

Дубовиченко С.Б.

Избранные методы ядерной астрофизики

Алматы, 2011

Қазақстан Республикасының Ұлттық ғарыш агенттігі
Национальное космическое агентство
Республики Казахстан
National space agency of the Republic of Kazakhstan

сериясы
ҚАЗАҚСТАНДАҒЫ
ҒАРЫШТЫҚ
ЗЕРТТЕУЛЕР

серия
КАЗАХСТАНСКИЕ
КОСМИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ

series
KAZAKHSTAN
SPACE
RESEARCH

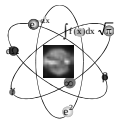
Алматы, 2011

***Бұл кітап Қазақстан Республикасында
алғашқы астрономиялық бақылаулардың
басталуына 70 жыл толуына арналады***

***Книга посвящается 70-ти летию первых
астрономических наблюдений
в Республике Казахстан***

***The book is dedicated to the seventieth
anniversary of the first astronomical
observations in the Republic of Kazakhstan***

Қазақстандағы



Ғарыштық

Том 9

Зерттеулер

ҚР Ұлттық ғарыш агенттігі

*Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар
орталығы*

*В.Г. Фесенков атындағы астрофизика институты
Халықаралық ақпараттандыру академиясы ҚР*

Дубовиченко С.Б.

ЯДРОЛЫҚ АСТРОФИЗИКАНЫҢ ІРІКТЕЛГЕН ӘДІСТЕРІ

**Ядролық астрофизиканың іріктелген
есептерінде ядролық физиканың әдістері**

**Алматы
2011**

УДК 524+539
ББК 22.63
Д 79

Басылымға ұсынған "ҰҒЗТО" ҚР ҰҒА ғылыми техникалық кеңесі,
"В.Г. Фесенков атындағы астрофизика институты"
"ҰҒЗТО" ҚР ҰҒА, және АХА (ҚР) Президиумы

Пікір жазғандар

Ф.-м.ғ.д., профессор **Мухамеджанов А.М.** (ТУ, Техас, АҚШ),
ҚР мемлекеттік сыйлығының лауреаты, академик ҚР ҰИА, ф.-м.ғ.д.,
профессор **Данаев Н.Т.** (ҚазҰУ, Алматы, ҚР),
ҚР мемлекеттік сыйлығының лауреаты, ф.-м.ғ.д.,
профессор **Дуйсебаев А.Д.** (ЯФИ, Алматы, ҚР),
ҚР ХААН академигі, ҚР және РФ ф.-м.ғ.д.,
профессор **Чечин Л.М.** (ФИФА, Алматы, ҚР),
ЖРА корреспондент-мүшесі (РФ), ф.-м.ғ.д.,
профессор **Буртебаев Н.Т.** (ЯФИ, Алматы, ҚР)

Ғылыми редакторы

ҚР және РФ ф.-м.ғ. докторы, профессор **Буркова Н.А.**
(ҚазҰУ, Алматы, ҚР)

Ғылыми кеңесшісі

ҚР ҰҒА академигі, ф.-м.ғ.д., профессор **Боос Э.Г.** (ИФТ, Алматы, ҚР)

Дубовиченко С.Б.

Д79 Ядролық астрофизиканың іріктелген әдістері. Ядролық астрофизиканың іріктелген есептерінде ядролық физиканың кейбір әдістері. – Алматы: В.Г. Фесенков атындағы астрофизика институты «ҰҒЗТОҚ» ҚР ҰҒА баспасы, 2011. – 311 б.

ISBN 978-601-247-339-1

Бұл кітап өте төмен және төмен энергиядағы процестердің және жеңіл ядролы атомдардағы ядролық астрофизикадағы және ядролық физиканың жеке сұрақтарына арналады. Ядролық астрофизикада қарастырылатын термоядролық процестердің ядролық мінездемелерін есептейтін кейбір әдістер келтірілген. Күнде, жұлдыздарда және Өлемдегі термоядролық процестердің сипаттамаларының аймағындағы ядролық астрофизиканың кейбір есептерінің тікелей қолданылатын шешімдерінен алынған нәтижелер.

Кітап үш бөлімнен тұрады, соңғы бес-жеті жылдың ішіндегі шамамен үш ондық жарияланған ғылыми мақалалардың нәтижелерінің негізінде жазылды. Біріншісі - квант бөлшектерінің континуумы немесе байланыс күйі үшін ядролық мінездемелерін есептейтін кейбір жалпы әдістерін сипаттайды. Екіншісі - өте төмен және төмен энергиялы ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ және ${}^3\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{\text{p}^{12}\text{C}}$, ${}^{\text{n}^{12}\text{C}}$, ${}^{\text{p}^{13}\text{C}}$, ${}^4\text{He}^4\text{He}$ жүйелерінің ядролық серпімді шашырауының фазалық талдауының нәтижелері және компьютерлік бағдарламалардың әдістеріне арналады. Үшінші бөлімде үш денелі моделдің негізінде алынған кейбір жеңіл атомдардың, атап айтқанда ${}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ және ${}^{11}\text{B}$ тексеруге қолданылатын, серпімді шашырауының фазаларын анықтау негізінде, Өлемдегі термоядролық процестерді сипаттауға байланысты ядролық астрофизиканың есептерінде қолданылатын жұпты кластераралық потенциалдар нәтижелері келтірілген.

Кітап ядролы-физика саласындағы ҒЗИ және ЖОО PhD докторанттарына және аспиранттарға, жоғарғы курс студенттеріне пайдалы болуы мүмкін.

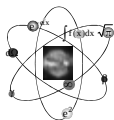
**УДК 524+539
ББК 22.63**

ISBN 978-601-247-339-1

© Дубовиченко С.Б. 2011
© Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 2011

Казахстанские

Том 9



Космические

Исследования

***Национальное космическое агентство РК
Национальный центр космических исследований
и технологий***

***Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова
Международная Академия Информатизации РК***

Дубовиченко С.Б.

ИЗБРАННЫЕ МЕТОДЫ ЯДЕРНОЙ АСТРОФИЗИКИ

**Методы ядерной физики в избранных
задачах ядерной астрофизики**

**Алматы
2011**

УДК 524+539
ББК 22.63
Д 79

Рекомендовано к изданию научно-техническими советами
АО "НЦКИТ" НКА РК, департамента "Астрофизический институт
им. В.Г. Фесенкова" (АФИФ) "НЦКИТ" НКА РК и Президиумом МАИН РК

Рецензенты

Доктор ф.-м.н., профессор **Мухамеджанов А.М.** (Техасский университет, Техас, США),
Лауреат государственной премии РК, академик НИА РК, д.ф.-м.н., профессор **Данаев Н.Т.**
(КазНУ, Алматы, РК),
Лауреат государственной премии РК, д.ф.-м.н., профессор **Дуйсебаев А.Д.**
(ИЯФ, Алматы, РК),
академик МАИН РК, д.ф.-м.н. РК и РФ, профессор **Чечин Л.М.** (АФИФ, Алматы, РК),
член-корр. РАЕ (РФ), д.ф.-м.н., профессор **Буртебаев Н.Т.** (ИЯФ, Алматы, РК)

Научный редактор

Д.ф.-м.н. РК и РФ, профессор **Буркова Н.А.** (КазНУ, Алматы, РК)

Научный консультант

Академик НАН РК, д.ф.-м.н., профессор **Боос Э.Г.** (ФТИ, Алматы, РК)

Дубовиченко С.Б.

Д79 Избранные методы ядерной астрофизики. Методы ядерной физики в
избранных задачах ядерной астрофизики. Алматы: Изд. Астрофизического
института им. В.Г. Фесенкова "НЦКИТ" НКА РК, 2011. – 311 с.

ISBN 978-601-247-339-1

Книга посвящена отдельным вопросам ядерной физики и ядерной астрофизики легких атомных ядер и процессов с ними при низких и сверхнизких энергиях. Приводятся некоторые методы расчета ядерных характеристик термоядерных процессов, рассматриваемых в ядерной астрофизике. Полученные результаты непосредственно применимы к решению некоторых задач ядерной астрофизики в области описания термоядерных процессов на Солнце, звездах и Вселенной.

Книга основана на результатах, примерно, трех-четыре десятилетиях научных статей, опубликованных, в основном, за последние пять-семь лет и состоит из трех разделов. Первый из них посвящен описанию общих методов расчета некоторых ядерных характеристик для связанных состояний или континуума квантовых частиц. Второй – методам, компьютерным программам и результатам фазового анализа упругого рассеяния ядерных $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$, $^4\text{He}^4\text{He}$ и $^4\text{He}^{12}\text{C}$ систем при низких энергиях. В третьем разделе приводятся результаты, полученные на основе трехтельных моделей некоторых легких атомных ядер, а именно, ^7Li , ^9Be и ^{11}B , которые используются для проверки, определяемых на основе фаз упругого рассеяния, парных межкластерных потенциалов, используемых затем в задачах ядерной астрофизики, связанных с описанием термоядерных процессов Вселенной.

Книга может быть полезна студентам старших курсов, аспирантам и PhD докторантам ВУЗов и НИИ астрофизического и ядерно-физического профиля.

**УДК 524+539
ББК 22.63**

ISBN 978-601-247-339-1

© Дубовиченко С.Б. 2011
© КазНУ имени аль-Фараби, 2011

Kazakhstan



Space

Vol. 9

Research

***National Space Agency of the Republic of Kazakhstan
National Center of the Space Research and Technology
V.G. Fessenkov Astrophysical Institute
International Informatization Academy of the Republic of
Kazakhstan***

Dubovichenko S.B.

SELECTED METHODS of NUCLEAR ASTROPHYSICS

**Nuclear Physics Methods in Selected
Nuclear Astrophysics Problems**

**Almaty
2011**

PACS 26.; 25.20.-x; 24.10.-i; 21.60.-n; 21.60.Gx; 02.

The book was recommended to the publish of the Scientific and Technical Councils "NCSRT" NSA Republic of Kazakhstan (RK), V.G. Fessenkov Astrophysical Institute (APHI) department of "NCSRT" NSA RK and Presidium IIA (RK)

Reviewers

Doctor, professor **Muhamedzhanov A.M.** (Texas University, Texas, USA),
Winner of the state award RK, academician IEA RK, doctor, professor

Danaev N.T. (KazNU, Almaty, RK),

Winner of the state award RK, doctor, professor

Duisebaev A.D. (INP, Almaty, RK),

academician IIA RK, doctor RK and Russian Federation (RF), professor

Chechin L.M. (APHI, Almaty, RK),

correspondent-member RANH (RF), doctor, professor

Burtebaev N.T. (INP, Almaty, RK)

Scientific redactor

Doctor RK and RF, professor **Burkova N.A.** (KazNU, Almaty, RK)

Scientific consultant

Academician NAS RK, doctor, professor **Boos E.G.** (PTI, Almaty, RK)

Dubovichenko S.B.

Selected methods of nuclear astrophysics. Nuclear Physics Methods in Selected Nuclear Astrophysics Problems. Almaty: Fessenkov Astrophysical Institute "NCSRT" NSA RK, 2011. – 311 p.

ISBN 978-601-247-339-1

The book covers the certain questions of nuclear physics and nuclear astrophysics of light atomic nuclei and their processes at low and ultralow energies. Some methods of calculation of nuclear characteristics of the thermonuclear processes considered in nuclear astrophysics are given here. The obtained results are directly applicable to the solution of certain nuclear astrophysics problems in the field of description of the thermonuclear processes in the Sun, the stars and the Universe.

The book is based on the results of approximately three-four tens of scientific papers generally published in recent five-seven years and consists of three sections. The first one covers the description of the general methods of calculation of certain nuclear characteristics for the bound states or the continuum of quantum particles. The second section deals with the methods, the computer programs and the results of the phase shift analysis of elastic scattering in $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$, $^4\text{He}^4\text{He}$ and $^4\text{He}^{12}\text{C}$ nuclear systems at low and ultralow energies. The results obtained on the basis of three-body models of certain light atomic nuclei are given in the third section, notably the ^7Li , ^9Be and ^{11}B nuclei which are used for examination of the conjugated intercluster potentials determined on the basis of the phase shifts of elastic scattering and using then in the nuclear astrophysics problems connected with the description of the thermonuclear processes in the Universe.

The book will be useful for advanced students, postgraduate students and PhD doctoral candidates in the universities and research institutes in the field of astrophysics and nuclear physics.

© Dubovichenko S.B. 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Content

АЛҒЫ СӨЗ.....	11
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	14
PREFACE.....	17
КІРІСПЕ.....	20
ВВЕДЕНИЕ.....	24
INTRODUCTION.....	28
I. МЕТОДЫ РАСЧЕТА (CALCULATION METHODS).....	32
<i>Введение (Introduction).....</i>	<i>32</i>
1.1 Обзор возможностей кластерной <i>модели (The review of the cluster model</i> <i>possibilities).....</i>	<i>34</i>
1.2 Потенциалы и волновые функции <i>(Potentials and wave functions).....</i>	<i>43</i>
1.3 Методы фазового анализа (Phase <i>shifts methods).....</i>	<i>45</i>
1.4 Некоторые численные методы (Some <i>numerical methods).....</i>	<i>47</i>
1.5 Обобщенная матричная задача на <i>собственные значения (The generalized</i> <i>matrix eigenvalue problem).....</i>	<i>53</i>
1.6 Общие принципы трехтельной <i>модели (General principles of the three-body</i> <i>model).....</i>	<i>62</i>
1.7 Вариационные методы трехтельной <i>модели (Variational methods for three-body</i> <i>model).....</i>	<i>64</i>
<i>Заключение (Conclusion).....</i>	<i>68</i>
II. ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ (PHASE SHIFTS ANALYSIS).....	69
<i>Введение (Introduction).....</i>	<i>69</i>
2.1 Фазовый анализ упругого $^4\text{He}^4\text{He}$ <i>рассеяния (Phase shifts analysis of the</i>	

<i>elastic ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering</i>).....	71
2.1.1 Обзор экспериментальных данных по упругому ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеянию (Review of the experimental data on elastic ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering)	71
2.1.2 Методы фазового анализа упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния (Methods for phase shift analysis of elastic ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering)	73
2.1.3 Проверка компьютерной программы (Computer program check)	76
2.1.4 Результаты фазового анализа упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния (Results of the ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering phase shifts analysis)	78
2.1.5 Программа для ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ и ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ фазового анализа (The program for ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ and ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ phase shifts analysis)	96
2.2 <i>Фазовый анализ упругого ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ рассеяния (Phase shifts analysis of ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ scattering)</i>	110
2.2.1 Дифференциальные сечения (Differential cross sections).....	110
2.2.2 Фазовый анализ (Phase shifts analysis).....	111
2.3 <i>Фазовый анализ упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния (Phase shifts analysis of $p^{12}\text{C}$ scattering)</i>	125
2.3.1 Дифференциальные сечения (Differential cross sections).....	125
2.3.2 Контроль компьютерной программы (Computer program check)	128
2.3.3 Фазовый анализ упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния (Phase shifts analysis of $p^{12}\text{C}$ scattering)	132
2.3.4 Фазовый анализ упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния (Phase shifts analysis of $n^{12}\text{C}$ scattering)	138

2.3.5 Программа для $n^{12}\text{C}$ и $p^{12}\text{C}$ фазового анализа (The program for $n^{12}\text{C}$ and $p^{12}\text{C}$ phase shifts analysis)	145
2.4 Фазовый анализ упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния (Phase shifts analysis of $p^6\text{Li}$ scattering)	156
2.4.1 Дифференциальные сечения (Differential cross sections).....	156
2.4.2 Фазовый анализ (Phase shifts analysis).....	157
2.4.3 Программа для фазового анализа (Program for phase shifts analysis).....	163
2.5 Фазовый анализ и компьютерные программы для рассеяния частиц со спином $1/2+1/2$ (Phase shifts analysis and computer program for scattering particles with spin $1/2+1/2$).....	175
2.5.1 Система со спин-орбитальным взаимодействием (System with spin-orbit interaction)	175
2.5.2 Система со спин-орбитой и синглет-триплетным смешиванием (System with spin-orbit and singlet-triplet mixing)	192
2.5.3 Система частиц $p^{13}\text{C}$ с полуцелым спином и спин-орбитой (The $p^{13}\text{C}$ system with spin $1/2$ and spin-orbit interaction)	215
Заключение (Conclusion).....	221
III. ТРЕХТЕЛЬНОЯ МОДЕЛЬ (THREE-BODY MODEL)	222
Введение (Introduction).....	222
3.1 Трехтельные конфигурации ядра ^7Li и трехтельная программа (Three-body configuration of ^7Li and three-body program)	224
3.1.1 Потенциалы и фазы (Potentials and phase shifts).....	224
3.1.2 Компьютерная программа (Computer program)	229

3.1.3 Трехтельные результаты (Three-body results)	248
3.2 Трехтельная модель ядра ${}^9\text{Be}$ (Three-body model of ${}^9\text{Be}$).....	252
3.2.1 Потенциалы и фазы рассеяния (Potentials and scattering phase shifts)	252
3.2.2 Трехтельные результаты и фотосечения (Three-body results and photo cross sections)	256
3.3 Трехкластерная структура ${}^{11}\text{B}$ (Three-body structure of ${}^{11}\text{B}$).....	263
3.3.1 Потенциалы и фазы (Potentials and phase shifts).....	264
3.3.2 Трехтельные результаты (Three-body results)	266
Заключение (Conclusion).....	278
ҚОРЫТЫНДЫ	279
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	281
CONCLUSION	284
АЛҒЫС БІЛДІРУ	286
БЛАГОДАРНОСТИ	287
ACKNOWLEDGMENTS.....	288
ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES).....	289

АЛҒЫ СӨЗ

Автор

Күн және жұлдыздардағы термоядролық реакцияларды және ғарыштық құбылыстарды зерттеуге қазіргі кездегі ядролық физиканың табысты нәтижелерін қолдану бақылаулар мен теорияны сапалы келісетін білімдерін құрастыруға мүмкіндік берді, жұлдыздардың эволюциясы мен құрылымын, Әлемдегі химиялық элементтердің таралуын түсіндіру [1]

Бұл кітапта төмен және өте төмен термоядролық процесстерді зерттеулердің аймағында кейбір жаңа табыстарды, яғни астрофизикалық энергияларды және олардың ортақ заңдарын талдау әдістері және қазіргі ядролық физикасы қағидаларына сүйене отырып бейнелеуге талпындық.

Ядролық астрофизиканың іс жүзінде кез келген есептері әдеттегідей, өте төмен энергиялы және термоядролық процесстерде қатысатын жеңіл атом ядролары ядролық астрофизиканың нақтылы мәселелермен байланысты. Мысалы, Күн және жұлдыздардың термоядролық реакцияларының астрофизикалық сипаттамаларына [1,2] өте төмен энергиялы ядролық физика деген түсінікті қатыстырмау мүмкін емес. Мысалы үшін, өз негізінде, ядролық реакциялы жоғары және өте жоғары энергиялы болатын, Үлкен жарылыс болғандағы процесстерді талдау кезінде, қазіргі кездегі элементар бөлшектер физикасының әдістерінің бірі "Стандартты Моделді" қолданбау мүмкін емес [3,4,5]. Басқаша айтқанда, астрономиялық құбылыстарды және астрономиялық

объектілердің физикалық қасиеттерін физика заңдарын және жекеленген ядролық физиканы қолданбау мүмкін емес!

Біз бұл кітапта, Күн және жұлдыздардағы термоядролық реакцияларды сипаттамасы беру үшін, яғни кейбір ядролық реакцияларды төмен және өте төмен энергияларда қолданылатын астрофизикалық энергиялардың ядролық физикасының нәтижелері қараймыз. Бұл кітап негізінен соңғы бес-жеті жыл ішінде Ресейде, Европада, АҚШ, ТМД және Қазақстанда жарияланған шамамен отыз ғылыми мақалалардан және үш бөлімнен тұрады.

Біріншісі жалпы есептеу әдістерін шолуға арналған, кейбір ядролық сипаттамалар үшін, берілген потенциалдық өзара байланыстағы бөлшектер жүйесінің толқындық функцияларын, байланған – күйлер немесе континуумдерде табу үшін.

Екінші әдісте, астрофизикалық энергиядағы ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ және ядролық бөлшектердің серпімді шашырауының фазалық талдауының нәтижелері p^3He , p^6Li , p^{12}C , n^{12}C , p^{13}C , ${}^4\text{He}^4\text{He}$ және компьютерлік бағдарламалар қамтылған. Бұл нәтижелер үздіксіз және дискретті спектрлерде жұп кластераралық өзара байланысу потенциалдарын құрастыру үшін қолданылады. Бұл алынған потенциалдар сайып келгенде Өлемнің термоядролық процесстерінің кейбір негізгі сипаттамаларын есептеулері үшін қолданылады [3].

Үшінші бөлімде кейбір жеңіл атом ядроларының үш – денелік модельдерінің нәтижелері беріледі, атап айтқанда, ${}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ и ${}^{11}\text{B}$, жұп кластераралық серпімді шашырауының фазаларының негізінде алынатын потенциалдарын тексеруге мүмкіндік береді.

Қазіргі кезде ғарышқа ұшудың мүмкіндіктерін барлық жағынан бақылаумен анықтайды, ол бүкіл ғарыш ғылымының дамуына үлкен нәтижелер бергенін атып өтуіміз қажет. Сонымен қатар, бүгінгі уақытта қазақсандық астрофизиктердің әлемдік астрономия

ғылымына үлесін көруге және атап айтуымыз қажет.

Автор, осы монографияны әзірлеуде, атап айтқанда Қазақстан Республикасының халықаралық деңгейін күшейтуге қатысты екі ең маңызды тарихи оқиғаларды айғақ ретінде айта алады:

– алғашқы ғарышкер Ю.А.Гагариннің Жерден "Восток" ғарыш кемесімен "Байқоңыр" ғарыш айлағынан ұшқанына 50 жыл толу тойымен байланысты.

және

– отандық ғылымның дамуына жаңа қарқын немесе белсенділік берген, біздің мемлекетіміздің тәуелсіздігіне 20-жыл толуына байланысты.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Применение достижений современной ядерной физики к изучению космических явлений и термоядерных реакций на Солнце и звездах позволило построить качественно согласующиеся с наблюдениями теорию образования, строения и эволюции звезд, объяснить распространенность химических элементов во Вселенной [1].

В этой книге представлены новые достижения в области исследований термоядерных процессов при низких и сверхнизких, т.е. астрофизических энергиях и методов их анализа с точки зрения общих законов и принципов современной ядерной физики.

Практически любые задачи ядерной астрофизики связаны с определенными проблемами ядерной физики, обычно, сверхнизких энергий и, как правило, легких атомных ядер, участвующих в термоядерных процессах [1,2]. Например, невозможно рассматривать астрофизические характеристики термоядерных реакций на Солнце и звездах, не привлекая для этого понятий и представлений ядерной физики сверхнизких энергий [3]. Невозможно анализировать процессы, протекавшие при Большом Взрыве [4], которые, в своей основе, являются ядерными реакциями при высоких и сверхвысоких энергиях, не привлекая для этого модели и методы современной физики элементарных частиц, например, "Стандартной Модели" [5]. Иначе говоря, невозможно рассматривать астрономические явления и физические свойства астрономических объектов, не привлекая для этого законы физики, в целом, и ядерной физики, в частности!

