic electron scattering from ^3He and ^4He at high momentum transfer // *Phys. Rev. Lett.*, 1978, V.40, P.1429-1435.
174. Dunn P.C., Kowalski S.B., Rad F.N., Sarget C.P., Turchinetz W.E., Goloskie R., Saylor D.P. The ^3He magnetic form factor // *Phys. Rev.*, 1983, V.C27, P.71-82.
175. Sick I. Precise nuclear radii from electron scattering // *Phys. Lett.*, 1982, V.B116, P.212-214.
176. Van Niftric G.J.C., Brockman K.W., Van Oers W.T.H. Magnetization distribution of the ^7Li nucleus as obtained from electron scattering through 180° . The electric quadrupole moment of ^7Li // *Nucl. Phys.*, 1971, V.A174, P.173-179.
177. Hausser O. et al. E1 polarization in coulomb excitation of ^7Li // *Nucl. Phys.*, 1973, V.A212, P.613-617.
178. Green S. et al. Quadrupole moment of ^6Li // *Phys. Rev.*, 1971, V.A4, P.251-258.
179. Sundholm D. et al. The coulomb excitation in ^7Li // *Chem. Phys. Lett.*, 1984, V.112, P.1-7.
180. Vermeer W. et al. Coulomb excitation of ^7Li // *Austr. J. Phys.*, 1984, V.37, P.273-278.
181. McGurk N.J. Deuteron quadrupole moment and energy dependence of the NN interaction // *Phys. Rev.*, 1977, V.C15, P.1924-1928.
182. Weller A., Lehman D.R.. Manifestations of the D - state in light nuclei // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 1988, V.38, P.563-608.
183. Rand R., Frosch R., Yearian M.R. Elastic electron scattering from the magnetic multipole distributions of ^6Li , ^7Li , ^9Be , ^{10}B , ^{11}B and ^{14}N // *Phys. Rev.*, 1966, V.144, P.859-873.
184. Bamberger A. et al. Coulomb excitation of the ^7Li // *Nucl. Phys.*, 1972, V.194, P.193-201.
185. De Vries H. et al. Nuclear charge density distribution parameters from elastic electron scattering // *Atom Data and Nucl. Data Tables.*, 1987, V.36, P.495-501.
186. Suelzle L.R., Yearian M.R., Crannell H. Elastic electron scattering from ^6Li and ^7Li // *Phys. Rev.*, 1967, V.162, P.992-1005.

187. Дубовиченко С.Б. Трехтельная модель ядра ${}^7\text{Li}$ // Изв. РАН Сер. физ., 2000, Т.64, С.2289-2292.
188. Дубовиченко С.Б. Вариационные методы в трехтельной модели // Вестник Каз.ГАСА, 2003, №9/10, С.227-232.
189. Дубовиченко С.Б. Компьютерная программа для расчета характеристик ядра ${}^7\text{Li}$ // Вестник Каз.НТУ, Алматы, 2004, №5, С.174-182.
190. Ajezenberg-Selove F. Energy levels of light nuclei: $A=5-10$ // Nucl. Phys., 1979, V.A320, P.1-224.
191. Fiarman S., Meyerhof W.E. Energy levels of light nuclei: $A=4$ // Nucl. Phys., 1973, V.A206, P.1-64.
192. Кукулин В.И., Краснопольский В.М., Миселхи М.А., Ворончев В.Т. Структура ядер с $A=6$ в рамках трехчастичной модели // ЯФ, 1981, Т.34, С.21-32.
193. Afnan I.R., Tang Y.C. Investigation of nuclear three and four body system with soft core NN potentials // Phys. Rev., 1968, V.175, P.1337-1351.
194. Krasnopolsky V.M., Kukulin V.I. A new many particle variational method // Czech. J. Phys., 1977, V.B27, P.290-304.
195. Krasnopolsky V.M., Kukulin V.I. A stochastic variational method for few body systems // J. Phys., 1977, V.G3, P.795-811.
196. Russell J.L., Phillips Jr.G.C., Reich C.W. Scattering of alpha particles from helium // Phys. Rev., 1956, V.104, P.135-142.
197. Nilson R., Jentschke W.K., Briggs G.R., Kerman R.O., Snyder J.N. Investigation of excited states in ${}^8\text{Be}$ by α - particle scattering from Helium // Phys. Rev., 1958, V.109, P.850-860.
198. Tombrello T.A., Senhouse L.S. Elastic scattering of alpha particles from Helium // Phys. Rev., 1963, V.129, P.2252-2258.
199. Дубовиченко С.Б. Программа расчета ядерных сечений упругого рассеяния бесспиновых частиц // Вестник Каз.ГАСА, 2004, №8, С.194-198.
200. Chien W., Brown R. Study of the $\alpha\alpha$ system below 15 MeV // Phys. Rev., 1975, v.C10, p.1767-1784.
201. Дубовиченко С.Б. Сечения рассеяния в системе частиц с полным спином $1/2$ // Вестник Каз.ГАСА, 2004, №8, С.199-203.
202. Barnard A., Jones C., Well J. Elastic scattering of 2-11 MeV proton by ${}^4\text{He}$ // Nucl. Phys., 1964, V.50, P.604-620.
203. Дубовиченко С.Б. Программа расчета сечений рассеяния для частиц с полным спином 1 // Вестник Каз.ГАСА, 2004, №11, С.252-257.
204. Gruebler W., et al. Phase shift analysis of $d\alpha$ elastic scattering between 3 and 17 MeV // Nucl. Phys., 1975, V.A242, P.265-284.