В книге будут рассмотрены некоторые методы и ре-

зультаты ядерной физики астрофизических энергий, которые используются для описания термоядерных реакций на Солнце и звездах, т.е. некоторых ядерных реакций при низких и сверхнизких энергиях. Книга основана на результатах, примерно, трех-четырех десятков научных статей, опубликованных, в основном, за последние пять-семь лет в России, Европе, США, СНГ и Казахстане и состоит из трех разделов.

Первый из них посвящен описанию общих методов расчета некоторых ядерных характеристик для связанных состояний и континуума, которые используются для нахождения волновой функции системы частиц при заданных потенциалах взаимодействия.

Второй содержит методы, компьютерные программы и результаты фазового анализа упругого рассеяния ядерных частиц $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$, $^4\text{He}^4\text{He}$ и $^4\text{He}^{12}\text{C}$ при астрофизических энергиях. Эти результаты используются для построения парных межкластерных потенциалов взаимодействия в непрерывном и дискретном спектре. Полученные таким образом потенциалы используются далее для расчетов некоторых основных характеристик термоядерных процессов Вселенной [3].

В третьем разделе приводятся результаты трехтельных моделей некоторых легких атомных ядер, а именно, ^7Li , ^9Be и ^{11}B , которые позволяют проверить, получаемые на основе фаз упругого рассеяния, парные межкластерные потенциалы.

Вместе со сказанным выше, следует подчеркнуть, что эти результаты стали возможными на фоне общих успехов в развитии всей космической науки, которая в наше время во многом определяется наблюдательными возможностями пилотируемой космонавтики. Кроме того, сегодня все более заметным становится и вклад казахстанских астрофизиков в мировую астрономическую науку.

Поэтому автор специально констатирует тот факт,

что подготовка данной монографии была стимулирована двумя важнейшими историческими событиями, связанными с укреплением международного имиджа Республики Казахстан, а именно:

- 50-летием запуска с космодрома "Байконур" космического корабля "Восток", пилотируемого первым космонавтом Земли Ю.А.Гагариным

и

- 20-летием независимости нашего государства, давшего новый импульс развитию отечественной науки.

PREFACE

The application of the achievement in the modern nuclear physics to study of cosmic phenomena and thermonuclear reactions in the Sun and the stars allows one to create the theory of formation, construction and evolution of stars that is qualitatively conform with measurements and explain the abundance of chemical elements in the Universe [1].

The new achievements in sphere of thermonuclear processes at low and ultralow energies, i.e. astrophysical energies and methods of their analysis in terms of modern nuclear physics general laws and concepts was done in this book.

Practically, any nuclear astrophysics problems are connected with the certain nuclear physics problems, usually, as a rule, with light atomic nuclei at ultralow energy region in thermonuclear processes [1,2]. It is impossible, for example, to consider astrophysical characteristics of thermonuclear reactions in the Sun and the stars, without using the ideas and conceptions of ultralow energy nuclear physics for this consideration [3]. It is impossible to analyze the astrophysical processes during the Big Bang [4], which, basically, are the nuclear reactions at high and ultrahigh energies, without using the models and methods of modern elementary-particle physics, for example, "Standard Model" [5]. In other words, it is impossible to consider astronomical phenomena and physical properties of astronomical objects without using laws of physics, in whole, and nuclear physics, particularly.

In this book, we will consider some methods and results of nuclear physics of astrophysical energies using for the description of thermonuclear reactions in the Sun

and the stars, i.e. certain nuclear reactions at low and ultralow energies. The book is based on the results of about three-four tens of scientific papers that were published in Europe, USA, Russia, CIS and Kazakhstan and consists of three sections.

The first of them is devoted to the description of the general calculation methods of nuclear characteristics for bound states or continuum, which are used for finding of wave function of system of particles at the specified potentials.

The second contains methods, computer programs and results of the phase shift analysis of the elastic scattering of nuclear particles in $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$, $^4\text{He}^4\text{He}$ and $^4\text{He}^{12}\text{C}$ systems at astrophysical energies. These results are used for the construction of pair intercluster interaction potentials in continuous and discrete spectrum. The potentials, obtained in such a way, are used further for the calculations of some fundamental characteristics of thermonuclear processes in the Universe [3].

The results of three-body models of some light atomic nuclei, specifically ^7Li , ^9Be and ^{11}B , are given in the third section. They allow us to check the pair intercluster potentials, obtained on the basis of the phase shifts of elastic scattering.

It should be note, together with the said above, that these results become possible on the background of general successes in the development of the space science, which, in the present time, is determined by the observation facilities of the manned space exploration. In addition, the contribution of the astrophysicists of Kazakhstan to the world astronomical science becomes more appreciable for today.

Therefore, the author specially states the fact that the preparation of this monograph was stimulated by the two significant historical events, connected with the strengthening of the international image of the Republic of Kazakhstan, namely:

– The fiftieth anniversary of the launching of the spaceship “Vostok” manned by the first spaceman of the Earth Yuri Gagarin from the spaceport “Baikonur”

and

– The twentieth anniversary of the independence of our state, which gives a new impetus to the development of the science of our country.

КІРІСПЕ

Ядролық реакциялардың қималары көптеген тәжірибелік мәліметтер бойынша төмен энергиядағы ядролық шашырау ядроның құрылымының негізгі ақпарат көзі және ядролар арасындағы және олардың фрагменттерінің ықтималдылығына кластерлеу қасиетінде және өзара байланыстыратын механизмдерінде [9].

Табиғи термоядролық синтез ағатын термоядролық процесстердің басты сипаттамаларының бірі, астрофизикалық S-фактор болып табылады – бұл реакцияның ағу жылдамдығын анықтайтын фактор. Сірә, ядролық астрофизиканың негізгі есебі S-фактордың өлшемін анықтау болып табылады деп санауға болады, яғни бұл нөлге ұмтылатын энергиялар. Бұл есептің шешуін тәжірибелік және теориялық ядролық физиканың мүмкіндіктерінен шығатын бірнеше әдістермен анықтау мүмкін. Солардың бірі тек қана ядролық реакциялардың толық қималарының өлшемдерінің өте төмен энергияларының тәжірибелік әдістеріне негізделген, екінші, нақтылы атап айтқанда, анықталған теория негізіндегі астрофизика аймағындағы ядролық процесстері туралы.

Негізінен, астрофизикалық S-факторды тәжірибе түрінде анықтауға болады, бірақ қазіргі кезде өзара байланысатын жеңіл ядролардың көпшілігі үшін әртүрлі термоядролық процесстерге қатысатын энергиялары шамамен, 0.1÷1.0 МэВ аймағында болу керек. Тәжірибелік өлшемдердің қателері жүзге дейін сирек жетеді және одан көп пайызға жетеді [6]. Алайда, астрофизикалық есептеулері үшін, мысалға, жұлдыздар эволюциясының моделін нақтылауда және дамытуда, мүмкін, және барлық Біздің Әлемнің [4,8] қазіргі кезеңдегі дамуының мәні мен және де ең кішкентай мүмкін

болатын қателермен, 0.1 ден 100 кэВ, әдеттегідей энергиялары жұлдыздың ортасындағы температуралары $10^6 \div 10^9$ К болатын аймақтағы талаптарды қажет етеді [7].

Астрофизикалық S-фактордың шамаларын анықтау әдістерінің бірі, нөлдік энергияның, яғни 1 кэВ шамасында және одан да төмен, бұл тәжірибеде анықталатын, төмен энергиялар аймақтарындағы оның мәндерінің экстраполяциясы болады. Бұл қолданылған әдіс ең алдымен кейбір термоядролық реакциялардың қимасының өлшемінің орындауынан кейін орындалады. Бірақ, бұл астрофизикалық S-факторды анықтауының үлкен тәжірибелік қателері мұндай нәтижелердің құндылығы айтарлықтай төмендетеді, жүргізілген экстраполяциялардың үлкен мәнсіздікке алып келеді [6].

Екінші, өзекті және артықшылығы бар жол, астрофизикалық S-фактордың теориялық есептеулерінде болады – нақтылы ядролық модельдеудің негізінде радиациялық қармап алуды кейбір термоядролық реакцияның факторы [3]. Бұл әдіс ядролық процесстердің кейбір үлгісі егер оларда болатын энергиялардың аймағындағы тәжірибелердің мәліметтерін сипаттауға дұрыс мүмкіндік берген, анық жорамалдау негізделген, ол астрофизикалық S-фактордың болжамды үлгісін алып береді, шамамен 1 кэВ, бірақ қазіргі кезде тікелей тәжірибелік өлшеу мүмкіндігі жоқ.

Кез келген ядролық модельді ортақ қағида бойынша қазіргі ядролық физика және кванттық механиканың нақтылы микроскоптық дәлелдеуінен жасалынады, бұл нөлдік энергияға тәжірибелік мәліметтерінің кәдімгі экстраполяциясы екінші жолдың артықшылығын көрсетеді [9]. Сондықтан, мұндай модельдің кейбір болжаушы мүмкіндіктерінің болуы нақты түрде үміттендіреді, әсіресе, тәжірибелік мәліметтері бар, энергия аймағында болжаушы нәтижелер алуға болатын және ол жаңа нәтижелерден еш айырмашылығы жоқ.

Ядролық модельді таңдауда, онда есептеулер үшін біз Юнга схемалар бойынша орбиталық күйлердің классификациясы бар жеңіл атом ядроларының потенциалдық кластер модельдері қолданылады [10-13]. Бұл модель қарапайым

астрофизикалық есептеулерді, сипаттамаларды анықтауға арналған, мысалы, радиациялық қармау астрофизикалық S-фактор, электромагниттік өту кластерінің шашырау күйінен осы кластерлік каналдардан жеңіл ядролардың атамдарының байланыс күйіне өтуі [14].

Негізінен, осы кітап потенциалдық үш кластерлі модельдердің кейбір мүмкіндіктерінің демонстрациясы және серпімді шашыратудың фазаларын талдауды, нәтижелері кластераралық кластер потенциалдарының құрастыруы үшін керек болатын серпімді шашыратудың фазалық талдауына бірнеше жеңіл ядролардың мысалында және үш бөлімдерден тұрады.

Біріншісінде олардың ішінен есептеулердің жалпы әдістері қаралады [9,15]. Екіншісінде – компьютерлік бағдарламалары және $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$, $^4\text{He}^4\text{He}$ серпімді шашыратуының фазалық талдауының нәтижелері және төмен және өте төмен энергиядағы $^4\text{He}^{12}\text{C}$ кластерлері олар ядролық астрофизика есептеріндегі кластераралық потенциалдарын құрастыруы үшін қолданылады [14,15]. Үшінші бөлімде үш денелі кейбір жеңіл атом ядроларының потенциалдық модельдері, атап айтқанда, ^7Li , ^9Be және ^{11}B шашырау фазаларының суырылған тәжірибелерінің негізінде аралық кластер потенциалдарын құрастыруға нақтылы тесттер қызметін атқарады [16].

1-ші тарауда есептеудің айтылған әдістері ядролық қасиеттер және бұдан әрі қаралатын процесстердің әр түрлі мінездемелерінің анықтауындағы бір мәнсіздіктен құтылуға мүмкіндік береді. Мысалы, алгоритмдарды келтірсек, әртүрлі спинді кванттық бөлшектердің жүйелері үшін серпімді шашыратудың фазаларының пішінді мінездемелерін кітапта қаралатын есептеулері үшін компьютерлік бағдарламалар берілген [17].

2-ші тарауда фазалық талдаудың нәтижелері, яғни серпімді шашыратудың фазасын, алуға мүмкіндік береді, алдыңғы кітапта жартылай қарастырылған, болашақта әр түрлі астрофизикалық қосымшалар үшін қолданылатын өзара байланысатын кластерлік потенциалдар [14].

3-ші тарауда кейбір үш денелі модельдерді қолдану

кластераралық потенциалдарының фазалық талдауының негізінде қосымша ресми түрде мақұлдауы, және ядролық жүйелер және ядролық реакциялардың астрофизикалық мінездемелерімен Күн және жұлдыздарда ағатын төмен және өте төмен энергияларда есептеулерде олардың ары қарай қолданылғыштығын анықтауға мүмкіндік береді [1,3].

Кітапта төмен энергиялы ядролық физиканың негізгі алынатын жалғыз емес әдістері және термоядролық реакцияларды есептеу үшін содан соң астрофизикалық энергияларда қолданылатын нәтижелер көрсетілген. Сайып келгенде, төмен энергиялы ядролық физиканың әдістерінің негізінде ядролық астрофизиканың Әлемдегі ағатын нақтылы процесстер қаралады.

Ядролық сипаттамалардың қалай алынатыны көрсетілген, астрофизикалық есептеулерді орындауы үшін қолданылатын кластераралық потенциалдарын құру үшін қолданылатын серпімді шашыратудың фазалары [14]. Олардың құрастыруының дұрыстығын көрсететін үш денелі есептеулердегі потенциалдарды тексерудің мысалдары келтірілген.

Бұл кітап, қазіргі ядролық астрофизикада қолданылатын барлық әдістерді және де термоядролық процесстерді жеткілікті түрде түсіндіруге талаптанбайды. Кітап, төмен энергиялы ядролық физиканың тек қана, кейбір әдістеріне және нәтижелеріне арналған, ол әдістер ядролық астрофизиканың нақтылы кейбір есептерінде, мысалға, Әлемдегі және жұлдыздардағы, Күндегі термоядролық реакцияларды түсіндіруде қолданылады.

ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные экспериментальные данные по сечениям ядерных реакций и ядерного рассеяния при низких энергиях являются основным источником информации о структуре ядер, свойствах и механизмах взаимодействия между ядрами и их фрагментами, вероятности кластеризации таких ядер [9].

Одной из главных характеристик термоядерных процессов, протекающих в природных термоядерных котлах – звездах или реакциях управляемого термоядерного синтеза, является астрофизический S -фактор, определяющий скорость протекания такой реакции. Поэтому можно, по-видимому, считать, что основной задачей ядерной астрофизики является определение формы S -фактора и его зависимости от энергии в области нулевой энергии, т.е. при энергиях, стремящихся к нулю. Решить эту задачу можно несколькими способами, вытекающими из возможностей экспериментальной и теоретической ядерной физики. Один из них основывается исключительно на экспериментальных методиках измерений полных сечений ядерных реакций при сверхнизких энергиях, а второй, на определенных теоретических, а именно, модельных представлениях о ядерных процессах в астрофизической области энергий.

В принципе, астрофизический S -фактор всегда можно определить экспериментально, но в настоящее время для большинства взаимодействующих легких ядер, которые участвуют в различных термоядерных процессах, это оказывается возможным только при энергиях, примерно, в области $0.1 \div 1.0$ МэВ. Причем ошибки экспериментальных измерений не редко доходят до ста и более процентов [6]. Однако, для реальных астрофизических расчетов, например, развития и

уточнения модели эволюции звезд [7], а, возможно, и всей нашей Вселенной на современном этапе ее развития [4,8], его значения, причем, с минимально возможными ошибками, требуются при энергиях, как правило, в области от 0.1 до 100 кэВ, что соответствует температурам в центре звезды порядка $10^6 \text{ К} \div 10^9 \text{ К}$.

Один из методов определения величины астрофизического S -фактора при нулевой энергии, т.е. энергии порядка 1 кэВ и меньше, это экстраполяция его значений из области, где он экспериментально определим, в область более низких энергий. Это обычный путь, который используется, в первую очередь, после выполнения измерения сечения некоторой термоядерной реакции. Однако большие экспериментальные ошибки определения S -фактора [6] приводят к большим неоднозначностям проводимых экстраполяций, что существенно снижает ценность таких результатов.

Второй, и, по-видимому, наиболее перспективный и предпочтительный путь, заключается в теоретических расчетах S -фактора некоторой термоядерной реакции, например, радиационного захвата на основе определенной ядерной модели [3]. Такой метод основан на вполне очевидном предположении, что если некоторая модель ядерных процессов позволяет правильно описать экспериментальные данные в той области энергий, где они имеются, то допустимо предположить, что она будет правильно передавать форму S -фактора и при более низких энергиях, порядка 1 кэВ, где на сегодняшний день прямые экспериментальные измерения его значений пока еще не возможны.

В этом и заключается определенное преимущество второго подхода [9] над обычной экстраполяцией экспериментальных данных к нулевой энергии, поскольку любая ядерная модель строится так, что имеет вполне определенное микроскопическое обоснование с точки зрения общих принципов современной ядерной физики и квантовой механики. Поэтому имеется вполне определенная надежда в существовании некоторых предсказательных возможностей такой модели, особенно, если области энергий, где имеются экспериментальные данные и в которой требуется получить новые, т.е.,

по сути, предсказательные результаты, существенно не отличаются.

Что касается выбора ядерной модели, то нами для подобных расчетов обычно используется потенциальная кластерная модель (ПКМ) легких атомных ядер с классификацией орбитальных состояний по схемам Юнга [10,11,12,13]. Такая модель предоставляет сравнительно много простых возможностей для выполнения различных расчетов астрофизических характеристик, например, астрофизического S -фактора или полных сечений радиационного захвата для электромагнитных переходов из состояний рассеяния кластеров на связанные состояния легких атомных ядер в этих кластерных каналах [14].

В целом, данная книга посвящена демонстрации некоторых возможностей потенциальных трехкластерных моделей и фазовому анализу упругого рассеяния, результаты которого требуются для построения межкластерных потенциалов по фазам рассеяния, на примере нескольких легких ядер и состоит из трех разделов.

В первом из них рассматриваются общие методы расчетов [9,15]. Во втором – методы, компьютерные программы и результаты фазового анализа упругого рассеяния $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$, $^4\text{He}^4\text{He}$ и $^4\text{He}^{12}\text{C}$ кластеров при низких и сверхнизких энергиях, которые используются для построения межкластерных потенциалов в задачах ядерной астрофизики [14,15]. И, наконец, в третьем разделе приведены результаты трехтельной, трехкластерной потенциальной модели некоторых легких атомных ядер, а именно, ^7Li , ^9Be и ^{11}B , которые служат определенным тестом качества построения межкластерных потенциалов на основе извлеченных из эксперимента фаз рассеяния [16].

Изложенные методы расчета (Раздел 1) позволяют избежать неоднозначности в определении различных характеристик ядерных свойств и процессов, которые рассматриваются далее. Привести алгоритмы, а в дальнейшем и компьютерные программы для расчетов, рассматриваемых в книге, модельных характеристик, например, фаз упругого рассеяния для систем квантовых частиц с разным спином [17].

Результаты фазового анализа (Раздел 2), т.е. фазы упругого рассеяния, позволяют получать, как уже говорилось, межкластерные потенциалы взаимодействия, которые могут использоваться в дальнейшем для различных астрофизических приложений, частично рассмотренных, например, в нашей предыдущей книге [14].

Использование некоторых трехтельных моделей (Раздел 3) дает возможность дополнительного апробирования полученных на основе фазового анализа межкластерных потенциалов, и выяснения их дальнейшей применимости в расчетах, связанных с астрофизическими характеристиками ядерных систем и ядерных реакций при низких и сверхнизких энергиях, которые протекают на Солнце и звездах [1,3].

Книга демонстрирует определенные, причем, не единственные методы ядерной физики низких энергий и, получаемые на их основе, результаты, которые используются затем для расчета характеристик термоядерных реакций при астрофизических энергиях [14]. Показано, как получать некоторые ядерные характеристики, в частности, фазы упругого рассеяния, использующиеся для построения межкластерных потенциалов, применяемых для выполнения астрофизических расчетов [14]. Приведены примеры проверки таких потенциалов в трехтельных расчетах, которые демонстрируют корректность их построения.

Конечно, данная книга не претендует на исчерпывающее изложение всех методов, используемых в современной ядерной астрофизике даже при объяснении термоядерных процессов. Она посвящена только некоторым методам и результатам ядерной физики низких энергий, которые могут быть непосредственно использованы для решения определенного круга задач ядерной астрофизики при описании термоядерных реакций на Солнце, звездах и Вселенной.

INTRODUCTION

The numerous experimental data on cross-sections of nuclear reactions and nuclear scattering at low energies are the main source of information about nuclear structure, properties and mechanisms of interaction between nuclei and their fragments, about probability of clusterization of such nuclei [9].

One of the main characteristics of thermonuclear processes, flowing in the natural thermonuclear reactors – stars or in controlled thermonuclear fusion, is the astrophysical S -factor, determining the reaction rate. Therefore, it is possible, evidently, to consider that the main problem of nuclear astrophysics is the obtaining of the form of the S -factor and its dependence from energy in the zero energy range, i.e. at vanishing energies. This problem can be solved by few methods; they follow from the resources of experimental and theoretical nuclear physics. One of them is exclusively based on experimental procedures of measurement of total cross-sections of nuclear reactions at ultralow energies, and the second is based on certain theoretical, specifically model-based, representations of nuclear processes in the astrophysical energy range.

In principle, the astrophysical S -factor can be obtained experimentally, but, at present, for the majority of interacting light nuclei, taking place in different thermonuclear processes, it is possible only at the energy range about $100 \text{ keV} \div 1 \text{ MeV}$. At that, the errors of experimental measurements reach up to one hundred and more percents, quite often [6]. However, for real astrophysical calculations, for example for the developing and adjusting of the star evolution model [7] and, probably, for the whole Universe at the modern stage of its evolution [4,8], the values of astrophysical S -factor, with the minimally possible

errors, are required at the energy range about 0.1-100 keV, which corresponds to the temperatures in the star core about $10^6 \text{ K} \div 10^9 \text{ K}$.

One of the methods for obtaining the astrophysical S -factor at zero energy, i.e. the energy on the order of 1 keV and less, is the extrapolation of its values to lower energy range where it can be determined experimentally. It is the general way that is used, first of all, after carrying out the experimental measurements of cross-sections of certain thermonuclear reaction. But, the large experimental errors in obtaining of the S -factor [6] lead to the big ambiguities of the calculated extrapolations and this fact essentially reduces the importance of such results.

The second and, evidently, most preferable approach consists in theoretical calculations of the S -factor of some thermonuclear reaction, for example the radiative capture reaction, on the basis of certain nuclear model [3]. This method is based on the obvious assumption: if there is the certain nuclear model that correctly describes the experimental data of the astrophysical S -factor in that energy range where these data exist, then it is reasonably assume that this model will describe the form of the S -factor correctly at lower energies (about 1 keV); because of the fact that its direct experimental measurements can not be feasible so far, at present.

This is the certain advantage of the second approach [9] stated above over the simple data extrapolation to zero energy, because the using model has, as a rule, the certain microscopic justification with a view to the general principles of nuclear physics and quantum mechanics. Therefore, there is well defined hope in the existence of certain predictive resources of such model, especially, if there is no essential difference between the results obtaining in the energy ranges where experimental data exist and predictive results.

Concerning the nuclear model choice: we usually use the potential cluster model for light atomic nuclei with the classification of the orbital states according to Young's schemes [10-13]. This model gives comparatively a lot of simple possibilities for carrying out of different calculations of astrophysical characteristics, for example, the astrophysical S -

factor of radiative capture for electromagnetic transitions from the states of cluster scattering to the bound states of light atomic nuclei in these cluster channels [14].

In the large, this book is devoted to the demonstration of some possibilities of potential three-cluster models and to the phase shift analysis of elastic scattering. The results of this analysis are needed for the construction of the intercluster potentials according to phase shifts of scattering by example few light nuclei. In addition, this book consists in three sections.

The general calculation methods [9,15] are considered in the first of them. In the second – methods, computer programs and results of the phase shift analysis of the elastic scattering in the $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$, $^4\text{He}^4\text{He}$ and $^4\text{He}^{12}\text{C}$ cluster systems at low and ultralow energies, which are used for the construction of the intercluster potentials for nuclear astrophysics problems [14,15]. Finally, the results of three-body (three-cluster) potential model of few light atomic nuclei, notably ^7Li , ^9Be and ^{11}B , which are in use as a certain quality test for the construction of the intercluster potentials on the basis of scattering phase shifts extracted from the experiment [16], are given in the third sections.

The given calculation methods (Section 1) allow to avoid ambiguities in the obtaining of different characteristics of nuclear properties and processes, which are considered further. The algorithms and, in what follows, computer programs for the calculation of the considered model characteristics, for example, phase shifts of elastic scattering for quantum particle systems with different spin [17], are given here.

The results of the phase shift analysis (Section 2), i.e. the phase shifts of elastic scattering allow to obtain, as it was said, the intercluster interaction potentials, which can be used in future for different astrophysical applications, partially considered, for example, in our previous book [14].

The usage of certain three-body models (Section 3) gives the possibility of the additional approbation of the obtained on the basis of phase shift analysis intercluster potentials, and clearing of their future applicability in calculations connected with astrophysical characteristics of nuclear systems and nuclear reactions at low and ultralow energies flowing in the Sun and the

stars [1,3].

The book demonstrates the certain and not the unique methods of low energy nuclear physics, and the results, obtained on their basis, which are used further for the calculation of the thermonuclear reactions at astrophysical energies. Thus, the certain questions of nuclear astrophysics flowing in the Universe are considered on the basis of the methods of low energy nuclear physics.

It was shown how to obtain certain nuclear characteristics, particularly, phase shifts of elastic scattering, which are used for the construction of intercluster potentials applying for carrying out astrophysical calculations [14]. The examples, which demonstrate correctness of their construction, are given here for checking such potentials in three-body calculations.

Certainly, this book does not claim to exhausting description of the whole methods, using in modern nuclear astrophysics, even in the case of explanation of thermonuclear processes. It is devoted only to the certain methods and results of low energy nuclear physics, which can be directly used for solving of the certain scope of nuclear astrophysics problems of the thermonuclear reactions in the Sun, the stars and the Universe.

I. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

Calculation methods

Большинство задач ядерной физики требуют знания волновой функции относительного движения частиц, которые участвуют в ядерных столкновениях или определяют связанное состояние ядра, т.е. являются внутренними фрагментами полной системы. Такую функцию можно найти из решений уравнения Шредингера для каждой конкретной физической задачи в дискретном или непрерывном спектре, если известен потенциал взаимодействия этих частиц [17].

Введение **Introduction**

В этом разделе кратко изложены некоторые математические методы и численные алгоритмы, используемые в фазовом анализе, при решении радиального уравнения Шредингера и в трехтельной вариационной задаче. В частности, описанные здесь методы, позволяют решать обобщенную матричную задачу на собственные значения и собственные функции с использованием альтернативного способа, который, особенно в трехтельной модели, приводит к устойчивому алгоритму решения.

Изложению этих методов предшествует краткий обзор некоторых основных результатов, полученных в потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями (ЗС) и классификацией орбитальных состояний по схемам Юнга. Использование подобных моделей обусловлено тем, что до настоящего времени не существует общей и достаточно законченной теории легких атомных ядер. Поэтому для анализа отдельных ядерных характеристик используются различные физические модели и методы [12,18,19,20,21,22,23]. В этой

связи, большой интерес представляет изучение возможностей потенциальной кластерной модели, использующей, в том числе, межкластерные взаимодействия с запрещенными состояниями.

В ПКМ считается, что ядро состоит из двух бесструктурных, но не точечных фрагментов – кластеров, которым можно сопоставить свойства соответствующих ядерных частиц в свободном состоянии. Используемые потенциалы с ЗС позволяют эффективно учитывать принцип Паули в межкластерных взаимодействиях и не требуют явной антисимметризации полной волновой функции системы, что заметно упрощает все компьютерные вычисления [13,14,17,24].

Параметры этих потенциалов обычно согласованы с фазами упругого рассеяния соответствующих свободных частиц. В случае большой вероятности кластеризации рассматриваемых ядер ПКМ позволяет правильно воспроизвести основные характеристики их связанных состояний в этих кластерных каналах [12,13].

Именно эти общие представления используются далее при рассмотрении некоторых характеристик легких атомных ядер в трехкластерных конфигурациях. Они практически не отличаются от принципов, заложенных в двухкластерном варианте ПКМ, который использовался нами ранее при рассмотрении некоторых астрофизических аспектов термоядерных процессов на Солнце, звездах и Вселенной [14].

Что касается фазового анализа упругого рассеяния ядерных частиц при низких и астрофизических энергиях, то ситуация здесь более проста, чем в предыдущем случае, поскольку не требует знания ядерных межкластерных потенциалов взаимодействия. Поэтому далее, после описания основных математических методов расчета и некоторых численных алгоритмов, мы сразу перейдем к рассмотрению отдельных задач фазового анализа.

1.1 Обзор возможностей кластерной модели ***The review of the cluster model possibilities***

Многие свойства легких атомных ядер, которые участвуют в термоядерных процессах, хорошо описываются различными вариантами кластерных моделей и, по-видимому, наиболее распространенной на сегодняшний день является потенциальная кластерная модель. ПКМ основана на единых парных гамильтонианах взаимодействий в непрерывном и дискретном спектрах и строится на предположении, что рассматриваемые ядра с высокой степенью вероятности имеют двух- или трехкластерную структуру [12,13].

1.1.1 Основные принципы модели **Basic model principles**

Работоспособность ПКМ обусловлена тем, что во многих легких атомных ядрах вероятность образования нуклонных ассоциаций-кластеров и степень их обособления друг от друга действительно высоки. Это подтверждается многочисленными экспериментальными данными и результатами различных теоретических расчетов, полученными за последние 50-60 лет [11].

Для нахождения феноменологических потенциалов взаимодействия между каждой парой кластеров используются результаты фазового анализа экспериментальных данных по дифференциальным сечениям упругого рассеяния соответствующих свободных ядер [13]. Потенциалы процессов рассеяния строятся из условия наилучшего описания, полученных на основе этих данных, фаз упругого рассеяния ядерных частиц. Потенциалы связанного состояния (СС) кластеров строятся, как правило, на основе описания некоторых характеристик основного состояния (ОС) ядра, которое рассматривается в данном кластерном канале.

Рассматриваемая здесь потенциальная кластерная модель сравнительно проста, поскольку сводится к решению задачи двух тел, или, что эквивалентно – одного тела в поле силово-

го центра. Конечно, могут возникнуть возражения, что такая модель совершенно не соответствует проблеме многих тел, задача которой является описание свойств системы, состоящей из A нуклонов. В этой связи следует заметить, что одной из наиболее успешных моделей в теории атомного ядра за всю историю развития ядерной физики является модель ядерных оболочек (МО), которая математически представляет собой именно проблему движения одного тела в поле силового центра. Физические основания рассматриваемой здесь потенциальной кластерной модели восходят именно к оболочечной модели, или точнее, к удивительной связи между моделью оболочек и кластерной моделью, которая в литературе часто встречается под названием модели нуклонных ассоциаций (МНА) [9,11].

В МНА и ПКМ волновая функция (ВФ) ядра, состоящего из двух кластеров с числом нуклонов A_1 и A_2 ($A = A_1 + A_2$), имеет вид антисимметризованного произведения полностью антисимметричных внутренних волновых функций (ВФ) кластеров $\Psi(R_1)$ и $\Psi(R_2)$, умноженных на волновую функцию их относительного движения $\Phi(R = R_1 - R_2)$,

$$\Psi = \hat{A} \{ \Psi(R_1) \Psi(R_2) \Phi(R) \}, \quad (\text{B.1})$$

где $\hat{A}$ – оператор антисимметризации, который действует по отношению к перестановкам нуклонов из разных кластеров ядра, R – межкластерное расстояние, R_1 и R_2 – радиус-векторы положения центра масс кластеров.

Обычно, кластерные волновые функции выбирают так, чтобы соответствовать основным состояниям свободных ядер, состоящих из A_1 и A_2 нуклонов. Эти волновые функции характеризуются специфическими квантовыми числами, включая схемы Юнга $\{f\}$, которые определяют перестановочную симметрию орбитальной части ВФ относительного движения кластеров. Кроме того, определенные выводы кластерной модели [9,11] приводят к понятию запрещенных принципом Паули состояний. Поэтому, некоторые полные волновые функции ядра Ψ с определенным типом функций относительного движения $\Phi(R)$ обращаются в ноль при анти-

симметризации по всем A нуклонам.

Основное, т.е. реально существующее связанное в данном потенциале состояние кластерной системы, описывается волновой функцией с ненулевым, в общем случае, числом узлов. Таким образом, представление о запрещенных принципом Паули состояниях позволяет учесть многочастичный характер задачи в терминах двухчастичного потенциала взаимодействия между кластерами [9,11]. При этом на практике потенциал межкластерного взаимодействия выбирается так, чтобы правильно описать извлеченные из экспериментальных данных фазы упругого рассеяния кластеров в соответствующей парциальной волне и, предпочтительно, в состоянии с одной определенной схемой Юнга $\{f\}$ для пространственной части волновой функции A нуклонов ядра [22].

Однако результаты фазового анализа в ограниченной области энергий, как правило, не позволяют однозначно восстановить потенциал взаимодействия. Поэтому дополнительным условием на потенциал CC является требование правильного воспроизведения энергии связи ядра в соответствующем кластерном канале и описание некоторых других статических ядерных характеристик.

Например, это может быть зарядовый радиус и асимптотическая константа (АК), причем характеристики связанных в ядре кластеров отождествляются с характеристиками соответствующих свободных легчайших ядер [9]. Это дополнительное требование, очевидно, является идеализацией, т.к. предполагает, что в основном состоянии ядро имеет 100%-ую кластеризацию. Поэтому успех данной потенциальной кластерной модели при описании системы из A нуклонов в связанном состоянии определяется тем, насколько велика реальная кластеризация основного состояния такого ядра в двух- или трехчастичных каналах [9,11,22].

Однако некоторые ядерные характеристики отдельных, даже не кластерных, ядер могут быть обусловлены преимущественно одним определенным кластерным каналом, при малом вкладе других возможных кластерных конфигураций. В этом случае используемая одноканальная двух- или трех-

кластерная модель позволяет идентифицировать доминирующий кластерный канал и выделить некоторые основные свойства такой ядерной системы, которые им обусловлены [9].

1.1.2 Развитие модели и основные результаты **Model development and general results**

Остановимся теперь вкратце на некоторых основных этапах развития ПКМ и ЗС. В начале 70-х годов прошлого века в работах [25,26,27] было показано, что фазы упругого рассеяния легких кластерных систем могут быть описаны на основе глубоких чисто притягивающих потенциалов Вудс-Саксоновского типа, которые содержат связанные запрещенные принципом Паули состояния. Поведение фаз рассеяния при нулевой энергии для таких взаимодействий подчиняется обобщенной теореме Левинсона [25-27,28,29], а фазы рассеяния при больших энергиях стремятся к нулю, оставаясь положительными. Радиальная ВФ разрешенных состояний (РС) потенциалов с ЗС осциллирует на малых расстояниях, а не вымирает, как это было для взаимодействий с кором. Такой подход можно рассматривать, как альтернативу часто используемой концепции отталкивающего кора. Кор вводится в потенциал взаимодействия кластеров для качественного учета принципа Паули без выполнения полной и явной антисимметризации ВФ.

Далее, например, в работах [28,30,31,32,33,34,35,36,37] были параметризованы межкластерные центральные гауссовы потенциалы взаимодействия, правильно воспроизводящие фазы упругого ${}^4\text{He}^2\text{H}$ рассеяния при низких энергиях и содержащие запрещенные состояния. Показано, что на основе этих потенциалов в кластерной модели можно воспроизвести основные характеристики связанных состояний ядра ${}^6\text{Li}$, вероятность кластеризации которого в рассматриваемом двухкластерном канале сравнительно высока [22]. Все кластерные состояния в такой системе оказываются чистыми по орбитальным схемам Юнга [25-37] и потенциалы, полученные из фаз рассеяния, можно непосредственно применять для опи-

сания характеристик основного состояния этого ядра.

Определенный успех одноканальной модели, основанной на таких потенциалах, обусловлен не только большой степенью кластеризации обсуждаемых ядер, но и тем, что в каждом состоянии кластеров существует только одна разрешенная орбитальная схема Юнга [12,13], определяющая симметрию этого состояния. Тем самым, достигается некое "единое" описание непрерывного и дискретного спектра, и потенциалы, полученные на основе экспериментальных фаз рассеяния, вполне успешно используются для описания различных характеристик ОС ядер лития.

Для более легких кластерных систем вида N^2H , $^2H^2H$, N^3H , N^3He , $^2H^3He$ и т.д. в состояниях рассеяния с минимальным спином уже возможно смешивание по орбитальным симметриям и ситуация оказывается более сложной. В состояниях с минимальным спином, в непрерывном спектре разрешены две орбитальные симметрии с различными схемами Юнга, в то время как связанным основным состояниям, по-видимому, соответствует только одна из этих схем [10-13,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49].

Поэтому потенциалы, непосредственно полученные на основе экспериментальных фаз рассеяния, эффективно зависят от различных орбитальных схем и не могут в таком виде использоваться для описания характеристик основного состояния ядер. Из таких взаимодействий, необходимо выделять чистую компоненту, применимую уже при анализе характеристик СС.

В более тяжелых ядерных системах N^6Li , N^7Li и $^2H^6Li$ также реализуется подобная ситуация [50,51,52,53,54], когда в некоторых случаях различные состояния оказываются смешанными по схемам Юнга. В указанных выше работах были получены чистые по схемам Юнга потенциалы взаимодействия для перечисленных выше тяжелых ядерных систем. Они, в основном, оказались способны правильно описывать как характеристики рассеяния, так и свойства связанных состояний соответствующих ядер.

Несмотря на определенные успехи такого подхода, обычно рассматривались только чисто центральные межкла-

стерные взаимодействия. При рассмотрении ${}^4\text{He}^2\text{H}$ системы в рамках потенциальной кластерной модели не учитывалась тензорная компонента, которая приводит к появлению D волны в ВФ СС и рассеяния и позволяет рассматривать квадрупольный момент ядра ${}^6\text{Li}$. Под тензорным потенциалом здесь следует понимать взаимодействие, оператор которого зависит от взаимной ориентации полного спина системы и межкластерного расстояния. Математическая форма записи такого оператора полностью совпадает с оператором двухнуклонной задачи, поэтому потенциал, по аналогии, называется тензорным [55,56,57].

По-видимому, впервые тензорные потенциалы были использованы для описания ${}^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия в начале 80-х годов XX века в работе [55], где предпринята попытка ввести тензорную компоненту в оптический потенциал. Это позволило заметно улучшить качество описания дифференциальных сечений упругого рассеяния и поляризации. В работе [56] на основе "фолдинг" модели выполнены расчеты сечений и поляризаций, и учет тензорной компоненты потенциала позволил улучшить их описание. В дальнейшем такой подход был использован в работе [57], где "сверткой" нуклон-нуклонных потенциалов получены ${}^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия с тензорной компонентой. Показано, что в принципе удастся правильно описать основные характеристики связанного состояния ${}^6\text{Li}$, включая правильный знак и порядок величины квадрупольного момента.

Однако, в работах [55,56] рассматривались только процессы рассеяния кластеров, а в [57] только характеристики СС ядра ${}^6\text{Li}$ без анализа фаз упругого рассеяния. Тем не менее, гамильтониан взаимодействия должен быть единым и для процессов рассеяния и СС кластеров, как это было сделано в [25-37] в случае чисто центральных потенциалов. Большая вероятность кластеризации ядра ${}^6\text{Li}$ в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ канал позволяет надеяться на корректность постановки такой задачи в потенциальной кластерной модели.

Поскольку ОС ${}^6\text{Li}$ [10,25-37,58,59,60,61,62,63] сопоставляется орбитальная схема {42}, то в S состоянии должно быть 3С со схемой {6}. В тоже время в D волне 3С отсутст-

ует, так как схема {42} совместима с орбитальным моментом $L = 2$. Это значит, что ВФ S состояния будет иметь узел, а ВФ для D волны – безузловая. Такая классификация запрещенных и разрешенных состояний по схемам Юнга в целом позволяет определить общий вид ВФ SS кластерной ${}^2\text{H}^4\text{He}$ системы [10,28].

В работе [64], в рамках потенциальной кластерной модели, был получен именно такой, единый гамильтониан ${}^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия, т.е. единый потенциал с тензорной компонентой и запрещенным в S волне состоянием. Он удовлетворял всем перечисленным выше условиям и позволял описывать как характеристики рассеяния, т.е. ядерные фазы, так и свойства связанных состояний ядра ${}^6\text{Li}$, включая его квадрупольный момент [65].

Далее, в работах [66,67] понятие $3C$ было распространено на синглетный нуклон-нуклонный (NN) потенциал, а затем и на его триплетную часть [68]. Впоследствии появился NN потенциал гауссова типа с тензорной компонентой и ОПЕП (потенциал однопионного обмена) [69], а несколько позже [70,71] удалось получить параметры NN потенциала с тензорной компонентой и запрещенными состояниями, волновая функция которого, как и предсказывалось ранее теоретически, содержала в дискретном спектре узел только в S волне, а D волна была безузловая [72].

Такой потенциальный подход в NN системе [71] оказался способен описывать практически все характеристики дейтрона и NN рассеяния при низких и средних энергиях. Кроме того, заметно улучшилось описание высокоэнергетических векторных и тензорных поляризаций в $e^2\text{H}$ рассеянии, по сравнению с известными ранее взаимодействиями подобного типа [69].

1.1.3 Представления и методы модели Model representations and methods

Прежде чем переходить к описанию конкретных методов расчета ядерных характеристик, остановимся на некоторых общих соображениях, используемых обычно при решении

определенного круга задач ядерной физики и ядерной астрофизики. Известно, что ядерный или NN потенциал взаимодействия частиц в задачах рассеяния или связанных состояниях заведомо не известен, и определить его форму напрямую какими-либо способами не представляется возможным. Поэтому выбирается определенная форма его зависимости от расстояния (например, гауссова или экспоненциальная) и по некоторым ядерным характеристикам (обычно, это фазы ядерного рассеяния) на основе известных методов расчета (см., например, [73,74]) фиксируются его параметры, так чтобы он описывал эти характеристики. В дальнейшем такой потенциал можно применять для расчетов любых других ядерных характеристик, например, энергий связи рассматриваемых ядер и свойств их связанных состояний или сечений различных реакций, включая, термоядерные процессы при сверхнизких энергиях [14,17].

Когда, так или иначе, определен ядерный потенциал взаимодействия двух частиц, практически весь круг, рассмотренных выше физических задач, сводится к решению уравнения Шредингера или связанной системы этих уравнений в случае тензорных ядерных сил с определенными начальными и асимптотическими условиями. В принципе, это чисто математическая задача из области математического моделирования физических процессов и систем. Однако многие существующие методы ее решения [75,76,77,78,79,80,81,82] не всегда приводят к устойчивой численной схеме, а обычно используемые алгоритмы часто дают недостаточную точность результатов, либо вообще приводят к переполнению в процессе работы компьютерных программ.

Поэтому далее мы определим общее направление и обозначим основные численные методы, которые приводят к наиболее устойчивым схемам решения рассматриваемых физических задач. Для квантовых задач такие решения основываются на уравнении Шредингера, которое позволяет получить ВФ системы ядерных частиц при известных потенциалах их взаимодействия. Решать уравнения Шредингера для связанных состояний и процессов рассеяния можно, например, методом Рунге-Кутты (РК) [83,84] или конечно-

разностным методом (КРМ) [85].

Такие методы позволяют легко найти собственные волновые функции и собственные энергии квантовой системы частиц. Причем, если использовать, предложенную в [17], комбинацию численных и вариационных методов и контролировать, в некоторых случаях, точность решения уравнения или системы связанных уравнений Шредингера с помощью невязок [86], то процедура получения конечных результатов заметно упрощается. Затем, на основе полученных решений, т.е. волновых функций ядра, которые являются решениями исходных уравнений, вычисляются многочисленные ядерные характеристики, в том числе, фазы рассеяния и энергия связи атомных ядер в различных каналах.

И, наконец, переходя к непосредственному изложению избранных нами математических методов решения определенного круга задач ядерной физики низких и сверхнизких, т.е. астрофизических энергий, заметим, что в конечном итоге практически все рассматриваемые здесь физические проблемы в математическом плане сводятся к задачам вариационного характера.

В частности, при рассмотрении трехтельной модели, например, ядра ${}^7\text{Li}$ [13,17,87] очень эффективно использовать альтернативный математический метод нахождения собственных значений обобщенной вариационной матричной задачи, рассматриваемой на основе уравнения Шредингера с использованием неортогонального вариационного базиса. Этот метод позволяет избавиться от неустойчивостей, иногда возникающих при численной реализации обычных вычислительных схем решения обобщенной вариационной задачи [17].

Кроме того, для фазового анализа рассеяния ядерных частиц применялись новые, предложенные нами еще в работе [17], алгоритмы реализации численных методов, которые используются для нахождения частных решений общей многопараметрической вариационной задачи для функционала χ^2 . Эта величина определяет точность описания экспериментальных данных на основе выбранного теоретического представления, т.е. некоторого функционала нескольких пере-

менных.

1.2 Потенциалы и волновые функции **Potentials and wave functions**

Межкластерные потенциалы взаимодействия для каждой парциальной волны, т.е. для заданного орбитального момента L , и точечным кулоновским членом могут быть выбраны в виде

$$V(r) = V_0 \exp(-\gamma r^2) + V_1 \exp(-\delta r^2) \quad (1.2.1)$$

или

$$V(r) = V_0 \exp(-\gamma r^2) . \quad (1.2.2)$$

Здесь параметры V_0 и V_1 выражены в МэВ, γ и δ имеют размерность Фм^{-2} , и являются параметрами потенциала, которые обычно находятся из условия наилучшего описания фаз упругого рассеяния, извлекаемых в процессе фазового анализа из экспериментальных данных по дифференциальным сечениям, т.е. угловым распределениям или функциям возбуждения.