205. McIntyre I.C., Haeberly W. Phase shift analysis of $d\alpha$ scattering // Nucl. Phys., 1967, V.A91, P.382-398.
206. Gruebler W., et al. $d\alpha$ scattering from 12 to 17 MeV // Nucl. Phys., 1979, V.A331, P.61-73.
207. Bruno M., et al. Experimental study on low energy ${}^2\text{H}({}^4\text{He}, {}^4\text{He}){}^2\text{H}$ elastic scattering // Nuovo Cim., 1982, V.68A, P.35-55.
208. Дубовиченко С.Б. - Программа расчета сечений рассеяния для частиц с полным спином 1 и тензорными силами. Тезисы конф. Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании., Каз.НУ, Алматы, Казахстан, 6 - 10 октября 2004, http://www.ict.nsc.ru/ws/show_abstract.dhtml?ru+110+7891+S.
209. Thompson D.R., Tang Y.C. Study of ${}^3\text{H}{}^3\text{H}$, ${}^3\text{H}{}^3\text{He}$ and ${}^3\text{He}{}^3\text{He}$ systems with the resonant group method // Nucl. Phys., 1968, V.A106, P.591-609.
210. Дубовиченко С.Б. Методы расчета сечений рассеяния не-тождественных ядерных частиц со спином 1/2 // Вестник Каз.ГАСА, 2004, №11, С.257-262.
211. Clegg T., Barnard C., Swint J., Well J. The elastic scattering of protons from ${}^3\text{He}$ from 4.5 to 11.5 MeV // Nucl. Phys., 1964, V.50, P.621-628.
212. Tombrello T. Phase shift analysis for ${}^3\text{He}(p,p){}^3\text{He}$ // Phys. Rev., 1965, V.138, P.B40-B47.
213. Tombrello T.A., Jones C.M., Phillips G.C., Weil J.L. The scattering of protons from ${}^3\text{He}$ // Nucl. Phys., 1962, V.39, P.541-550.
214. Arvieux J. Analyse en dephasages des sections efficaces et polarisations dans la diffusion elastique $p{}^2\text{H}$ // Nucl. Phys., 1967, V.A102, P.513-528.
215. Van Oers W.T.H., Brockman K.W. Phase shift analysis of elastic $\text{N}{}^2\text{H}$ scattering // Nucl. Phys., 1967, V.A92, P.561-583.
216. Jenny B., Gruebler W., Schmelzbach P.A., Konig V., Burgi H.R. Phase shift analysis of ${}^3\text{He}({}^2\text{H}, {}^2\text{H}){}^3\text{He}$ scattering // Nucl. Phys., 1979, V.A324, P.99-107.
217. Arndt R.A., Strakovsky I.I., Workman R.L. An update analysis of NN elastic scattering data to 1.6 GeV // Phys. Rev., 1994, V.C50, P.2731-2742.
218. Дубовиченко С.Б. Компьютерная программа для фазового анализа упругого ${}^4\text{He}$ рассеяния. Труды конф. Современные проблемы и задачи информатизации в Казахстане., КазНТУ, Алматы, Казахстан, 6 - 10 октября 2004, с.327-351.
219. Буртебаев Н., Дубовиченко С.Б., Дуйсебаев Б.А., Журынбаева Г.С., Кожакметова А.Б. Фазовый анализ упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния. // Вестник АГУ им. Абая, Физ. - мат. серия, Алматы, 2005, №13, С.82-90.

220. Nilson R., et al. Alpha-alpha particles scattering in the energy range 12.3 to 22.9 MeV // Phys. Rev., 1956, V.104, P.1673-1680.
221. Bredin D.J., et al. The scattering of alpha particles by helium // Proc. Roy. Soc., 1959, V.A251, P.144-155.
222. Burcham W.E., et.al., Nucl. Phys., 1957, V,3, P.217-220.
223. Conzett H.E., Slobodrian R.J., Compt. Renu. Cong. Int. Phys. Nucl., Paris, 1964, V2, P.228-229.
224. Conzett H., et al. Alpha - alpha scattering in the 36.8 to 47.3 MeV // Phys. Rev., 1960, V.117, P.1075-1079.
225. Igo G. Optical model analysis of the scattering of alpha particles from helium // Phys. Rev. 1960, V.117, P.1079-1085.
226. Darriulat P., et.al. Elastic scattering of $^4\text{He}^4\text{He}$ between 53 and 120 MeV // Phys. Rev., 1965, v. 137, p.B315-325.
227. Бургебаев Н.Т., Дуйсебаев А.Д. Сечения упругого альфа - альфа рассеяния при 49.9 МэВ. Тезисы докл. XXX совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра., Ленинград, 1980, С.393.
228. Дубовиченко С.Б. Программа поиска ядерных фаз упругого рассеяния бесспиновых частиц. Труды КАУ, Алматы, 2004, №5, С.101-109.
229. Дубовиченко С.Б. Программа поиска фаз упругого рассеяния ядерных частиц со спином 1/2 // Вестник Каз.НТУ, Алматы, 2004, №3, С.137-144.
230. Jahns M.F., Bernstein E.M. Polarization in $p\alpha$ scattering // Phys. Rev., 1967, V.162, P.871-877.
231. Brown R.I., Haeberli W., Saladin J.X. Polarization in the scattering of protons by α particles // Nucl. Phys., 1963, V.47, P.212-213.
232. Plummer D.J., et al. A unique of phase shifts for the scattering of protons by helium // Nucl. Phys., 1968, v.A115, p.253-264.
233. Дубовиченко С.Б. Программа поиска ядерных фаз для частиц с полуцелым спином. I // Труды КАУ, Алматы, 2004, №5, С.84-91.
234. Дубовиченко С.Б. Программа поиска ядерных фаз для частиц с полуцелым спином. II // Труды КАУ, Алматы, 2004, Т.5, С.92-100.
235. Dubovichenko S.B., Dzhazairov - Kakhramanov A.V. Photo-nuclear processes for ^6Li nucleus in the potential $^4\text{He}^2\text{H}$ cluster model. Тезисы докл. Nucl. Phys. Conf., August 21-26, 1995, Beijing, China, P.5. 6-33.
236. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Процессы фоторазвала и радиационного захвата ядра ^6Li в $^3\text{H}^3\text{He}$ канале на основе потенциала с запрещенными состояниями. Тезисы докл.

Ядерная спектроскопия и структура атомного ядра. 1994, Харьков, 19-22 апреля, С.314.

237. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Фото-процессы в N^2H системе на основе потенциальных кластерных моделей. Тезисы докл. Совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. 1995, С. Петербург, 27-30 июня, С.355.

238. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Фото-процессы в p^3H и n^3He каналах ядра 4He на основе потенциальных кластерных моделей. Тезисы докл. Совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра 1995, С. Петербург, 27-30 июня, с.356.

239. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Фото-процессы в $^2H^2H$ канале ядра 4He на основе потенциальной кластерной модели. Тезисы докл. Совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра 1995, С. Петербург, 27-30 июня, с.357.

240. Dubovichenko S.B., Dzhazairov - Kakhramanov A.V. Photoneuclear processes in N^2H system on the base of potential cluster model. Тезисы докл. Int. Nucl. Phys. Conf., August 21-26, 1995, Beijing, China, P.5.6-30.