Кулоновский потенциал при нулевом кулоновском радиусе $R_{\text{coul}} = 0$ записывался в форме

$$V_{\text{coul}} (\text{МэВ}) = 1.439975 \cdot \frac{Z_1 Z_2}{R} ,$$

где R – относительное расстояние между частицами входного канала в Фм и Z – заряды частиц в единицах элементарного заряда "e".

В некоторых случаях в кулоновский потенциал вводят кулоновский радиус R_{coul} , и тогда кулоновская часть размерности Фм^{-2} принимает вид [88]

$$V_{\text{coul}}(r) = 2\mu \frac{m_0}{\hbar^2} \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2}{r} & r > R_c \\ Z_1 Z_2 \left(3 - \frac{r^2}{R_c^2} \right) / 2R_c & r < R_c \end{cases}.$$

Поведение волновой функции связанных состояний, в том числе, основных состояний ядер в кластерных каналах на больших расстояниях характеризуется асимптотической константой C_w , которая определяется через функцию Уиттекера [89]

$$\chi_L(r) = \sqrt{2k_0} C_w W_{-\eta L+1/2}(2k_0 r), \quad (1.2.3)$$

где $\chi_L(R)$ – численная волновая функция связанного состояния, получаемая из решения радиального уравнения Шредингера и нормированная на единицу, $W_{-\eta L+1/2}$ – функция Уиттекера связанного состояния, определяющая асимптотическое поведение ВФ и являющаяся решением того же уравнения без ядерного потенциала, т.е. на больших расстояниях R , k_0 – волновое число, обусловленное канальной энергией связи, η – кулоновский параметр, определенный далее и L – орбитальный момент связанного состояния.

Асимптотическая константа (АК или, как ее часто называют, асимптотический нормировочный коэффициент – АНК) является важной ядерной характеристикой, определяющей поведение "хвоста", т.е. асимптотики волновой функции на больших расстояниях. Во многих случаях ее знание для ядра A в кластерном канале $b+c$ определяет значение астрофизического S -фактора для процесса радиационного захвата $b(c,\gamma)A$ [90]. Асимптотическая константа пропорциональна ядерной вершинной константе для виртуального процесса $A \rightarrow b+c$, которая является матричным элементом этого процесса на массовой поверхности [91].

Численная волновая функция $\chi_L(r)$ относительного движения кластеров является решением радиального уравнения

Шредингера вида

$$\chi''_{\text{L}}(r) + [k^2 - V(r) - V_{\text{coul}}(r) - L(L+1)/r^2]\chi_{\text{L}}(r) = 0, \quad (1.2.4)$$

где $V(r)$ – межкластерный ядерный потенциал (1.2.1) или (1.2.2), приведенный к размерности Фм^{-2} , т.е. умноженный на $2\mu \frac{m_0}{\hbar^2}$, $V_{\text{coul}}(r)$ – кулоновский потенциал размерности Фм^{-2} , k – волновое число, определяемое энергией E взаимодействия частиц и равное $k^2 = 2\mu \frac{m_0}{\hbar^2} E$, а константа $\frac{\hbar^2}{m_0}$ обычно принимается равной $41.4686 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^2$.

В данных расчетах обычно задавались целые значения масс частиц, а кулоновский параметр $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\hbar^2 k}$ представлялся в виде

$$\eta = 3.44476 \cdot 10^{-2} \frac{\mu Z_1 Z_2}{k},$$

где k – волновое число, выраженное в Фм^{-1} , μ – приведенная масса в а.е.м., Z – заряды частиц в единицах элементарного заряда "е".

1.3 Методы фазового анализа ***Phase shifts methods***

Зная экспериментальные дифференциальные сечения упругого рассеяния всегда можно найти некоторый набор параметров, называемых фазами рассеяния $\delta_{\text{S,L}}^{\text{J}}$, позволяющих с определенной точностью описать поведение этих сечений. Качество описания экспериментальных данных на основе некоторой теоретической функции (функционала нескольких переменных) можно оценить по методу χ^2 , который представляется в виде [88]

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i^t(\theta) - \sigma_i^e(\theta)}{\Delta\sigma_i^e(\theta)} \right]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_i^2, \quad (1.3.1)$$

где σ^e и σ^t – экспериментальное и теоретическое, т.е. рассчитанное при некоторых заданных значениях фаз $\delta_{s,L}^J$ сечение упругого рассеяния ядерных частиц для i – го угла рассеяния, $\Delta\sigma^e$ – ошибка экспериментальных сечений для этого угла и N – число измерений.

Выражения, описывающие дифференциальные сечения, являются разложением некоторого функционала $d\sigma(\theta)/d\Omega$ в числовой ряд [88], и нужно найти такие вариационные параметры разложения $\delta_{s,L}^J$, которые наилучшим образом описывают его поведение. Поскольку выражения для дифференциальных сечений обычно являются точными [88], то при увеличении членов разложения L до бесконечности величина χ^2 должна стремиться к нулю. Именно этот критерий использовался для выбора определенного набора фаз, приводящего к минимуму χ^2 , который мог бы претендовать на роль глобального минимума данной многопараметрической вариационной задачи [92]. Более подробно методы и критерии фазового анализа, использованные в данных расчетах, приведены в работах [17,92].

Таким образом, для поиска фаз рассеяния по экспериментальным сечениям выполнялась процедура минимизации функционала χ^2 , как функции определенного числа переменных, каждая из которых является фазой $\delta_{s,L}^J$ определенной парциальной волны. Для решения этой задачи ищется минимум χ^2 в некоторой ограниченной области значений этих переменных. Но и в этой области можно найти множество локальных минимумов χ^2 с величиной порядка единицы. Выбор наименьшего из них позволяет надеяться, что он будет соответствовать глобальному минимуму, который является решением такой вариационной задачи.

Изложенные критерии и методы использовались нами для выполнения фазового анализа в $^4\text{He}^4\text{He}$, $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$,

$n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$ и $^4\text{He}^{12}\text{C}$ системах при низких энергиях, которые важны для астрофизических задач. Выражения для вычисления дифференциальных сечений упругого рассеяния, требуемые для выполнения фазового анализа в указанных выше системах, приведены далее в соответствующих разделах книги.

1.4 Некоторые численные методы ***Some numerical methods***

Конечно-разностные методы, которые являются модификацией методов [85], и содержат учет кулоновских взаимодействий, вариационные методы (ВМ) решения уравнения Шредингера и другие вычислительные методы, используемые в данных расчетах ядерных характеристик, подробно описаны в [17]. Поэтому здесь только вкратце перечислим основные моменты, связанные с численными методами компьютерных вычислений.

Во всех расчетах, полученных конечно-разностным и вариационным методом [17], в конце области стабилизации асимптотической константы, т.е. примерно на $10\div 20$ Фм, численная или вариационная волновая функция заменялась функцией Уиттекера (1.2.3) с учетом найденной ранее асимптотической константы. Численное интегрирование в любых матричных элементах проводилось на интервале от 0 до $25\div 30$ Фм. При этом был использован метод Симпсона [76], который дает хорошие результаты для плавных и слабо осциллирующих функций при задании нескольких сотен шагов на период [17]. ВФ при рассматриваемых здесь низких и сверхнизких энергиях вполне удовлетворяют указанным требованиям.

Для выполнения настоящих расчетов были переписаны и модифицированы наши компьютерные программы, основанные на конечно-разностном методе [17], для расчета полных сечений радиационного захвата и характеристик связанных состояний ядер с языка Turbo Basic на современную версию языка Fortran-90, которая имеет заметно больше возможно-

стей. Это позволило существенно поднять скорость и точность всех вычислений, в том числе, энергии связи ядра в двухчастичном канале. Теперь, например, точность вычисления кулоновских волновых функций для процессов рассеяния, контролируемая по величине Вронскиана, и точность поиска корня детерминанта в КРМ [17], определяющая точность поиска энергии связи, находятся на уровне $10^{-15} \div 10^{-20}$. Реальная абсолютная точность определения энергии связи в конечно-разностном методе для разных двухчастичных систем составила $10^{-6} \div 10^{-8}$ МэВ.

Для проведения вариационных расчетов была переписана на Fortran и несколько модифицирована вариационная программа нахождения вариационных ВФ и энергии связи ядер в кластерных каналах, что позволило существенно поднять скорость поиска минимума многопараметрического функционала, который определяет энергию связи двух- и трехчастичных систем во всех рассматриваемых ядрах [17].

Данная программа по прежнему использует многопараметрический вариационный метод с разложением ВФ по неортогональному вариационному гауссову базису с независимым варьированием параметров. Модифицированы и переведены на Fortran-90 аналогичные вариационные программы, основанные на многопараметрическом вариационном методе и предназначенные для выполнения фазового анализа по дифференциальным сечениям упругого рассеяния ядерных частиц.

Для вычисления кулоновских функций рассеяния использовалось быстро сходящееся представление в виде цепных дробей [93], позволяющее получить их значения с высокой степенью точности в широком диапазоне переменных и с малыми затратами компьютерного времени [94]. Волновые кулоновские функции рассеяния имеют две составляющие – регулярную $F_L(\eta, \rho)$ и нерегулярную $G_L(\eta, \rho)$, которые являются линейно независимыми решениями радиального уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом для процессов рассеяния [117]

$$\chi_L^*(\rho) + \left(1 - \frac{2\eta}{\rho} - \frac{L(L+1)}{\rho^2}\right) \chi_L(\rho) = 0 \quad ,$$

где $\chi_L = F_L(\eta, \rho)$ или $G_L(\eta, \rho)$, $\rho = kr$, а η – кулоновский параметр, определенный выше и k – волновое число, определяемое энергией E частиц.

Вронскианы этих кулоновских функций записываются [95]

$$W_1 = F_L' G_L - F_L G_L' = 1 \quad ,$$

$$W_2 = F_{L-1} G_L - F_L G_{L-1} = \frac{L}{\sqrt{\eta^2 + L^2}} \quad .$$

Рекуррентные соотношения между ними представляются в форме

$$L[(L+1)^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L+1} = (2L+1) \left[\eta + \frac{L(L+1)}{\rho} \right] u_L - (L+1)[L^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L-1} \quad ,$$

$$(L+1)u_L' = \left[\frac{(L+1)^2}{\rho} + \eta \right] u_L - [(L+1)^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L+1} \quad ,$$

$$L u_L' = [L^2 + \eta^2]^{1/2} u_{L-1} - \left[\frac{L^2}{\rho} + \eta \right] u_L \quad ,$$

где $u_L = F_L(\eta, \rho)$ или $G_L(\eta, \rho)$.

Асимптотика таких функций при $\rho \rightarrow \infty$ может быть представлена в виде [96]

$$F_L = \sin(\rho - \eta \ln 2\rho - \pi L / 2 + \sigma_L) \quad ,$$

$$G_L = \cos(\rho - \eta \ln 2\rho - \pi L / 2 + \sigma_L) \quad .$$

Имеется достаточно много методов и приближений для вычисления кулоновских волновых функций рассеяния [97, 98, 99, 100, 101, 102, 103], которые использовались, начиная с

30-х годов 20-го века. Однако, только в 70-х годах прошлого века появилось быстро сходящееся представление, позволяющее получать их значения с высокой степенью точности в широком диапазоне переменных и с малыми затратами компьютерного времени [93,94].

Кулоновские функции в таком методе представляются в виде бесконечных цепных дробей [104]

$$f_L = F'_L / F_L = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} ,$$

где

$$b_0 = (L + 1) / \rho + \eta / (L + 1) ,$$

$$b_n = [2(L + n) + 1][(L + n)(L + n + 1) + \eta\rho] ,$$

$$a_1 = -\rho[(L + 1)^2 + \eta^2](L + 2) / (L + 1) ,$$

$$a_n = -\rho^2[(L + n)^2 + \eta^2][(L + n)^2 - 1]$$

и

$$P_L + iQ_L = \frac{G'_L + iF'_L}{G_L + iF_L} = \frac{i}{\rho} \left(b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \right) ,$$

где

$$b_0 = \rho - \eta \quad ,$$

$$b_n = 2(b_0 + in) \quad ,$$

$$a_n = -\eta^2 + n(n-1) - L(L+1) + in(2n-1) \quad .$$

Используя приведенные выражения, можно получить связь между кулоновскими функциями и их производными [105]

$$F_L' = f_L F_L \quad ,$$

$$G_L = (F_L' - P_L F_L) / Q_L = (f_L - P_L) F_L / Q_L \quad ,$$

$$G_L' = P_L G_L - Q_L F_L = [P_L (f_L - P_L) / Q_L - Q_L] F_L \quad .$$

Такой метод расчета оказывается применим в области $\rho \geq \eta + \sqrt{\eta^2 + L(L+1)}$, т.е. для $L = 0$ имеем $\rho > 2\eta$, и легко позволяет получить высокую точность благодаря быстрой сходимости цепных дробей. Поскольку кулоновский параметр η обычно имеет величину порядка единицы, а орбитальный момент L всегда можно положить равным нулю, то метод дает хорошие результаты уже при $\rho > 2$. Значения кулоновских функций для любых $L > 0$ всегда можно получить из рекуррентных соотношений.

Таким образом, задавая некоторое значение F_L в точке ρ , находим все остальные функции и их производные с точностью до постоянного множителя, который определяется из вронскианов. Вычисления кулоновских функций по приведенным формулам и сравнение их с табличным материалом [95] показывает, что можно легко получить восемь-девять правильных знаков при расчетах с двойной точностью, если ρ удовлетворяет приведенному выше условию.

Другой вид функций, который использовался нами, это функция Уиттекера, являющаяся решением уравнения Шре-

дингера с кулоновским взаимодействием для связанных состояний [95]

$$\frac{d^2 W(\mu, \nu, z)}{dz^2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{z} - \frac{1/4 - \mu^2}{z^2} \right) W(\mu, \nu, z) = 0 \quad .$$

Это уравнение можно привести к стандартному виду уравнения Шредингера

$$\frac{d^2 \chi(k, L, r)}{dr^2} - \left(k^2 + \frac{g}{r} + \frac{L(L+1)}{r^2} \right) \chi(k, L, r) = 0 \quad ,$$

где $g = \frac{2\mu Z_1 Z_2}{\eta^2} = 2k\eta$, $\eta = \frac{\mu Z_1 Z_2 e^2}{\eta^2 k}$ – кулоновский параметр, приближенное выражение для которого приведено в п.п. 1.2, $z = 2kr$, $\nu = -\frac{g}{2k} = -\eta$ и $\mu = L+1/2$, k – волновое число взаимодействующих частиц.

Для нахождения численных значений функции Уиттекера обычно используют ее интегральное представление, которое имеет вид

$$W(\mu, \nu, z) = \frac{z^\nu e^{-z/2}}{\Gamma(1/2 - \nu + \mu)} \int t^{\mu-\nu-1/2} (1+t/z)^{\mu+\nu-1/2} e^{-t} dt \quad .$$

Его можно привести к виду

$$W_{-\eta L+1/2}(z) = W(L+1/2, -\eta, z) = \frac{z^{-\eta} e^{-z/2}}{\Gamma(L+\eta+1)} \int t^{L+\eta} (1+t/z)^{L-\eta} e^{-t} dt$$

Легко видеть, что при $L = 1$ и $\eta = 1$ приведенный интеграл превращается в $\Gamma(3)$, который сокращается со знаменателем и остается простое выражение

$$W_{-1,1+1/2}(z) = W(1 + 1/2, -1, z) = \frac{e^{-z/2}}{z} .$$

Такую запись можно использовать для контроля правильности вычислений функции Уиттекера при любых значениях z для $L = 1$, $\eta = 1$ и $z = 2kr$. Более подробно вопросы, связанные с методами вычисления этих двух функций приведены в [17] и Приложении работы [14].

1.5 Обобщенная матричная задача на собственные значения *The generalized matrix eigenvalue problem*

При рассмотрении обобщенной матричной задачи на собственные значения и функции, которая получается после разложения ВФ по неортогональному гауссову базису, исходим из стандартного уравнения Шредингера в общем виде [106]

$$H\chi = E\chi ,$$

где H – гамильтониан и E – энергия системы, χ – волновые функции.

Разлагая ВФ по некоторому, неортогональному в общем случае, вариационному базису [58]

$$\chi = \sum_i C_i \varphi_i ,$$

подставляя их в исходную систему, умножая ее слева на комплексно сопряженную φ_i^* базисную функцию и интегрируя по всем переменным, получим известную матричную систему вида [86,107]

$$(H - EL)C = 0 , \tag{1.5.1}$$

которая в общем случае является обобщенной матричной задачей для нахождения собственных значений и собственных функций [108,109]. Если разложение ВФ выполняется по ортогональному базису, матрица интегралов перекрывания L превращается в единичную матрицу I , и мы имеем стандартную задачу на собственные значения, для решения которой существует множество методов [110].

Для решения обобщенной матричной задачи также имеются известные методы, приведенные, например, в книге [109]. Остановимся вначале на стандартном методе решения обобщенной матричной задачи для уравнения Шредингера, которая возникает при использовании неортогонального вариационного базиса в ядерной физике или ядерной астрофизике. Затем рассмотрим ее модификацию или альтернативный метод, который удобно применять для решения этой задачи при численных расчетах на современных компьютерах [17,108].

Итак, для определения спектра собственных значений энергии и собственных волновых функций в вариационном методе, при разложении ВФ по неортогональному гауссову базису [58-60], решается обобщенная матричная задача на собственные значения [109]

$$\sum_i (H_{ij} - E L_{ij}) C_i = 0 \quad , \quad (1.5.2)$$

где H – симметричная матрица гамильтониана, L – матрица интегралов перекрывания, E – собственные значения энергии и C – собственные векторы задачи.

Представляя матрицу L в виде произведения нижней N и верхней V треугольных матриц [109], после несложных преобразований переходим к обычной задаче на собственные значения

$$H' C' = E I C' \quad , \quad (1.5.3)$$

или

$$(H - EI)C' = 0 \quad ,$$

где

$$H' = N^{-1}HV^{-1} \quad , \quad C' = VC \quad ,$$

и V^{-1} и N^{-1} обратные по отношению к V и N матрицы.

Далее находим матрицы N и V , выполняя триангуляризацию симметричной матрицы L [110], например, методом Халлецкого [109]. Затем определяем обратные матрицы N^{-1} и V^{-1} , например, методом Гаусса и вычисляем элементы матрицы $H' = N^{-1}HV^{-1}$. Далее находим полную диагональную по E матрицу $(H' - EI)$ и вычисляем ее детерминант $\det(H' - EI)$ при некоторой энергии E .

Энергия, которая приводит к нулю детерминанта, является собственной энергией задачи, а соответствующие ей вектора C' – это собственные вектора уравнения (1.5.3). Зная C' , не трудно найти и собственные вектора исходной задачи C (1.5.1), поскольку матрица V^{-1} уже известна. Описанный метод сведения обобщенной матричной задачи к обычной матричной задаче на собственные значения и функции называется методом ортогонализации по Шмидту [111].

Однако в некоторых задачах при некоторых значениях вариационных параметров процедура нахождения обратных матриц оказывается неустойчивой и при работе компьютерной программы выдается переполнение. Например, в двухтельных задачах для легких атомных ядер с одним вариационным параметром α_i в вариационной ВФ такой метод, как правило, достаточно устойчив и позволяет получать надежные результаты. Однако в трехтельной ядерной системе, когда вариационная ВФ представляется в виде [58-60]

$$\Phi_{i,\lambda}(r, R) = Nr^\lambda R^1 \sum_i C_i \exp(-\alpha_i r^2 - \beta_i R^2) = N \sum_i C_i \Phi_i \quad , \quad (1.5.4)$$

при некоторых значениях двух вариационных параметров α_i и β_i , метод нахождения обратных матриц иногда приводит к

неустойчивости и переполнению при работе компьютерной программы [112], что представляет определенную проблему для решения задач такого типа.

Здесь выражение

$$\Phi_i = r^\lambda R^1 \exp(-\alpha_i r^2 - \beta_i R^2)$$

называется базисной функцией.

Теперь рассмотрим альтернативный метод численного решения обобщенной матричной задачи на собственные значения, свободный от указанных трудностей и имеющий большую скорость счета на компьютере. А именно, исходное матричное уравнение (1.5.1) или (1.5.2) есть однородная система линейных уравнений – она имеет нетривиальные решения, только если ее детерминант $\det(H - EL)$ равен нулю. Для численных методов, реализуемых на компьютере, не обязательно разлагать матрицу L на треугольные матрицы и находить новую матрицу H и новые вектора C , определяя обратные матрицы, как это было описано выше при использовании стандартного метода.

Можно сразу разлагать недиагональную, симметричную матрицу $(H - EL)$ на треугольные и численными методами в заданной области значений искать энергии, которые приводят к нулю ее детерминанта, т.е. являются собственными энергиями. В реальной физической задаче обычно не требуется искать все собственные значения и собственные функции. Нужно найти только 1÷2 собственных значения для определенной энергии системы и, как правило, это низшие их значения и соответствующие им собственные волновые функции.

Поэтому, например, методом Халецкого исходная матрица $(H - EL)$ разлагается на две треугольные, причем в главной диагонали верхней треугольной матрицы V стоят единицы

$$A = H - EL = NV$$

и далее вычисляется ее детерминант при условии $\det(V) = 1$ [109]

$$D(E) = \det(A) = \det(N) \cdot \det(V) = \det(N) = \prod_{i=1}^m n_{ii}$$

по нулю, которого ищется нужное собственное значение E , т.е. значение энергии. Здесь m – размерность матриц, а детерминант треугольной матрицы N равен произведению ее диагональных элементов [109].

Таким образом, имеем довольно простую задачу поиска нуля функционала одной переменной

$$D(E) = 0 \quad ,$$

численное решение которой не представляет большой сложности и может быть выполнено с любой точностью, например, методом половинного деления [86].

В результате, мы избавляемся от необходимости искать две обратные к V и N матрицы и выполнять несколько матричных умножений, чтобы вначале получить новую матрицу H , а затем, конечную матрицу собственных векторов C . Отсутствие таких операций, особенно поиска обратных матриц, заметно увеличивает скорость счета на компьютере независимо от языка программирования, на котором реализовано решение этой задачи [73].

Для оценки точности решения, т.е. точности разложения исходной матрицы на две треугольные, использовано понятие невязок [109]. После разложения матрицы A на треугольные, вычисляется матрица невязок [109], как разность исходной матрицы A и матрицы

$$S = NV \quad ,$$

где N и V найденные численные треугольные матрицы. Теперь берется разность по всем элементам с исходной матрицей A

$$A_N = S - A \quad .$$

Матрица A_N невязок дает отклонение приближенной величины NV , найденной численными методами, от истинного значения каждого элемента исходной матрицы A . Можно выполнить суммирование всех элементов матрицы A_N и получить численное значение невязки. Во всех приведенных в данной книге вариационных расчетах использовался описанный здесь метод, и максимальное значение любого элемента матрицы A_N обычно не превышало величину 10^{-10} .