241. Dubovichenko S.B., Dzhazairov - Kakhramanov A.V. - Photoneuclear processes for 4He nucleus in $^2H^2H$ channel in the potential cluster model. Тезисы докл. Int. Nucl. Phys. Conf., August 21-26, 1995, Beijing, China, P.5.6-32.

242. Dubovichenko S.B., Dzhazairov - Kakhramanov A.V. - Photoneuclear processes for 4He nucleus in the p^3He and n^3He channels on the base of potential cluster model. Тезисы докл. Int. Nucl. Phys. Conf., August 21-26, 1995, Beijing, China, P.5.6-31.

243. Dubovichenko S.B., Dzhazairov - Kakhramanov A.V. - Photoneuclear processes for 6Li nucleus in the potential $^3He^3H$ cluster model. Тезисы докл. Int. Nucl. Phys. Conf., August 21-26, 1995, Beijing, China, P.5.6-34.

244. Айзенберг И., Грайнер В. Механизмы возбуждения ядра. // М., Атомиздат, 1973, 347с. (Eisenberg J.M., Greiner W. Excitation mechanisms of the nucleus electromagnetic and wear interactions, North - Holland Publ. Comp., Amsterdam - London, 1970).

245. Dubovichenko S.B. The cross sections for $^4He^{12}C$ radiative capture in the potential cluster model with forbidden states. Тезисы докл. Particles and Nuclei. XIV International Conference SEBAF, USA, 22-28 May, 1996, P.646.

246. Dubovichenko S.B. Photodisintegration of 7Li in the n^6Li channel in the potential cluster model with forbidden states. Тезисы

докл. Particles and Nuclei XIV International Conference SEBAF, USA, 22-28 May, 1996, P.608.

247. Dubovichenko S.B., Dzhazairov - Kakhramanov A.V. Photo-nuclear processes for ${}^7\text{Li}$ and ${}^7\text{Be}$ nucleus in the potential cluster model. Тезисы докл. Int. Nucl. Phys. Conf., August 21-26, 1995, Beijing, China, P.5.6-35.

248. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Гауссовы потенциалы ${}^2\text{H}^4\text{He}$ и ${}^3\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия с запрещенными состояниями // Изв. АН Каз. ССР, сер. физ. - мат., 1988, № 6, С.45-49.

249. Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В., Алтыбаев Г.С. Потенциальное описание упругого ${}^3\text{H}^4\text{He}$ и N^6Li рассеяния // Изв. НАН РК, сер. физ. - мат. 1992, № 2, с.41-55.

250. Дубовиченко С.Б. Программа расчета ядерных фотосечений // Труды конф. New Trends in the Computer Science Master's Curriculum., Kaz.NU, Almaty, Kazakhstan, 31 march - 2 april 2004. С.164-170.

251. Дубовиченко С.Б. Компьютерная программа и методы расчета ядерных фотосечений. Тезисы докл. Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании., Каз.НУ, Алматы, Казахстан, 6 - 10 октября 2004, http://www.ict.nsc.ru/ws/show_abstract.dhtml?ru+110+7892+S.

252. Dubovichenko S.B. Photodisintegration of ${}^4\text{He}$ nucleus in p^3H and n^3He channels on the base of potential cluster model // "Bulletin KSNU, Natural science series", Kaz.SU, Almaty, 1997, P.89-98.

253. Berman B.L., Fultz S. Experimental study of the ${}^6\text{Li}(\text{n},\gamma){}^7\text{Li}$ reaction. // Rev. Mod. Phys., 1975. v.47, p.713; Bianchi N., et al. Photoabsorption and photofission of nuclei // SEBAF PROPOSAL-93-019, April, 1993, 19p.

254. Дубовиченко С.Б. Чечин Л.М. Современные методы программирования актуальных физических задач. Труды конф. Современные проблемы и задачи информатизации в Казахстане., КазНТУ, Алматы, Казахстан, 6 - 10 октября 2004, с.358-390.

255. Robertson R.G.H., Dyer P., Warner R.A., Melin R.C., Bowles T.J., Mc Donald A.B., Ball G.C., Davies W.G., Earle E.D. Observation of the capture reaction ${}^2\text{H}({}^4\text{He},\gamma){}^6\text{Li}$ and its role in production of ${}^6\text{Li}$ in the Big Bang // Phys. Rev. Lett., 1981, V.47, P.1867-1870.