Изложенный метод, который представляется вполне очевидным в численном исполнении, позволяет получить хорошую устойчивость алгоритма решения любых рассматриваемых задач и не приводит к переполнению при работе компьютерных программ [113]. Таким образом, описанный здесь альтернативный метод нахождения собственных значений обобщенной матричной задачи [17], рассматриваемой на основе вариационных методов решения уравнения Шредингера с использованием неортогонального вариационного базиса, избавляет нас от неустойчивостей, возникающих вместе с применением обычных методов решения такой математической задачи, т.е. обычного метода ортогонализации по Шмидту.

После нахождения собственного значения (обычно это первое или второе собственное значение с минимальной величиной) решаем известную систему уравнений для поиска собственных векторов X , которая имеет вид

$$AX = NVX = (H - EL)X = 0 \quad .$$

Такая система линейных уравнений относительно N неизвестных X может быть решена при E , которое равно собственному значению. Равенство нулю ее детерминанта означает линейную зависимость одного из уравнений системы, т.е. ее ранг R меньше порядка системы N . Полагаем, что линейно зависимым является последнее N -е уравнение и, отбрасывая его, получаем систему $(N - 1)$ уравнений с N неизвестными [114]

Пример программы реализующей этот метод решения матричного уравнения $A'X' = D$ после разложения матрицы на две треугольные $A = NV$ и нахождения всех решений уравнения $(H - EL)X = 0$ приведен в распечатке в третьей разделе.

В качестве примера рассмотрим теперь общий случай решения матричного уравнения стандартного вида и продемонстрируем применение метода Халецкого для решения подобных задач

$$Ax = b \quad ,$$

где b и x – матрицы столбцы размерности N , а A – квадратная матрица размерности $N \times N$. Матрицу A можно разложить на треугольные матрицы

$$A = BC \quad ,$$

где B – нижняя треугольная матрица и C – верхняя треугольная матрица, в главной диагонали которой стоят единицы. Нахождение нижней и верхней треугольных матриц выполняется по следующей схеме, называемой методом Халецкого [109]

$$b_{i1} = a_{i1} \quad , \tag{1.5.6}$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \quad ,$$

где $i \geq j > 1$ и

$$c_{1j} = a_{1j} / b_{11} \quad ,$$

$$c_{ij} = \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad ,$$

при $1 < i < j$.

Такой метод позволяет определить и детерминант исходной матрицы A [109]

$$\det(A) = \det(B)\det(C) \quad .$$

Известно, что детерминант треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов, а поскольку

$$\det(C) = 1 \quad ,$$

то

$$\det(A) = \det(B) = (b_{11}b_{22}....b_{nn}) \quad .$$

После разложения матрицы A на треугольные, решение матричной системы можно записать в виде

$$By = b \quad ,$$

$$Cx = y \quad ,$$

где сами решения находятся из следующих простых выражений [109]

$$y_1 = a_{1,n+1}/b_{11} \quad , \tag{1.5.7}$$

$$y_i = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k}{b_{ii}}$$

при $i > 1$ и

$$x_n = y_n \quad ,$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik}x_k$$

при $i < n$, где $a_{i,n+1}$ – элементы матрицы – столбца b (здесь i меняется от 1 до N – размерности матрицы A). В такой задаче все треугольные матрицы и решения X определяются вполне однозначно.

1.6 Общие принципы трехтельной модели **General principles of the three-body model**

Рассмотрим радиальное уравнение Шредингера с центральными ядерными силами для волновой функции системы трех частиц [115,116]

$$(H - E)\Phi_{i,\lambda}(r,R) = 0 \quad . \quad (1.6.1)$$

где

$$H = T + V \quad ,$$

$$T = T_1 + T_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_r - \frac{\hbar^2}{2\mu_0}\Delta_R \quad ,$$

$$V = V_{12} + V_{23} + V_{13} \quad , \quad (1.6.2)$$

$$\mu = \frac{m_2 m_3}{m_{23}} \quad , \quad \mu_0 = \frac{m_1 m_{23}}{m} \quad ,$$

$$m_{23} = m_2 + m_3 \quad , \quad m = m_1 + m_2 + m_3 \quad .$$

Здесь m и μ – масса и приведенная масса частиц, Δ – оператор Лапласа, $\hbar$ – постоянная Планка, T и V – операторы кинетической и потенциальной энергии, H – гамильтониан и E – энергия системы.

Величина r в такой записи определяет расстояние между частицами 2 и 3, которые находятся в основании треугольника из трех тел с орбитальным моментом λ , а R – это расстояние между первой частицей, которая расположена в

вершине треугольника и центром масс первых двух частиц с орбитальным моментом l .

Полная трехтельная волновая функция такой системы имеет вид [115]

$$\Psi(r, R) = \sum_{l, \lambda} \Phi_{l, \lambda}(r, R) Y_{LS}^{JM}(\hat{r}, \hat{R}) ,$$

а ее угловая часть $Y_{LS}^{JM}(\hat{r}, \hat{R})$ записывается в обычной форме [58-60]

$$Y_{LS}^{JM}(\hat{r}, \hat{R}) = \sum_{M_S M_L} \langle LM_L SM_S | JM \rangle Y_{LM_L}(\hat{r}, \hat{R}) \chi_{SM_S}(\sigma) .$$

Здесь $L = l + \lambda$ – полный орбитальный момент, S – полный спин, J – полный момент системы частиц, M – их проекции, Y_{LS}^{JM} – спин-угловая функция, $\Phi_{l, \lambda}$ – радиальная волновая функция (1.5.4), r и R – скалярные расстояния между частицами, $\hat{r}$ и $\hat{R}$ – углы между направлениями векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ и осью z , Y_{LM} – сферическая функция, χ_{SM} – спиновая функция системы, зависящая от спина σ частиц, угловые скобки обозначают коэффициенты Клебша-Гордона [58-60].

В реальных расчетах при некоторых значениях вариационных параметров α_i и β_i находим энергию системы, которая дает ноль детерминанта системы (1.6.1), а затем, варьируя эти параметры, проводим поиск минимума этой энергии. Затем увеличиваем размерность базиса N и повторяем все вычисления, до тех пор, пока величина собственного значения, т.е. энергия связи E_N , на очередном шаге N не станет отличаться от предыдущего значения E_{N-1} на величину ε , которая обычно задается на уровне 0.1÷1.0% или 1÷2 кэВ. В соответствии с общими вариационными принципами [117] эта минимальная энергия и будет реальной энергией связи трехчастичной системы, т.е. энергией связи атомного ядра в рассматриваемой модели.

1.7 Вариационные методы трехтельной модели

Variational methods for three-body model

Матричные элементы гамильтониана системы (1.6.2) и интегралов перекрывания, вычисленные по базисным функциям Φ_i , (1.5.4) имеют вид [87,118]

$$T_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{h^2}{m_N} \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{1+\lambda}} \alpha_{ij}^{-\lambda-1/2} \beta_{ij}^{-1-1/2} G_{ij} \quad ,$$

$$G_{ij} = \frac{B_{ij}(\alpha, \lambda)}{\mu \beta_{ij}} + \frac{B_{ij}(\beta, l)}{\mu_0 \alpha_{ij}} \quad ,$$

$$B_{ij}(\delta, \nu) = \frac{\nu^2}{2\nu+1} + \frac{\delta_i \delta_j}{\delta_{ij}^2} (2\nu+3) - \nu \quad ,$$

$$L_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{1+\lambda}} \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-1-3/2} \quad ,$$

$$N = \left(\sum_{ij} C_i C_j L_{ij} \right)^{-1/2} \quad ,$$

с потенциалами (cb – центробежный, coul – кулоновский)

$$[(V_{cb})_R]_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{h^2}{\mu_0} l(l+1) \frac{(2l-1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{1+\lambda}} \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-1-1/2} \quad ,$$

$$[(V_{cb})_r]_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{h^2}{\mu} \lambda(\lambda+1) \frac{(2\lambda-1)!!(2l+1)!!}{2^{1+\lambda}} \alpha_{ij}^{-\lambda-1/2} \beta_{ij}^{-1-3/2} \quad ,$$

$$\{V_{coul}(23)\}_r]_{ij} = Z_2 Z_3 \frac{\pi}{16} N^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(2l+1)!!}{2^l} \frac{\lambda!}{\alpha_{ij}^{\lambda+1} \beta_{ij}^{1+3/2}} \quad ,$$

$$[\{V_{\text{coul}}(12)\}_R]_{ij} = Z_1 Z_2 \frac{\pi}{16} N^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(2\lambda+1)!!}{2^\lambda} \frac{l!}{\beta_{ij}^{l+1} \alpha_{ij}^{\lambda+3/2}}$$

$$[\{V_{\text{coul}}(13)\}_R]_{ij} = Z_1 Z_3 \frac{\pi}{16} N^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(2\lambda+1)!!}{2^\lambda} \frac{l!}{\beta_{ij}^{l+1} \alpha_{ij}^{\lambda+3/2}}$$

$$(V_{23})_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 V_{23} \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda}} (\alpha_{ij} + \gamma_{23})^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-1-3/2} ,$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j , \quad \beta_{ij} = \beta_i + \beta_j .$$

Далее, например, при значениях $l = 1$ и $\lambda = 0$ имеем следующие выражения для матричных элементов от ядерных потенциалов вида (1.2.1) или (1.2.2)

$$(V_{12})_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{3V_{12}}{2A_{ij}^{3/2}(\beta_{ij} + \gamma_{12})} \left[\frac{a^2 \gamma_{12}^2}{A_{ij}} + 1 \right] ,$$

где

$$A_{ij} = \alpha_{ij} \beta_{ij} + \gamma_{12} (\alpha_{ij} + a^2 \beta_{ij}) , \quad a = m_3 / m_{23} .$$

В случае $l = 0$ и $\lambda = 0$ для этой части потенциала находим выражение

$$(V_{12})_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{V_{12}}{A_{ij}^{3/2}} .$$

Здесь величина γ_{12} является параметром ширины гауссова потенциала, а V_{12} — его глубина между соответствующей парой частиц, в данном случае, 12 или 13.

Для случая произвольных l , когда $\lambda = 0$ можно получить выражение

$$(V_{12})_{ij} = \frac{\pi}{16} N^2 V_{12} \frac{(2l+1)!!}{2^l} \frac{d_{ij}^1}{A_{ij}^{1+3/2}},$$

где

$$d = \alpha_{ij} + \gamma_{12} a^2.$$

Среднеквадратичный массовый радиус ядра в такой модели представляется в виде [87,119]

$$\langle r^2 \rangle_m = m_1 / m \langle r^2 \rangle_{m1} + m_2 / m \langle r^2 \rangle_{m2} + m_3 / m \langle r^2 \rangle_{m3} + A / m$$

$$A = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda+1}} \sum_{ij} C_i C_j \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-1-3/2} \left(\frac{2\lambda+3}{\alpha_{ij}} \mu + \frac{2l+3}{\beta_{ij}} \mu_0 \right)$$

$$\mu = \frac{m_2 m_3}{m_{23}}, \quad \mu_0 = \frac{m_1 m_{23}}{m},$$

$$m_{23} = m_2 + m_3, \quad m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Среднеквадратичный зарядовый радиус ядра в трехтельной модели имеет вид

$$\langle r^2 \rangle_z = Z_1 / Z \langle r^2 \rangle_{z1} + Z_2 / Z \langle r^2 \rangle_{z2} + Z_3 / Z \langle r^2 \rangle_{z3} + B / Z$$

Здесь величина B выражена через моменты частиц, вариационные параметры и коэффициенты разложения ВФ следующим образом:

$$C = \frac{Z_1 m_{23}^2 + Z_{23} m_1^2}{m^2}, \quad Z_{23} = Z_2 + Z_3,$$

$$D = \frac{Z_2 m_3^2 + Z_3 m_2^2}{m_{23}^2} ,$$

$$E = \frac{m_1}{mm_{23}} (Z_3 m_2 - Z_2 m_3) .$$

$$B = \frac{\pi}{16} N^2 \frac{(2l+1)!!(2\lambda+1)!!}{2^{l+\lambda+1}} \sum_{ij} C_i C_j \alpha_{ij}^{-\lambda-3/2} \beta_{ij}^{-l-3/2} \left(\frac{2l+3}{\beta_{ij}} C + \frac{2\lambda+3}{\alpha_{ij}} D \right) +$$

$$+ N^2 E(\lambda+1)!(l+1)! \sum_{ij} \frac{C_i C_j}{2\alpha_{ij}^{\lambda+2} \beta_{ij}^{l+2}} ,$$

В качестве зарядовых и массовых радиусов кластеров, а именно, протона, дейтрона, тритона и α частицы обычно принимались величины $\langle r \rangle_{\text{mp}} = \langle r \rangle_{\text{zp}} = 0.877$ ФМ, $\langle r \rangle_{\text{md}} = \langle r \rangle_{\text{zd}} = 1.96$ ФМ, $\langle r \rangle_{\text{mt}} = \langle r \rangle_{\text{zt}} = 1.70$ ФМ, $\langle r \rangle_{\text{m}\alpha} = \langle r \rangle_{\text{z}\alpha} = 1.67$ ФМ [120,121,122,123].

При поиске энергии связи ядра в трехтельной модели начальные значения вариационных параметров α_i и β_i находились из линейной сетки вида

$$\alpha_i = i/30 , \quad \beta_i = 2\alpha_i .$$

Затем проводилось независимое варьирование каждого из них так, чтобы минимизировать энергию системы с заданной точностью.

Для проверки предложенного метода расчета и компьютерной программы рассматривалась модельная задача для трех частиц, взаимодействующих в потенциале Афнана-Танга [124] с усреднением триплетных и синглетных состояний. Для энергии связи такой системы в работе [124] получено значение -7.74 МэВ, а в статьях [125], где использовался неортогональный вариационный метод с изменением параметров α и β волновой функции на основе тангенциальной сетки, найдено -7.76 МэВ.

Нами, на основе изложенных выше методов, при независимом варьировании всех параметров и размерности базиса $N = 5$, получено -7.83 МэВ. Тем самым, энергия связи рассматриваемой системы изменилась примерно на 1% относительно результатов работ [124,125].

Заключение ***Conclusion***

В заключение этого раздела заметим, что существует множество различных математических методов решения дифференциальных уравнений второго порядка, которым является уравнение Шредингера. Однако в известной нам математической литературе обычно приводятся довольно абстрактные методы решений таких уравнений, которые бывает достаточно сложно применить для решения конкретного уравнения, типа уравнения Шредингера, в реальных физических задачах квантовой физики.

Поэтому данный раздел описывает некоторые основные математические методы, непосредственно применимые для нахождения волновых функций из решений уравнения Шредингера в задачах ядерной физики [17]. Рассматриваются вариационные методы решений, а также компьютерные программы, применимые в задачах непрерывного и дискретного спектров состояний двух или трех ядерных частиц [73,74].

II. ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ

Phase shifts analysis

Процедура фазового анализа состоит в разложении полной амплитуды рассеяния в ряд по парциальным волнам или амплитудам и анализе, появляющихся при этом параметров, называемых фазами рассеяния. Такие фазы позволяют получать сведения о природе сильных взаимодействий, структуре резонансных состояний и общем строении атомного ядра [126].

Введение **Introduction**

Во многих задачах ядерной физики низких энергий и ядерной астрофизики требуется знание фаз упругого рассеяния, которые могут быть определены из дифференциальных сечений упругого рассеяния различных ядерных частиц [126]. Как мы уже говорили, фазы рассеяния используются, в частности, для построения межкластерных потенциалов взаимодействия в рассматриваемой здесь потенциальной кластерной модели.

Задача определения или извлечения ядерных фаз из сечений упругого рассеяния в математическом плане сводится к многопараметрической вариационной задаче. Когда известны экспериментальные сечения рассеяния ядерных частиц и математические выражения, полученные в квантовой механике, которые описывают эти сечения в зависимости от некоторых параметров δ_L – ядерных фаз рассеяния, возникает многопараметрическая вариационная задача нахождения этих параметров на заданном интервале значений.

Поскольку не существует общих методов решения многопараметрической вариационной задачи для поиска глобального минимума, мы можем надеяться найти только неко-

торые локальные минимумы при каждой энергии и, исходя из физических соображений, отобрать те из них, которые могут являться решениями исходной задачи. Одним из критериев такого отбора является требование плавного поведения каждой парциальной ядерной фазы, как функции энергии в нерезонансной области и переход ее значения через 90° при резонансной энергии [126].

В разных ядерных системах в зависимости от энергии сталкивающихся частиц, число фаз упругого рассеяния может меняться от $1\div 3$ до $10\div 20$ [92]. Например, в ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеянии мы использовали до 20 парциальных волн, а в $p{}^{12}\text{C}$ системе при низких энергиях, как это будет показано далее, всего одну парциальную 2S фазу.

В этом разделе будут рассмотрены различные экспериментальные данные, методы расчетов дифференциальных сечений, включая компьютерные программы, и результаты для фазового анализа упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$, $p{}^3\text{He}$, $p{}^6\text{Li}$, $p{}^{12}\text{C}$, $n{}^{12}\text{C}$, $p{}^{13}\text{C}$ и ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ рассеяния. Для первой приведенной выше системы рассматриваются энергии до 50 МэВ, 11.5 МэВ во втором случае и примерно до $1\div 1.5$ МэВ для остальных процессов рассеяния, кроме последнего – в ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ системе фазовый анализ выполнен в области $1.5\div 6.5$ МэВ.

2.1 Фазовый анализ упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния

Phase shifts analysis of the elastic ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering

Рассмотрим вначале результаты измерений дифференциальных сечений упругого рассеяния и результаты фазового анализа, полученного из этих сечений, для ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ системы при разных энергиях. Основные данные таких исследований относятся к области энергий до 120 МэВ, но не во всей этой области был выполнен последовательный фазовый анализ экспериментально измеренных дифференциальных сечений упругого рассеяния [127].

2.1.1 Обзор экспериментальных данных по упругому ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеянию

Review of the experimental data on elastic ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering

Приведем краткий обзор экспериментальных данных и результатов фазового анализа упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния, выполненных в разных работах:

1. Измерение дифференциальных сечений упругого рассеяния и фазовый анализ в области энергий 0.6÷3.0 МэВ (л.с.) выполнены в работе [128], где сечения и фазы приведены в таблицах, что очень удобно для их использования и в любой момент позволяет повторить все результаты по нахождению фаз рассеяния.

2. Область энергий 3.0÷5.0 МэВ была рассмотрена в работе [129], но фазы и сечения рассеяния приведены только на рисунках.

3. Энергии 3.8÷11.9 МэВ анализировались в работе [130], где результаты фазового анализа приведены в таблице, а дифференциальные сечения рассеяния показаны только на рисунках.

4. Очень аккуратные измерения дифференциальных се-

чений упругого рассеяния и фазовый анализ выполнены в работах [131,132], где для области энергий 12.3÷22.9 МэВ экспериментальные сечения и фазы рассеяния приведены в таблицах.

5. Область 12.9÷21.6 МэВ рассматривалась и в работе [133], но сечения и фазы рассеяния приведены в ней только на рисунках.

6. Очень хорошие данные для энергий 18.0÷29.5 МэВ приведены в работе [134], где сечения упругого рассеяния и результаты фазового анализа приведены в подробных таблицах.

7. При энергиях 23.1÷38.4 МэВ выполнены экспериментальные измерения сечений и проведен фазовый анализ в работе [135], однако в таблицах приведены только сечения рассеяния.

8. Измерение сечений и фазовый анализ в области 53÷120 МэВ были выполнены в работе [136], но там приведены только табличные фазы, а сечения рассеяния даны на рисунках.

9. Экспериментальные исследования сечений упругого рассеяния для энергий 36.8÷47.3 МэВ были проведены в работе [137], где в подробных таблицах даны результаты измерений дифференциальных сечений, но фазовый анализ этих данных вообще не проводился. Теоретические исследования некоторых энергий из этой области имеются только в работе [138], где выполнен поиск параметров оптического потенциала, а затем, расчетным путем, были получены фазы упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния. Качество оптической подгонки, сделанной в этой области энергий, оставляет желать много лучшего, что непосредственно видно из рисунков работы [138]. Кроме того, при извлечении фаз рассеяния из оптических потенциалов вычислялась только их действительная часть, а мнимая часть фаз считалась малой, находящейся на уровне $1^\circ\div 2^\circ$, что представляется не вполне оправданным для энергий в области 40 МэВ и выше.

10. Энергии 38.5, 49.9 и 51.1 МэВ были рассмотрены в работах [139,140,141] соответственно, где измерены диффе-

ренциальные сечения, но фазовый анализ этих данных не проводился. Вместо этого в работах [139,141] получены параметры оптических потенциалов, и в [141], на их основе, вычислены фазы упругого рассеяния.

Из приведенного обзора видно, что стандартный фазовый анализ экспериментальных данных, т.е. дифференциальных сечений упругого рассеяния в ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ системе при энергиях 36.85÷51.1 МэВ, до сих пор не выполнен. Качество подгонки параметров оптических потенциалов для области энергий 23÷47 МэВ [138] вряд ли можно считать удовлетворительным, что неудивительно, поскольку все эти результаты были получены в 60-е годы, когда вычислительная техника и методы расчетов только начинали развиваться.

Поэтому представляется интересным выполнить точный и максимально полный фазовый анализ экспериментальных дифференциальных сечений упругого рассеяния в области энергий 37÷51 МэВ. Провести такой анализ позволяет табличное представление экспериментальных сечений упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния в этой области энергий, приведенное в работах [137,139,140].

2.1.2 Методы фазового анализа упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния **Methods for phase shift analysis of elastic ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering**

Рассмотрим задачу фазового анализа и методы определения фаз из экспериментальных данных, т.е. определим способы и подходы, которые использовались в нашем фазовом анализе. Дифференциальное сечение упругого рассеяния определяется через фазы рассеяния тождественных частиц следующим образом [88]:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2, \quad (2.1.1)$$

где амплитуда рассеяния представляется в виде суммы кулоновской и ядерной амплитуд

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f_N(\theta) \quad (2.1.2)$$

и выражается через ядерные δ_l и кулоновские σ_l фазы рассеяния [88]:

$$f_c(\theta) = - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\sin^2(\theta/2)] + 2i\sigma_0\}, \quad (2.1.3)$$

$$f_N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) \exp(2i\sigma_l) [S_l - 1] P_l(\cos\theta),$$

где k – волновое число относительного движения частиц $k^2 = 2\mu E/\hbar^2$, E – энергия сталкивающихся частиц в центре масс, μ – приведенная масса, η – кулоновский параметр, θ – угол рассеяния, $P_l(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра.

Обычно ядерные фазы упругого рассеяния представляются в виде

$$\delta_l = \text{Re}\delta_l + i\text{Im}\delta_l,$$

тогда для матрицы рассеяния и параметра неупругости получим

$$S_l(k) = \eta_l(k) \exp[2i\text{Re}\delta_l(k)],$$

$$\eta_l(k) = \exp[-2\text{Im}\delta_l(k)].$$

Суммирование в выражении (2.1.3) выполняется только по четным l , поскольку нечетные парциальные волны не дают вклада в полное сечение, и проводится до некоторого L , величина которого зависит от энергии.

Кулоновскую амплитуду рассеяния (2.1.3), используя выражение

$$D = \sin^2(\theta/2) = 2/[1 - \cos(\theta)] \quad ,$$

можно записать в виде

$$f_c = -\eta D/2k [\cos(C) + i\sin(C)] \quad ,$$

где

$$C = 2\sigma_0 + \eta \ln A \quad .$$

Ядерная амплитуда может быть представлена в следующей форме

$$f_N = \frac{1}{2k} \sum_L \hat{L} \left\{ \begin{aligned} &[B\cos(2\sigma_L) + A\sin(2\sigma_L)] + \\ &+ i[B\sin(2\sigma_L) - A\cos(2\sigma_L)] \end{aligned} \right\} P_L(x), \quad (2.1.4)$$

где

$$x = \cos(\theta) \quad , \quad \hat{L} = 2l + 1 \quad , \quad A = \eta_l \cos(2\delta_l) - 1 \quad , \quad B = \eta_l \sin(2\delta_l)$$

зависят только от ядерных фаз, параметра неупругости и орбитального момента.

Кулоновские фазы рассеяния выражаются через Гамма функцию [88]

$$\sigma_l = \arg\{\Gamma(l + 1 + i\eta)\}$$

и удовлетворяют рекуррентному процессу

$$\sigma_l = \sigma_{l+1} - \text{Arctg}\left(\frac{\eta}{l+1}\right) \quad .$$

Откуда сразу можно получить следующее выражение для кулоновских фаз

$$\alpha_1 = \sigma_1 - \sigma_0 = \sum_{n=1}^1 \text{Arctg}\left(\frac{\eta}{n}\right), \quad \alpha_0 = 0.$$

Величина α_1 используется в преобразованных выражениях (2.1.3), если вынести общий множитель $\exp(2i\sigma_0)$. Тогда $\sigma_1 \rightarrow \alpha_1$ с $\alpha_0 = 0$, что избавляет нас от необходимости вычислять кулоновские фазы в явном виде, и кулоновская амплитуда принимает следующую форму

$$f_c(\theta) = -\left(\frac{\eta}{2k\sin^2(\theta/2)}\right) \exp\{i\eta \ln[\sin^2(\theta/2)]\}.$$

В ${}^4\text{He}^4$ задаче с нулевым спином набор фаз $\delta_{S,L}^J$, зависящий от полного момента J и спина S , переходит в δ_l . Поскольку $S = 0$, то полный момент равен орбитальному моменту $J = L$.

2.1.3 Проверка компьютерной программы Computer program check

Для выполнения данного фазового анализа была написана компьютерная программа на языке "Basic" для компилятора "Turbo Basic" фирмы "Borland International Inc." [142], использующая режим двойной точности, которая затем переведена на Fortran-90. Программа тестировалась по выполненному ранее фазовому анализу из различных работ при разных энергиях [17]. Здесь мы приведем только некоторые из этих тестов.

Например, при энергии 6.47 МэВ (л.с.) в работе [130] приводятся следующие фазы: $\delta_0 = 79.5^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_2 = 80.8^\circ \pm 2^\circ$. В нашем фазовом анализе для них получаются значения $\delta_0 = 80.43^\circ$, $\delta_2 = 80.73^\circ$ при $\chi^2 = 0.18$. Ошибка определения сечений из рисунков работы [130] принималась равной 10%, что и объясняет столь малую величину χ^2 .

При энергии 12.3 МэВ в работе [132] получено $\delta_0 = 29^\circ \pm$

4° , $\delta_2 = 103^\circ \pm 8^\circ$, $\delta_4 = 3^\circ \pm 1.5^\circ$, а наш анализ дает $\delta_0 = 28.37^\circ$, $\delta_2 = 105.03^\circ$, $\delta_4 = 2.62^\circ$ при $\chi^2 = 3.43$.

В этой же работе для 17.8 МэВ найдено $\delta_0 = 7^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_2 = 104^\circ \pm 4^\circ$, $\delta_4 = 16.2^\circ \pm 2^\circ$, а в наших вычислениях мы приходим к значениям $\delta_0 = 7.25^\circ$, $\delta_2 = 103.93^\circ$, $\delta_4 = 17.0^\circ$ при $\chi^2 = 0.46$.

В работе [132] рассмотрена и энергия 22.9 МэВ, для которой получены следующие фазы: $\delta_0 = 169.7^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_2 = 94.0^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_4 = 59.2^\circ \pm 2^\circ$, $\delta_6 = 1.09^\circ$. Наш фазовый анализ этих данных дает величины $\delta_0 = 169.30^\circ$, $\delta_2 = 94.49^\circ$, $\delta_4 = 59.55^\circ$, $\delta_6 = 1.0^\circ$ при $\chi^2 = 1.46$.

При энергиях 12.3, 17.8 и 22.9 МэВ дифференциальные сечения, их ошибки, фазы рассеяния и величина χ^2 приведены в таблицах [132], но сравнивать можно только сами фазы рассеяния. Сравнить χ^2 достаточно сложно, потому что в работах [130,132] рассматривается не величина χ^2 , определенная выше (1.3.1), а ее производная, зависящая от некоторых констант, связанных с экспериментальной методикой.

Приведем более подробно вариант контрольного счета, который выполнен для упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при энергии 29.5 МэВ. В работе [134], где даны экспериментальные сечения и результаты фазового анализа (см. табл.2.1.1), для среднего χ^2 была получена величина 0.68, но методы ее расчета несколько отличаются от изложенных выше, поэтому значение 0.68 также нельзя напрямую сравнивать с нашими результатами.

Табл.2.1.1. Сравнение результатов фазового анализа из работы [134] и наших результатов при 29.5 МэВ.

δ_L , град.	Результаты [134]	Наши результаты
δ_0	150.88 ± 0.17	150.76
δ_2	86.90 ± 0.13	86.61
δ_4	121.19 ± 0.17	121.00
δ_6	2.20 ± 0.11	2.16
δ_8	0.11 ± 0.08	0.09

В результате наших расчетов с фазами из работы [134] для среднего χ^2 по всем точкам получено 1.086. Если учесть весовые множители из [134] можно получить величину 0.6, вполне согласующуюся с результатами этой работы.

Далее нами выполнены подробные расчеты с минимизацией χ^2 по нашей программе, приведенной далее, и сравнение результатов с экспериментальными данными [134]. Для среднего χ^2 было получено 0.600 (вместо 1.086), т.е. наблюдается улучшение качества описания эксперимента почти в 2 раза при очень небольшом изменении значений самих фаз, которые показаны в табл.2.1.1.

В работе [134] получены данные и при энергии 25.5 МэВ, для которой найдены фазы $\delta_0 = 160,36^\circ \pm 1.01^\circ$, $\delta_2 = 89.37^\circ \pm 1.54^\circ$, $\delta_4 = 88.64^\circ \pm 1.77^\circ$, $\delta_6 = 1.61^\circ \pm 0.39^\circ$, $\delta_8 = 0.36^\circ \pm 0.19^\circ$. Наш расчет с этими фазами приводит к $\chi^2 = 2.127$. Выполняя дополнительное варьирование фаз рассеяния, получим заметное улучшение описания имеющихся данных с $\chi^2 = 0.886$. Для фаз получены следующие значения: $\delta_0 = 160.49^\circ$, $\delta_2 = 89.00^\circ$, $\delta_4 = 88.60^\circ$, $\delta_6 = 1.41^\circ$, $\delta_8 = 0.18^\circ$, которые совпадают с результатами [134] в пределах, приведенных в этой работе, ошибок фаз рассеяния.

Небольшие отличия в фазах рассеяния могут быть обусловлены различными значениями констант или масс частиц, которые используются в таких расчетах. Например, можно использовать точные значения масс частиц или же их целые величины, а константа $\hbar^2 / m_0$ может быть равна 41.47 или, например, 41.4686 МэВ·Фм². Поэтому, в целом можно считать, что во всех рассмотренных выше случаях, которые можно считать контрольными, наши результаты, в пределах, приведенных в различных работах ошибок фаз, совпадают с данными, полученными ранее, разными авторами.

2.1.4 Результаты фазового анализа упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния

Results of the ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ scattering phase shifts analysis

Приведем теперь результаты нашего фазового анализа в

области энергий 30÷40 МэВ, которая исследовалась в работе [135], где в таблицах приведены экспериментальные сечения упругого рассеяния, а результаты фазового анализа даны на рисунках.

В работе [135] рассматривалась энергия 30.3 МэВ, для которой получены фазы рассеяния 135 ± 5 , 75 ± 5 , 110 ± 5 , -2 ± 1 (здесь и далее фазы приведены в градусах), в целом описывающие экспериментальные данные. Приведенные здесь ошибки определяют точность извлечения этих фаз из рисунков работы [135]. Используя их в качестве начальных и выполняя варьирование фаз с шестью парциальными волнами, получим $\chi^2 = 2.11$ с фазами 135.89, 76.51, 116.29, 0.0, которые вполне согласуются с результатами [135]. Видно, что достаточно четырех парциальных волн ($l = 0, 2, 4$), чтобы сравнительно хорошо описать такие сечения. Для получения $\chi^2 = 0.177$ требуется уже $L = 16$ и учет мнимой части фаз, но парциальный χ^2_i при 85 градусах остается порядка 1.6. И только увеличение L до 20 позволяет получить $\chi^2 = 0.108$ со всеми парциальными χ^2_i меньше единицы и фазами

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 134.4998; 69.7085; 116.0319; 0.0; 0.0476; 2.5423; 0.8548; \\ &\quad 4.4579; 0.1409; 0.0; 1.0187; \\ \delta_{\text{Im}} &= 1.8530; 3.1955; 0.4002; 3.6621; 0.0; 4.0655; 1.5142; \\ &\quad 3.7219; 2.1339; 0.0; 0.1611, \end{aligned}$$

действительная часть которых в пределах ошибок вполне согласуется с результатами работы [135].

Приведенная точность фаз обусловлена тем, что их округление даже до сотых долей при L порядка 20 может изменить χ^2 в 2÷3 раза. На рис.2.1.1 показаны результаты расчетов сечений с этими фазами.

В работе [135] была рассмотрена также энергия 31.8 МэВ и на рисунках приведены фазы рассеяния 144 ± 5 , 79 ± 5 , 126 ± 5 при $l = 0, 2.4$. Используя их в качестве начальных фаз, т.е. входных параметров для нашей программы, и выполняя варьирование, получим $\chi^2 = 1.99$. Для фаз рассеяния, приводящих к такому минимуму χ^2 , найдены величины $\delta_{\text{Re}} =$

143.78, 78.39, 125.71, которые полностью совпадают с результатами работы [135].

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн без учета мнимой части не приводит к заметному улучшению описания экспериментальных данных. И только если учесть мнимую часть фаз и выполнить варьирование с десятью парциальными волнами, можно получить улучшение величины χ^2 до 1.10 со следующими фазами:

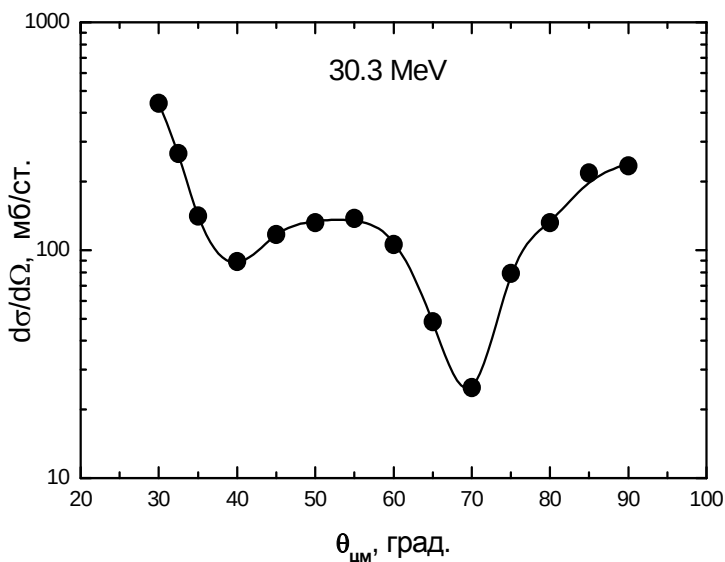


Рис.2.1.1. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 30.3 МэВ [135].

Точки – экспериментальные данные [135], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

$$\delta_{\text{Re}} = 142.89; 78.09; 125.80; 0.0; 0.14; 0.41;$$

$$\delta_{\text{Im}} = 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; 1.26; 0.59.$$

Однако и при таком значении L некоторые парциальные χ^2_i заметно превышают единицу. И только при $L = 16$ можно получить хорошее описание экспериментальных данных со средним $\chi^2 = 0.088$, всеми парциальными χ^2_i лежащими в об-

ласти $0.003 \div 0.5$, и фазами

$$\begin{aligned}\delta_{\text{Re}} &= 152.5263; 69.4016; 126.8901; 0.0; 1.3442; 4.5831; 0.0918; \\ &\quad 2.1935; 0.1769; \\ \delta_{\text{Im}} &= 0.0; 2.0620; 5.3600; 1.4498; 0.2164; 5.6597; 2.2074; \\ &\quad 2.8611; 0.4500.\end{aligned}$$

Из этих результатов видно, что увеличение числа парциальных волн заметно сказывается на величине S и D фаз рассеяния, практически не меняя G волну, а мнимая часть фаз при 30.3 и 31.8 МэВ уже оказывает заметное влияние на качество описания дифференциальных сечений, хотя мнимые части фаз сравнительно малы.

Энергия 34.2 МэВ также была рассмотрена в работе [135], где на рисунках приведены фазы рассеяния 145 ± 5 , 65 ± 5 , 145 ± 5 , 5 ± 2 при $l = 0, 2, 4, 6$, с которыми нами получено $\chi^2 = 6.4$. Выполняя далее варьирование фаз, и включая восьмую парциальную волну, находим заметное улучшение описания экспериментальных данных с $\chi^2 = 0.976$. Для фаз рассеяния были получены следующие величины: $\delta_{\text{Re}} = 145.18, 69.10, 143.52, 4.20, 0.65$, которые практически совпадают с данными [135] в первых шести парциальных волнах.

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн до 20 и учет мнимой части фаз приводит к уменьшению χ^2 только до 0.56 и уже не оказывает существенного влияния на качество описания экспериментальных данных, поскольку некоторые парциальные χ^2_i имеют величину порядка трех. И только увеличение числа парциальных волн до 26 приводит к достаточно гибкому вариационному базису, который дает среднее $\chi^2 = 0.065$ со всеми парциальными χ^2_i меньше 0.4 и фазами

$$\begin{aligned}\delta_{\text{Re}} &= 140.8989; 54.4378; 133.2759; 0.9489; 0.3164; 0.7580; \\ &\quad 5.3713; 0.1052; 0.0; 0.3722; 2.6026; 0.1765; 0.9466; 3.0101; \\ \delta_{\text{Im}} &= 1.2698; 3.0833; 3.3667; 2.9079; 1.4433; 0.0; 3.2185; \\ &\quad 0.0400; 1.8923; 0.3312; 1.6748; 0.6881; 0.0; 0.8276.\end{aligned}$$

Здесь мы наблюдаем заметное изменение значений D и

G фаз рассеяния, по сравнению с результатами при $L = 8$.

Следующая энергия, которая была рассмотрена в работе [135] – это 35.1 МэВ и для нее были получены фазы 147 ± 5 , 80 ± 5 , 150 ± 5 , 7 ± 2 при $l = 0, 2, 4, 6$. Используя их в качестве начальных, нами выполнено варьирование при $L = 8$ без мнимой части. В результате получено $\chi^2 = 2.2$ с фазами 142.29, 76.95, 147.46, 5.42, 1.67, которые вполне согласуются с результатами [135] для первых шести значений l .

При увеличении L до 16 и учете мнимой части фаз получается очень хорошее описание экспериментальных данных при $\chi^2 = 0.015$ с парциальными χ^2_i меньше 0.06 и фазами

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 155.1029; 70.2311; 137.7721; 0.0; 1.0646; 3.1268; 1.9988; \\ &0.4711; 1.7829; \\ \delta_{\text{Im}} &= 3.3855; 0.4609; 4.6500; 0.8327; 1.1338; 1.5133; 5.1306; \\ &0.0; 3.3445. \end{aligned}$$

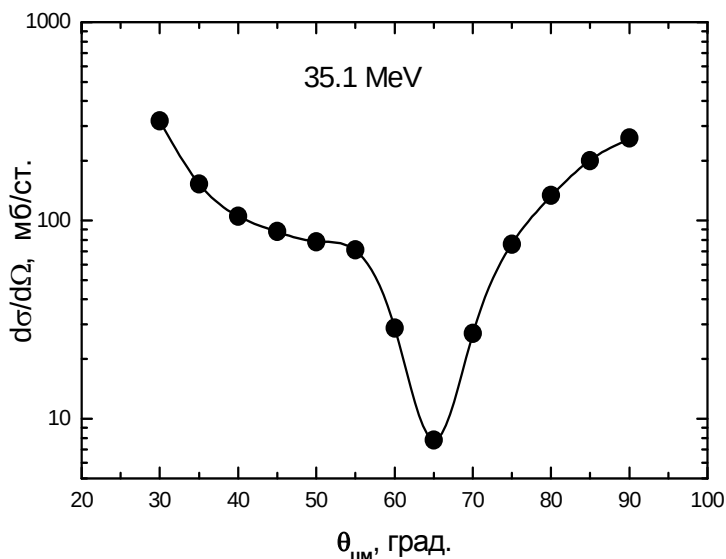


Рис.2.1.2. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 35.1 МэВ [135].

Точки – экспериментальные данные [135], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

При увеличении числа парциальных волн наблюдается заметное изменение фаз рассеяния уже для трех первых l . Результаты расчетов дифференциальных сечений для этой энергии представлены на рис.2.1.2.

Далее в [135] была рассмотрена энергия 37.0 МэВ, для которой на рисунках приведены следующие фазы: 137 ± 5 , 72 ± 5 , 145 ± 5 , -2 ± 2 . Выполняя варьирование фаз с этими начальными условиями при $L = 6$, имеем $\chi^2 = 5.95$ и фазы 135.07, 73.23, 147.97, 0.95, которые хорошо согласуются с данными работы [135]. При $L = 20$ удается получить $\chi^2 = 0.20$, но некоторые парциальные χ^2_i остаются больше единицы, а именно, равными 1.5 при 85 градусах. И только увеличение L до 24 позволяет получить практически нулевое $\chi^2 = 0.003$ при всех парциальных χ^2_i меньше 0.01 и фазы

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 111.5375; 55.9449; 138.4665; 8.1425; 0.0; 10.6324; 3.1546; \\ &7.1735; 2.6095; 1.8621; 3.6626; 0.0; 0.7932; \\ \delta_{\text{Im}} &= 3.5728; 1.5788; 10.0754; 6.7187; 0.0515; 7.7003; 7.8696; \\ &9.2205; 1.9690; 0.0; 1.2802; 0.0562; 0.2180, \end{aligned}$$

которые заметно отличаются от результатов работы [135] и наших вычислений при $L = 6$ без учета мнимой части.

В работе [135] была рассмотрена и энергия 38.4 МэВ, для которой на рисунках приведены следующие фазы рассеяния: 135 ± 5 , 75 ± 5 , 170 ± 5 , 5 ± 2 . С такими фазами без варьирования их значений по нашей компьютерной программе получается $\chi^2 = 19.5$. Варьируя значения фаз, находим существенное улучшение описания эксперимента при шести парциальных волнах с $\chi^2 = 1.39$. Для фаз рассеяния были получены следующие значения: 137.65, 89.62, 175.80, 6.35. Здесь только D волна заметно отличается от результатов работы [135]. Увеличим теперь L до 10 и учтем мнимую часть фаз. Величина χ^2 уменьшается до 0.91 с фазами $\delta_{\text{Re}} = 134.09$, 86.30, 170.78, 5.39, 1.25, 0.78 и $\delta_{\text{Im}} = 0.0$, 0.0, 1.00, 0.49, 0.39, 0.62, но некоторые парциальные χ^2_i остаются намного больше единицы.

В спектрах ядра ^8Be в области 19 МэВ имеется несколько

узких уровней, которые должны оказывать определенное влияние на экспериментальные сечения при энергии 38.4 МэВ. Возможно, поэтому увеличение L даже до 28 приводит к $\chi^2 = 0.207$ с почти всеми парциальными χ^2_i меньше единицы, за исключением одного угла при 66 градусах, при котором экспериментальное сечение равно 2.7 ± 0.5 мб, а расчетное не поднимается выше 2.0 мб, что приводит к величине χ^2_i около 2 и фазам

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 129.8968; 76.4875; 167.6839; 1.7278; 0.0; 2.0189; 0.1684; \\ &0.0051; 0.6075; 0.5257; 0.0056; 0.0211; 0.3073; 0.3494; 0.0575; \\ \delta_{\text{Im}} &= 4.2386; 2.3498; 0.5185; 0.3036; 1.6971; 0.0; 1.4852; \\ &1.7773; 0.0747; 0.1783; 0.6247; 2.1599; 0.0; 1.0262; 0.5343. \end{aligned}$$

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн не приводит к улучшению описания экспериментальной точки при 66 градусах и практически не меняет величину χ^2 . Полученные таким образом фазы несколько отличаются от наших результатов при $L = 6 \div 10$, но вполне согласуются с результатами работы [135] для первых l .

В работе [139] в таблице приведены дифференциальные сечения при энергии 38.5 МэВ, но фазовый анализ этих данных не выполнялся. Используем в качестве начальных фазы, полученные в предыдущем случае при $L = 16$, находим $\chi^2 = 0.55$. Для $L = 24$ получаем $\chi^2 = 0.50$, и только при 26 парциальных волнах χ^2 начинает уменьшаться, и оказывается равен 0.265, а для $L = 30$ χ^2 достигает своего предела, равного 0.207 с фазами

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} &= 129.9036; 77.1998; 165.6615; 1.5187; 0.5671; 2.1129; \\ &0.0601; 0.0; 0.6059; 0.4907; 0.0005; 0.0896; 0.3055; 0.4272; \\ &0.1328; 0.0; \\ \delta_{\text{Im}} &= 3.8528; 2.4699; 1.1513; 0.9460; 1.4118; 0.0; 1.7083; \\ &2.0442; 0.0; 0.2196; 0.8160; 2.4573; 0.0; 0.9449; 0.4563; 0.0. \end{aligned}$$

И здесь, как и в предыдущем случае, все парциальные χ^2_i меньше единицы, за исключением того же угла при 66 граду-

сах, при котором разница экспериментального и расчетного сечений приводит к величине χ^2_i около 2.

Далее, в первой из работ [143] на рисунках приведены данные для энергий 39, 40 и 41 МэВ – используем одну из них, а именно 40 МэВ, для фазового анализа. Принимая в качестве начальных фаз результаты предыдущего анализа, для $L = 12$ получим $\chi^2 = 0.22$ со следующими фазами:

$$\begin{aligned}\delta_{\text{Re}} &= 69.4967; 49.5392; 81.4271; 1.3593; 0.0; 0.9287; 0.0255; \\ \delta_{\text{Im}} &= 0.8975; 0.0; 4.5934; 7.1150; 1.2930; 0.0; 0.1762.\end{aligned}$$

Дальнейшее увеличение числа парциальных волн не приводит к заметному уменьшению χ^2 . Полученные фазы рассеяния заметно отличаются от найденных ранее для энергии 38.4 МэВ и рассмотренной далее энергии 40.77 МэВ. Отметим, что в работе [138] для энергии 40 МэВ из оптических потенциалов были получены следующие фазы: 75.4, 22.3, 84.6, 5.1, 0.35, которые существенно отличаются от наших результатов только в D волне.

Из приведенного анализа видно, что в рассмотренной области энергий практически во всех случаях наши результаты при малом числе парциальных волн, в пределах приведенных ошибок, совпадают с данными, полученными ранее. Поскольку мы учитывали большее число парциальных волн, можно считать такие результаты уточнением известных данных по фазам упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния в области 30÷40 МэВ.

Перейдем теперь к рассмотрению данных по дифференциальным сечениям в области энергий 40÷50 МэВ, для которых проводилась только подгонка оптических потенциалов, а фазовый анализ не выполнялся.

В работе [137] была рассмотрена энергия 40.77 МэВ и в таблицах приведены дифференциальные сечения упругого рассеяния. На основе этих данных в [138] была проведена подгонка параметров оптических потенциалов, а фазы рассеяния рассчитывались на их основе, причем в [138] приведена только их действительная часть. В результате были по-

лучены фазы 94.4, 21.8, 86.0, 5.4, 0.38 для $l = 0, 2, 4, 6, 8$.

Используя их в качестве начальных и выполняя варьирование при $L = 8$ и учете мнимой части фаз, получим $\delta_{\text{Re}} = 146.46, 44.09, 92.40, 9.48, 0.0$ и $\delta_{\text{Im}} = 28.32, 0.02, 0.0, 1.78, 0.0$ при $\chi^2 = 5.0$. Увеличение L до 34 приводит нас к $\chi^2 = 1.34$, а при $L = 40$ к $\chi^2 = 1.21$ с фазами рассеяния (некоторые парциальные χ^2_i заметно больше единицы)

$\delta_{\text{Re}} = 124.9455; 37.3915; 86.8874; 1.8977; 0.0; 1.1045; 1.9122;$
 $0.0897; 4.1335; 2.7145; 4.0382; 0.3077; 0.0; 0.1285; 0.7936;$
 $1.1646; 0.4322; 0.0; 0.1584; 0.0; 0.1347;$
 $\delta_{\text{Im}} = 18.7685; 4.3167; 0.0011; 1.5199; 0.0001; 1.4317; 1.9380;$
 $0.9304; 0.0; 0.3225; 0.4839; 2.2038; 1.0627; 0.6151; 0.0822; 0.0;$
 $0.5439; 0.4801; 0.1615; 0.1930; 0.0.$

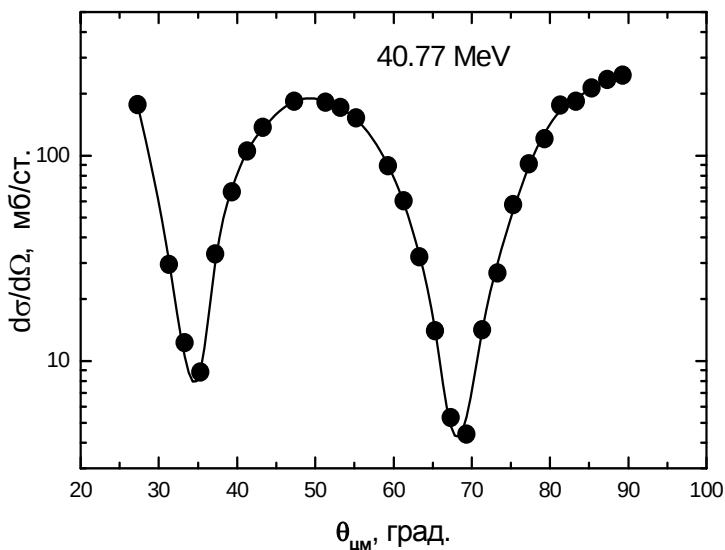


Рис.2.1.3. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 40.77 МэВ [137].

Точки – экспериментальные данные [137], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

Результаты расчетов дифференциальных сечений при

этой энергии показаны на рис.2.1.3.

Далее в работе [137] была рассмотрена энергия 41.9 МэВ, измеренные сечения приведены в таблице, а теоретический анализ вообще не проводился. С фазами рассеяния для предыдущей энергии и $L = 8$, но при 41.9 МэВ, получаем очень большое значение χ^2 , равное 1300. Варьирование фаз с восемью парциальными волнами и учетом мнимой части приводит к следующему результату: $\delta_{\text{Re}} = 108.91, 56.36, 110.12, 12.53, 2.44$ и $\delta_{\text{Im}} = 22.74$ при $L = 0$, а остальные мнимые фазы равны нулю, и величине $\chi^2 = 10.3$. Увеличение L до 14 приводит к несколько лучшему результату $\chi^2 = 5.66$, при $L = 30$ находим $\chi^2 = 4.10$, и только увеличение L до 40 позволяет получить меньшее $\chi^2 = 0.857$ со следующими фазами рассеяния:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} = & 105.8962; 53.0717; 103.3716; 16.0950; 0.0; 0.0710; 3.9094; \\ & 1.5391; 0.0; 0.5518; 1.4615; 0.0091; 0.4501; 0.0; 1.1544; 0.0631; \\ & 0.1885; 0.8750; 0.0000; 0.4869; 0.0; \\ \delta_{\text{Im}} = & 19.0395; 0.0005; 0.0; 0.2844; 0.0; 0.1207; 0.4153; 0.0; \\ & 0.2214; 0.1117; 0.0968; 0.0069; 0.5820; 0.2484; 0.2132; 0.3826; \\ & 0.3416; 0.3118; 0.0642; 0.1986; 0.1950. \end{aligned}$$

И при этой энергии 41.9 МэВ, несмотря на сравнительно малое среднее χ^2 , некоторые парциальные χ^2_i оказываются больше единицы.

Следующая энергия, рассмотренная в работе [137] – это 44.41 МэВ. Используем в качестве начальных фаз результаты предыдущего анализа, тогда при $L = 8$ получим величину $\chi^2 = 10.85$ с фазами $\delta_{\text{Re}} = 98.46, 73.53, 128.64, 17.86, 3.93$ и $\delta_{\text{Im}} = 12.31, 3.97, 4.85, 0.0, 0.88$. При $L = 20$ получаем некоторое улучшение описания дифференциальных сечений с $\chi^2 = 4.97$, а, увеличивая L до 30, находим $\chi^2 = 0.97$. Для $L = 34$ можно получить еще некоторое улучшение $\chi^2 = 0.68$, и только увеличение L до 40 приводит к заметному улучшению описания экспериментальных данных при $\chi^2 = 0.48$ и фазам

$$\delta_{\text{Re}} = 117.3916; 72.1036; 115.9565; 16.7765; 3.3375; 0.3926;$$

0.0756; 0.0270; 0.0; 2.6021; 2.2519; 0.2051; 0.1094; 0.0091; 0.0;
 0.2321; 0.3424; 0.0896; 0.0557; 0.0609; 0.0279;
 $\delta_{\text{im}} = 30.1833; 9.4258; 3.4545; 0.1919; 1.4489; 2.9905; 1.8006;$
 $1.2168; 0.0054; 0.1728; 0.3725; 0.0587; 0.3169; 0.1322; 0.0572;$
 $0.0; 0.0583; 0.0817; 0.0583; 0.0316; 0.0383.$

Но и здесь некоторые парциальные χ^2_i имеют величину несколько больше единицы.

В работе [137] приведены и данные по дифференциальным сечениям для энергии 47.1 МэВ. Измеренные сечения даны в таблицах, а извлечение фаз [138] из оптических потенциалов приводит к следующим действительным фазам рассеяния: 99, 51.8, 145.5, 18.7, 2.8. Наши вычисления с такими фазами дают $\chi^2 = 156$, а учет мнимой части фаз и их варьирование позволяет улучшить согласие с экспериментом почти на 1.5 порядка и получить $\chi^2 = 2.63$. Фазы рассеяния для этой энергии и $L = 8$ оказались следующими: $\delta_{\text{Re}} = 105.34, 55.05, 140.60, 18.85, 2.84$ и $\delta_{\text{im}} = 5.48, 0.52, 0.78, 0.85, 0.03$, действительная часть которых практически совпадает с результатами [138].

Увеличим теперь L и посмотрим, сколько парциальных волн нужно учитывать для получения χ^2 меньше единицы. При 14 парциальных волнах получаем $\chi^2 = 1.33$, для $L = 20$ находим $\chi^2 = 1.02$, и только при 30 парциальных волнах имеем $\chi^2 = 0.70$ с фазами

$\delta_{\text{Re}} = 106.1704; 51.6346; 134.1084; 17.2203; 2.3269; 0.3964;$
 $0.6347; 0.0; 0.4220; 0.2338; 0.4530; 0.0; 0.0020; 0.0; 0.1307;$
 $0.3588;$
 $\delta_{\text{im}} = 11.9789; 3.4758; 1.2031; 0.0; 0.0544; 1.0305; 1.1103;$
 $0.5890; 0.2763; 0.1363; 0.4951; 0.2665; 0.2795; 0.0; 0.0; 0.1021.$

И при этой энергии некоторые парциальные χ^2_i имеют величину несколько больше единицы.

Рассмотрим теперь энергию 51.1 МэВ. Сечения были измерены в работе [141] и приведены на рисунках, а фазовый анализ вообще не проводился. Поэтому используем в качест-

ве начальных фаз результаты работы [136] при 53.4 МэВ, где для реальной части фаз получено $\delta_0 = 104,8 \pm 2.4$, $\delta_2 = 47.9 \pm 1.7$, $\delta_4 = 137.9 \pm 1.3$, $\delta_6 = 27.5 \pm 0.6$, $\delta_8 = 2.0 \pm 0.5$. Для мнимой части соответственно найдено 12.1 ± 3.1 , 22.1 ± 1.7 , 16.3 ± 1.1 , 3.2 ± 0.5 , 0 ± 0.4 .

Выполняя варьирование этих фаз при $L = 10$, получим $\chi^2 = 1.12$, а для самих фаз рассеяния находим $\delta_{\text{Re}} = 111.30, 54.76, 152.85, 24.97, 3.34, 0.03$ и $\delta_{\text{Im}} = 14.03, 19.98, 23.36, 1.91, 0.27, 0.12$. В качестве экспериментальных ошибок использовались ошибки определения сечений из рисунка работы [141], которые принимались равными 10%.

Увеличение L до 20 позволяет получить несколько лучшее $\chi^2 = 0.97$ и фазы рассеяния

$$\begin{aligned}\delta_{\text{Re}} &= 110.8739; 55.0885; 151.8536; 24.9089; 3.2213; 0.0379; 0.0; \\ &\quad 0.2313; 0.1331; 0.2534; 0.2644; \\ \delta_{\text{Im}} &= 14.9625; 20.3880; 23.6627; 1.8434; 0.3412; 0.1910; 0.0009; \\ &\quad 0.0; 0.0; 0.0; 0.1214.\end{aligned}$$

Эти фазы мало отличаются от наших результатов при 10 парциальных волнах, а увеличение числа парциальных волн до 30 приводит к $\chi^2 = 0.56$, что принципиально не меняет качество описания экспериментальных данных.

Отметим, что в работе [141] была выполнена подгонка оптического потенциала, а затем вычислены следующие фазы рассеяния δ_l и неупругости η_l

$$\begin{aligned}\delta_{\text{Re}} &= 111 \pm 4; 65 \pm 4; 163 \pm 4; 28 \pm 3; 4.2 \pm 0.6; \\ \eta &= 0.51 \pm 0.07; 0.51 \pm 0.07; 0.53 \pm 0.07; 0.855 \pm 0.03; 0.985 \pm 0.004; \\ &\quad 0.998 \pm 0.001.\end{aligned}$$

Как видно, их действительная часть довольно близка к результатам нашего фазового анализа.

И в заключение этого параграфа проведем фазовый анализ экспериментальных данных при энергии 49.9 МэВ [140,144], принимая в качестве начальных фаз результаты предыдущего анализа. При $L = 20$ получим довольно боль-

шую величину $\chi^2 = 20.2$, и только увеличивая L до 30, находим заметное улучшение согласия расчета с экспериментальными данными с $\chi^2 = 0.019$, всеми парциальными χ_i^2 меньше 0.2 и фазами

$$\begin{aligned} \delta_{\text{Re}} = & 127.5003; 34.3877; 141.3168; 8.0940; 0.0092; 0.3824; \\ & 1.8194; 0.7321; 4.4653; 2.4917; 0.0005; 0.9836; 0.1437; 0.0018; \\ & 0.5503; 0.3922; \\ \delta_{\text{Im}} = & 31.2338; 17.9109; 6.1097; 0.2166; 3.4990; 5.1733; 4.1288; \\ & 0.0; 1.8539; 1.1013; 0.0491; 0.9386; 0.3148; 0.0746; 0.2505; \\ & 0.1446. \end{aligned}$$

Результаты расчета дифференциальных сечений с этими фазами показаны на рис.2.1.4.

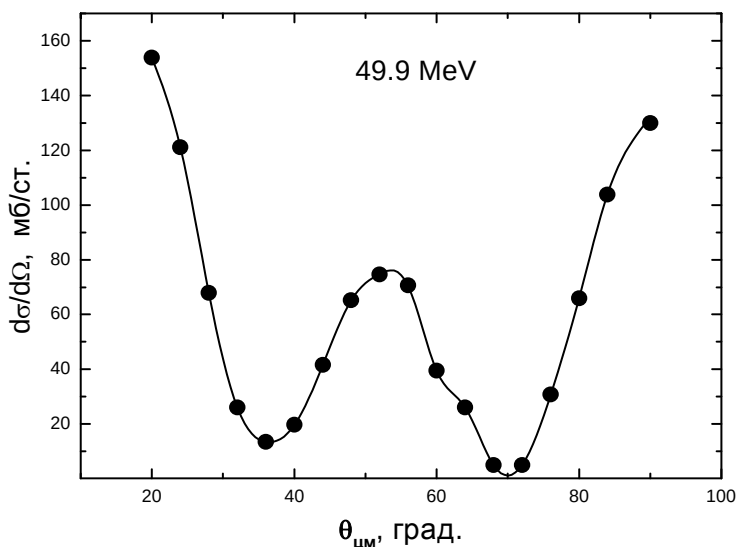


Рис.2.1.4. Дифференциальные сечения упругого рассеяния альфа-частиц на ядрах гелия при энергии 49.9 МэВ.

Точки – экспериментальные данные [140,144], сплошная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

В сводных табл.2.1.2 и 2.1.3 приведены фазы рассеяния

(от 360 градусов при нулевой энергии, поскольку в S волне имеется два запрещенных состояния [13], которые на рис.2.1.5÷2.1.8 приведены в более привычной форме – от 180 градусов), полученные в наших расчетах при рассмотренных здесь энергиях. В табл.2.1.2 даны результаты для $L < 12$ без учета мнимой части, а в табл.2.1.3 при $L > 12$ с учетом мнимой компоненты фаз.

Почти для всех энергий имеется заметное различие этих фазовых анализов хотя бы в одной парциальной фазе – при анализе с небольшим числом парциальных волн, т.е. когда $L = 4÷10$ и при максимальном учете высших парциальных волн, когда L достигает 20÷40.

На рис.2.1.5÷2.1.8 крестиками приведены фазы из табл.2.1.2, а треугольниками из табл.2.1.3. Приведены также известные на сегодняшний день результаты других фазовых анализов при энергиях в области 20÷60 МэВ.

Табл.2.1.2. Фазы рассеяния (в град.) и величина χ^2
для $L < 12$.

(При $E = 49.9$ МэВ приведены результаты для $L = 20$).

$E_{\text{лаб}}, \text{МэВ}$	δ_0	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8	χ^2
29.5	150.7	86.4	120.7	2.0	0.01	0.6
30.3	135.9	76.5	116.3	0.0	0.0	2.1
31.8	142.9	78.1	125.8	0.0	0.1	1.1
34.2	145.2	69.1	143.5	4.2	0.7	1.0
35.1	142.3	77.0	147.5	5.4	1.7	2.2
37.0	135.1	73.2	148.0	1.0	0.0	6.0
38,4	137.7	89.6	175.8	6.4	0.0	1.4
40.77	146.5	44.1	92.4	9.5	0.0	5.0
41.9	108.9	56.4	110.1	12.5	2.4	10.3
44.41	98.5	73.5	128.6	17.9	3.9	10.9
47.1	105.3	55.1	140.6	18.9	2.8	2.6
49.9	128.5	26.1	138.5	6.9	0.0	20.2
51.1	111.3	54.8	152.8	25.0	3.3	1.1

Табл.2.1.3. Фазы рассеяния (в град.) и величина χ^2 для $L > 12$.
(При $E = 49.9$ МэВ приведены результаты для $L = 30$).

$E_{\text{лаб}}, \text{МэВ}$		δ_0	δ_2	δ_4	δ_6	δ_8	χ^2
30.3	Re δ_L	134.5	69.7	116.0	0.0	0.04	0.11
	Im δ_L	1.8	3.2	0.4	3.7	0.0	
31.8	Re δ_L	152.5	69.4	126.9	0.0	1.3	0.09
	Im δ_L	0.0	2.1	5.4	1.5	0.2	
34.2	Re δ_L	140.9	54.4	133.3	0.9	0.3	0.06
	Im δ_L	1.3	3.1	3.4	2.9	1.4	
35.1	Re δ_L	155.1	70.2	137.8	0.0	1.1	0.015
	Im δ_L	3.4	0.5	4.6	0.8	1.1	
37.0	Re δ_L	111.5	55.9	138.5	8.1	0.0	0.003
	Im δ_L	3.6	1.6	10.1	6.7	0.1	
38.4	Re δ_L	129.9	76.5	167.7	1.7	0.0	0.21
	Im δ_L	4.2	2.3	0.5	0.3	1.7	
40.0	Re δ_L	69.5	49.5	81.4	1.4	0.0	0.22
	Im δ_L	0.9	0.0	4.6	7.1	1.3	
40.77	Re δ_L	124.9	37.4	86.9	1.9	0.0	1.21
	Im δ_L	18.8	4.3	0.0	1.5	0.0	
41.9	Re δ_L	105.9	53.1	103.4	16.1	0.0	0.86
	Im δ_L	19.0	0.0	0.0	0.3	0.0	
44.41	Re δ_L	117.4	72.1	116.0	16.8	3.3	0.48
	Im δ_L	30.2	9.4	3.4	0.2	1.4	
47.1	Re δ_L	106.2	51.6	134.1	17.2	2.3	0.70
	Im δ_L	12.0	3.5	1.2	0.0	0.0	
49.9	Re δ_L	127.5	34.4	141.3	8.1	0.0	0.02
	Im δ_L	31.2	17.9	6.1	0.2	3.5	
51.1	Re δ_L	110.9	55.1	151.8	24.9	3.2	0.97
	Im δ_L	15.0	20.4	23.7	1.8	0.3	

Рассмотрим теперь, как полученные фазы рассеяния согласуются с энергетическими уровнями, присутствующими в ядре ^8Be [145]. В спектрах этого ядра при энергиях 19.86, 20.1 и 20.2 МэВ находятся уровни с ширинами 0.7, примерно 1.1 и

около 1.0 МэВ и моментами 4^+ , 2^+ и 0^+ при нулевом изospине, которые могут присутствовать, как резонансы в ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ системе.

В лабораторной системе они попадают в область энергий $39.7 \div 40.4$ МэВ и влияют на поведение фаз рассеяния при 40.0 и 40.77 МэВ, приводя к их скачку в парциальных волнах с такими же орбитальными моментами 0, 2 и 4, как это показано на рис.2.1.5÷2.1.7.

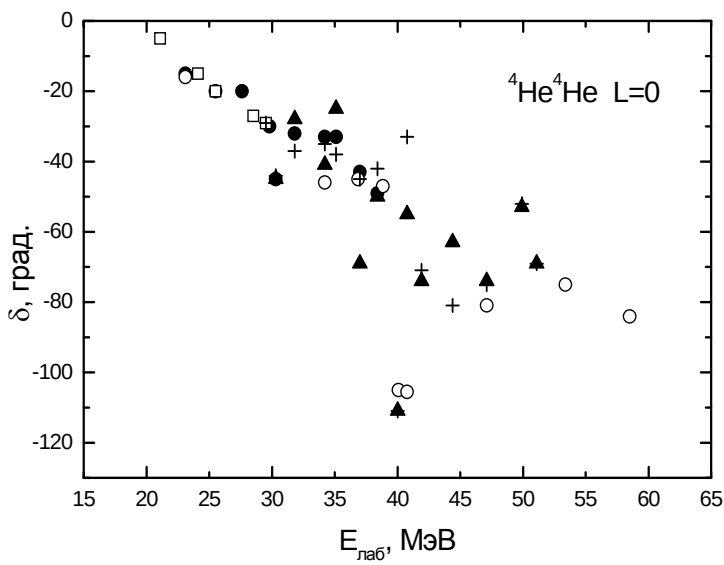


Рис.2.1.5. Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 0$.

Точки: $\circ$ – данные работ [138,141] при 51.1 МэВ и [136] при энергии больше 53 МэВ; $\bullet$ – результаты работы [135] при $23 \div 38$ МэВ, которые определялись из рисунков; $\square$ – данные [134] в области энергий $20 \div 30$ МэВ; $+$ и $\blacktriangle$ – наши результаты.

Этот скачок фаз очень хорошо виден в S и G волнах, а в G волне можно видеть даже подъем фазы, который наблюдается до 47 МэВ. В наших расчетах нет столь явного провала фазы в D волне рассеяния при 40 МэВ, какой имеется в результатах работы [138], но, тем не менее, он также присутствует и виден на рис.2.1.6.

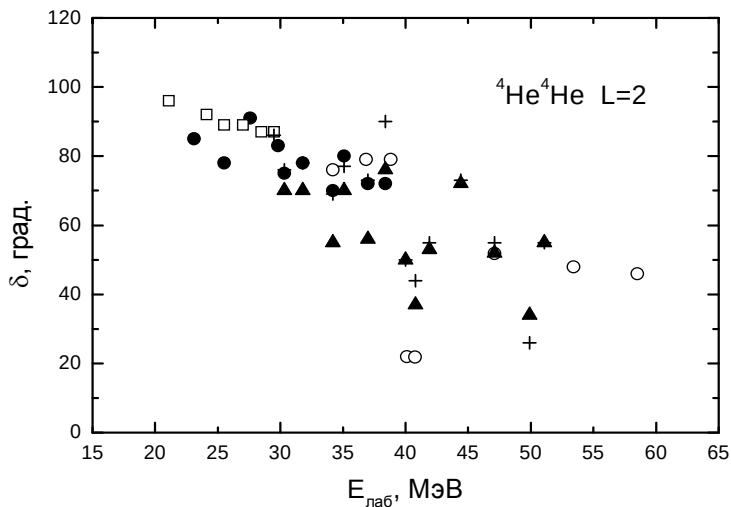


Рис.2.1.6. Фазы упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 2$.

Точки: $\circ$ – данные работ [138,141] при 51.1 МэВ и [136] при энергии больше 53 МэВ; $\bullet$ – результаты работы [135] при 23÷38 МэВ, которые определялись из рисунков; $\square$ – данные [134] в области энергий 20÷30 МэВ; $+$ и $\blacktriangle$ – наши результаты.

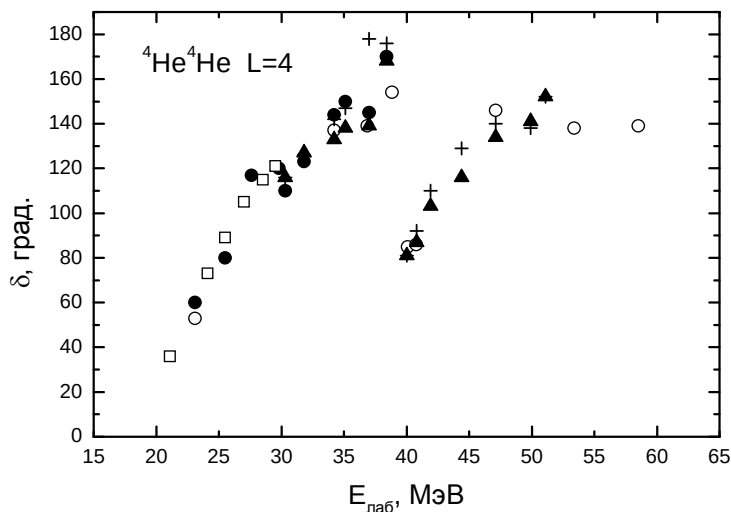


Рис.2.1.7. Фазы упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 4$.

Точки: $\circ$ – данные работ [138,141] при 51.1 МэВ и [136] при энергии больше 53 МэВ; $\bullet$ – результаты работы [135] при 23÷38 МэВ, которые определялись из рисунков; $\square$ – данные [134] в области энергий 20÷30 МэВ; $+$ и $\blacktriangle$ – наши результаты.

При энергии 22.2 МэВ [145] в спектре уровней ${}^8\text{Be}$ имеется состояние с моментом 2^+ и шириной 0.8 МэВ при нулевом изоспине. Действительно, D фаза при энергии 44.41 МэВ испытывает заметный скачок вверх. К сожалению, в этой области энергий имеется только одно измерение дифференциальных сечений и нельзя точно воспроизвести поведение D фазы рассеяния.

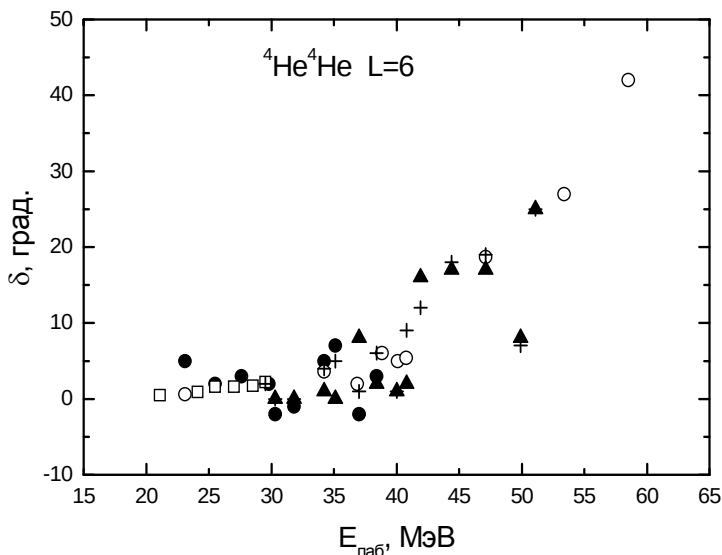


Рис.2.1.8. Фазы упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния при $L = 6$.

Точки: $\circ$ – данные работ [138,141] при 51.1 МэВ и [136] при энергии больше 53 МэВ; $\bullet$ – результаты работы [135] при 23÷38 МэВ, которые определялись из рисунков; $\square$ – данные [134] в области энергий 20÷30 МэВ. $+$ и $\blacktriangle$ – наши результаты.

В спектрах ядра ${}^8\text{Be}$ при 25.2 и 25.5 МэВ присутствуют уровни с моментом 2^+ и 4^+ и изоспином, равным нулю. Рассматриваемая нами энергия 49.9 МэВ попадает в область первого из них и в D волне рассеяния наблюдается резкий спад фазы. Такой же скачок имеется и в S волне, однако, его нельзя сопоставить какому-либо уровню ядра ${}^8\text{Be}$. То же самое относится к парциальной волне с $L = 6$, где фаза рассея-

ния также претерпевает резкий скачок. Энергия 51.1 МэВ попадает на резонанс при 25.5 МэВ в G волне, но ее влияние явно не просматривается – возможно, это очень узкий уровень ядра ${}^8\text{Be}$.

Таким образом, при разных энергиях в области 30÷40 МэВ выполнено уточнение известных значений фаз упругого ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ рассеяния. Фазовый анализ при энергиях 40.77, 41.9, 44.41, 47.1, 49.9 и 51.1 МэВ приводит нас к вполне разумным результатам и, в целом, согласуется с данными других работ и спектрами ядра ${}^8\text{Be}$ [92].

Для более детального изучения поведения фаз рассеяния в различных парциальных волнах желательно иметь более подробные экспериментальные измерения дифференциальных сечений в области энергий 39÷41 МэВ, 43÷45 МэВ и 49÷52 МэВ с шагом порядка 0.1÷0.3 МэВ [92].

2.1.5 Программа для ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ и ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ фазового анализа

The program for ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ and ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ phase shifts analysis

Приведем распечатку компьютерной программы на языке Fortran, предназначенной для ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ и ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ фазового анализа. Какой именно анализ будет выполняться, зависит от значения параметра NYS и LH. В случае ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ они должны быть равны 1 и 2 соответственно, для выполнения ${}^4\text{He}{}^{12}\text{C}$ фазового анализа их значения равны 0 и 1. Кроме того, для больших энергий, порядка 30÷40 МэВ, параметр NP должен быть равен

$$NP = 2 * LMA + LH ,$$

а не LMA, что позволяет учитывать комплексную часть фаз рассеяния.

Обозначения некоторых начальных параметров программы приведены ниже

Z1=2.0D-000; Z2=2.0D-000 ! Заряды
 AM1=4.0D-000; AM2=4.0D-000 ! Массы
 LMI=0 ! Начальный орбитальный момент
 LH=1 ! Шаг по моменту
 LMA=2 ! Максимальный момент
 EP=1.0D-010 ! Точность поиска минимума
 NI=10 ! Число итераций
 NT=22 ! Число экспериментальных точек
 EL=12.30D-000 ! Лабораторная энергия

Приведем текст, т.е. распечатку самой компьютерной программы.

```
PROGRAM FAZ_AL_AL
! ПРОГРАММА ФАЗОВОГО АНАЛИЗА ДЛЯ AL-AL AND
!AL-12C
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER
L,I,NT,LMI,LMA,LH,NYS,NP,NTT,NV,NI,LMI1,LH1,NPP
DIMENSION          ST(0:50),FR(0:50),FM(0:50),ET(0:50),
XP(0:50),ETA(0:50)
COMMON /A/ PI,NT,TT(0:50),GG,SS,LMI,LMA,LH,NYS,NP
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NTT
COMMON /C/ LH1,LMI1,P1,NPP
! ***** НАЧАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ *****
PI=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)
P1=PI
Z1=2.0D-000; Z2=2.0D-000
AM1=4.0D-000; AM2=4.0D-000
AM=AM1+AM2
A1=41.46860D-000
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
B1=2.0D-000*PM/A1
LMI=0; LMI1=LMI; LH=2; LH1=LH
LMA=4; LMA1=LMA
NYS=1; ! IF =1 THEN 4HE4HE, IF = 0 THEN 4HE12C
EP=1.0D-010; NV=1
FH=0.010D-000; NI=10
```

```

!NP=2*LMA+LH
NP=LMA; NPP=NP
! ***** CROSS SECTIONS *****
SE(1)=1357.0D-000; SE(2)=1203.0D-000; SE(3)=1074.0D-000;
SE(4)=870.0D-000; SE(5)=759.0D-000
SE(6)=688.0D-000; SE(7)=467.0D-000; SE(8)=271.0D-000;
SE(9)=196.0D-000; SE(10)=130.0D-000
SE(11)=93.90D-000; SE(12)=57.0D-000; SE(13)=32.50D-000;
SE(14)=12.30D-000; SE(15)=2.280D-000
SE(16)=24.7; SE(17)=86.5; SE(18)=157; SE(19)=270
SE(20)=337.0D-000; SE(21)=408.0D-000; SE(22)=418.0D-000
DE(1)=39.0D-000; DE(2)=40.0D-000; DE(3)=24.0D-000;
DE(4)=20.0D-000; DE(5)=16.0D-000;
DE(6)=17.0D-000
DE(7)=12.0D-000; DE(8)=7.0D-000; DE(9)=4.10D-000;
DE(10)=3.60D-000; DE(11)=2.20D-000;
DE(12)=1.50D-000
DE(13)=1.1; DE(14)=1.0; DE(15)=0.4; DE(16)=0.7;
DE(17)=2.0; DE(18)=3.6
DE(19)=6.50D-000; DE(20)=7.40D-000; DE(21)=8.20D-000;
DE(22)=8.30D-000
TT(1)=22.0D-000; TT(2)=24.0D-000; TT(3)=26.0D-000;
TT(4)=28.0D-000; TT(5)=30.0D-000
TT(6)=32.0D-000; TT(7)=35.0D-000; TT(8)=40.0D-000;
TT(9)=42.0D-000
TT(10)=45.0D-000; TT(11)=46.0D-000; TT(12)=48.0D-000;
TT(13)=50.0D-000
TT(14)=52.0D-000; TT(15)=55.0D-000; TT(16)=60.0D-000;
TT(17)=65.0D-000
TT(18)=70.0D-000; TT(19)=75.0D-000; TT(20)=80.0D-000;
TT(21)=85.0D-000; TT(22)=90.0D-000
! ***** FOR AL-AL ON E=12.3 *****
NT=22; NTT=NT; EL=12.30D-000
FR(0)=29.0D-000; FR(2)=103.0D-000; FR(4)=3.0D-000
FM(0)= 0.0D-000; FM(2)= 0.0D-000; FM(4)=0.0D-000
OPEN (4,FILE='FAZ.DAT')
DO L=LMI,LMA,LH
READ(4,*) L,FR(L),FM(L)

```

```

ENDDO
CLOSE(4)
! ***** ENERGY IN LAB. SYSTEM *****
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*PI/180.0D-000
FR(L)=FR(L)*PI/180.0D-000
ET(L)=DEXP(-2.0D-000*FM(L))
ENDDO
FH=FH*PI/180.0D-000
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I)=FR(I)
XP(I+LMA+LH)=FM(I)
ENDDO
! ***** TRANSFORM TO C.M. *****
EC=EL*PM/AM1
SK=EC*B1
SS=DSQRT(SK)
GG=3.44476D-002*Z1*Z2*PM/SS
! ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL VAR(ST,FH,NI,XP,EP,XI,NV)
PRINT*, "XI-KV=; NI=; EL=",XI,NI,EL
! ***** TOTAL CROSS SECTION *****
SIGMAR=0.0D-000; SIGMAS=0.0D-000
DO L=LMI,LMA,LH
FR(L)=XP(L)
FM(L)=XP(L+LMA+LH)
A=FR(L)
ETA(L)=1
!ETA(L)=DEXP(-2.0D-000*FM(L))
SIGMAR=SIGMAR+(2*L+1)*(1-(ETA(L))**2)
SIGMAS=SIGMAS+(2*L+1)*(ETA(L))**2*(DSIN(A))**2
ENDDO
SIGMAR=10.0D-000*4.0D-000*PI*SIGMAR/SK
SIGMAS=10.0D-000*4.0D-000*PI*SIGMAS/SK
PRINT*, "SIGMR-TOT=",SIGMAR
PRINT*, "SIGMS-TOT=",SIGMAS
PRINT*, "    T        SE        ST        XI"
! ***** RESULTS *****

```

```

DO I=1,NT
WRITE(*,2) TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
PRINT*
PRINT*, "  L   FR(L)   FM(L)"
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*180.0D-000/PI
FR(L)=FR(L)*180.0D-000/PI
WRITE(*,1) L,FR(L),FM(L)
ENDDO
OPEN (4,FILE='SEC-AL-AL.DAT')
WRITE(4,*) "          AL-AL LAB E=; XI=",EL,XI
WRITE(4,*) "      T          SE          ST          XI"
DO I=1,NT
WRITE(4,2) TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
WRITE(4,*)
WRITE(4,*) "  L   FR(L)   FM(L)"
DO L=LMI,LMA,LH
WRITE(4,1) L,FR(L),FM(L)
ENDDO
CLOSE(4)
OPEN (4,FILE='FAZ.DAT')
DO L=LMI,LMA,LH
WRITE(4,1) L,FR(L),FM(L)
ENDDO
CLOSE(4)
1 FORMAT(1X,I5,E15.6,2X,E15.6)
2 FORMAT(1X,4(E10.3,2X))
3 FORMAT(1X,E15.5,2X,I5)
END
SUBROUTINE VAR(ST,PHN,NI,XP,EP,AMIN,NV)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,NP,LMI,LH,NT,NV,NI,IIN,NN,IN
DIMENSION XPN(0:50),XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /C/ LH,LMI,PI,NP
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT
!SHARED LH,LMI,NT,PI,DS(),NP

```

```

! ***** ПОИСК МИНИМУМА *****
DO I=LMI,NP,LH
XPN(I)=XP(I)
ENDDO
NN=LMI
PH=PHN
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (NV==0) GOTO 3012
DO IIN=1,NI
NN=-LH
GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH
IF (NN>NP) GOTO 3012
IN=0
2229 A=B
XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
IF (XPN(NN)<0.0D-000) GOTO 1159
IN=IN+1
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (B<A) GOTO 2229
C=A
XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF (IN>1) GOTO 3339
PH=-PH
GOTO 5559
3339 IF (ABS((C-B)/(B))<EP) GOTO 4449
PH=PH/2.0D-000
5559 B=C
GOTO 2229
4449 PH=PHN
B=C
IF (NN<NP) GOTO 1119
AMIN=B
PH=PH/NI
ENDDO

```



```

3012 AMIN=B
DO I=LMI,NP,LH
XP(I)=XPN(I)
ENDDO
END
SUBROUTINE DET(XP,ST,XI)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,N
DIMENSION XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),N
! ***** ДЕТЕРМИНАНТ *****
S=0.0D-000
CALL SEC(XP,ST)
DO I=1,N
S=S+((ST(I)-SE(I))/DE(I))**2
DS(I)=((ST(I)-SE(I))/DE(I))**2
ENDDO
XI=S/N
END
SUBROUTINE SEC(XP,S)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,NP,LH,LMI,LMA,NT,NYS,L
DIMENSION S0(0:50),P(0:50),FR(0:50),ET(0:50),
S(0:50),XP(0:50)
COMMON /A/ PI,NT,TT(0:50),GG,SS,LMI,LMA,LH,NYS,NP
! ***** РАСЧЕТ СЕЧЕНИЙ *****
DO I=LMI,LMA,LH
FR(I)=XP(I)
ET(I)=1.0D-000
! IF NP=LMA GOTO 1234
! ET(I)=EXP(-2*XP(I+LMA+LH))
ENDDO
RECU1=0.0D-000; AIMCU1=0.0D-000
CALL CULFAZ(GG,S0)
DO I=1,NT
T=TT(I)*PI/180.0D-000
X=DCOS(T)
A=2.0D-000/(1-X)

```

```

S00=2.0D-000*S0(0)
BB=-GG*A
ALO=GG*DLOG(A)+S00
RECU1=BB*DCOS(ALO)
AIMCUL=BB*DSIN(ALO)
IF (NYS==0) GOTO 555
X1=DCOS(T)
A1=2.0D-000/(1.0D-000+X1)
BB1=-GG*A1
ALO1=GG*DLOG(A1)+S00
RECU1=BB1*COS(ALO1)
AIMCUL1=BB1*SIN(ALO1)
555 RENU=0.0D-000; AIMNU=0.0D-000
DO L=LMI,LMA,LH
AL=ET(L)*DCOS(2.0D-000*FR(L))-1.0D-000
BE=ET(L)*DSIN(2.0D-000*FR(L))
LL=2.0D-000*L+1.0D-000
SL=2.0D-000*S0(L)
CALL POLLEG(X,L,P)
RENU=RENU+LL*(BE*DCOS(SL)+AL*DSIN(SL))*P(L)
AIMNU=AIMNU+LL*(BE*DSIN(SL)-
AL*DCOS(SL))*P(L)
ENDDO
IF (NYS==0) GOTO 556
AIMNU=2.0D-000*AIMNU
RENU=2.0D-000*RENU
556 RE=RECU+RECU1+RENU
AIM=AIMCUL+AIMCUL1+AIMNU
S(I)=10.0D-000*(RE**2+AIM**2)/4.0D-000/SS**2
ENDDO
END
SUBROUTINE POLLEG(X,L,P)
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I,L
DIMENSION P(0:50)
! ***** ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА *****
P(0)=1.0D-000
P(1)=X

```

```

DO I=2,L
A=I*1.0D-000
P(I)=(2.0D-000*A-1)*X/A*P(I-1)-(A-1.0D-000)/A*P(I-2)
ENDDO
END
SUBROUTINE CULFAZ(G,F)
! ***** КУЛОНОВСКИЕ ФАЗЫ *****
IMPLICIT REAL(8) (A - Z)
INTEGER I
DIMENSION F(0:50)
C=0.577215665D-000
S=0.0D-000; N=50
A1=1.202056903D-000/3.0D-000
A2=1.0369277550D-000/5.0D-000
DO I=1,N
AA=I*1.0D-000
A=G/AA-DATAN(G/AA)-(G/AA)**3/3.0D-
000+(G/AA)**5/5.0D-000
S=S+A
ENDDO
FAZ=-C*G+A1*G**3-A2*G**5+S
F(0)=FAZ
DO I=1,20
A=I*1.0D-000
F(I)=F(I-1)+DATAN(G/A)
ENDDO
END

```

Далее приведен контрольный счет поиска фаз упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния для энергии 12.3 МэВ, при которой в работе [132] были получены фазы $\delta_0 = 29^\circ \pm 4^\circ$, $\delta_2 = 103^\circ \pm 8^\circ$, $\delta_4 = 3^\circ \pm 1.5^\circ$. Эти фазы принимаются в качестве начальных, а при дальнейшем их варьировании и по предыдущей программе на языке Turbo Basic [17] и на основе приведенной выше, находим $\delta_0 = 28.37^\circ$, $\delta_2 = 105.03^\circ$, $\delta_4 = 2.62^\circ$ при $\chi^2 = 3.43$, что видно из приведенной далее распечатки работы программы на языке Fortran-90:

χ^2	NI
3.943880354539536	1
3.437578175376997	2
3.432394633290976	3
3.432107724455588	4
3.432044190539325	5
3.432020692528544	6
3.432007556422437	7
3.432005733725609	8
3.432004938728721	9
3.432004743298262	10

$$\chi^2 = ; \text{NI} = ; \text{EL} = 3.43200 \quad 10 \quad 12.300$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
.22000E+02	.13570E+04	.12796E+04	.39401E+01
.24000E+02	.12030E+04	.11346E+04	.29238E+01
.26000E+02	.10740E+04	.10008E+04	.93096E+01
.28000E+02	.87000E+03	.87464E+03	.53776E-01
.30000E+02	.75900E+03	.75523E+03	.55540E-01
.32000E+02	.68800E+03	.64266E+03	.71117E+01
.35000E+02	.46700E+03	.48793E+03	.30429E+01
.40000E+02	.27100E+03	.27340E+03	.11779E+00
.42000E+02	.19600E+03	.20443E+03	.42244E+01
.45000E+02	.13000E+03	.12007E+03	.76028E+01
.46000E+02	.93900E+02	.97112E+02	.21321E+01
.48000E+02	.57000E+02	.58891E+02	.15896E+01
.50000E+02	.32500E+02	.30767E+02	.24826E+01
.52000E+02	.12300E+02	.12398E+02	.95282E-02
.55000E+02	.22800E+01	.20301E+01	.39027E+00
.60000E+02	.24700E+02	.24774E+02	.11250E-01
.65000E+02	.86500E+02	.85514E+02	.24313E+00
.70000E+02	.15700E+03	.16800E+03	.93323E+01
.75000E+02	.27000E+03	.25509E+03	.52640E+01
.80000E+02	.33700E+03	.33073E+03	.71799E+00
.85000E+02	.40800E+03	.38184E+03	.10177E+02
.90000E+02	.41800E+03	.39987E+03	.47720E+01

L	δ_r	δ_m
0	.283717E+02	.000000E+00
2	.105030E+03	.000000E+00
4	.261561E+01	.000000E+00

Здесь в распечатке результатов приняты следующие обозначения: θ – угол рассеяния, σ_e – экспериментальные сечения, σ_t – вычисленные сечения, χ^2_i – парциальные χ^2 для i -го угла, δ_r – реальная часть фазы, δ_m – мнимая часть фазы, χ^2 – среднее значение по всем точкам, EL – энергия в лабораторной системе. В первой строчке при распечатке фаз указан орбитальный момент $L = 0$, во второй $L = 1$ и в третьей $L = 2$ и т.д. Для поиска минимума, как и в работе [17], используется 10 итераций NI. Только в данном случае точность EP задавалась равной 10^{-10} , а в предыдущем варианте счета 10^{-5} [17]. Первые столбцы χ^2 и NI приведенной распечатки показывают сходимость χ^2 от номера итерации NI.

Далее приведен контрольный счет для энергии 29.5 МэВ, для которой в [17] были получены фазы $\delta_0 = 150.76$, $\delta_2 = 86.61$, $\delta_4 = 121.00$, $\delta_6 = 2.16$, $\delta_8 = 0.09$, приведенные также в табл.2.1.1, при $\chi^2 = 0.602$. С такими фазами по приведенной выше программе получается $\chi^2 = 0.600$, как это видно из приведенной ниже распечатки с числом итераций NI = 0:

$$\chi^2 = ; \text{NI} = ; \text{EL} = 0.600328 \quad 0 \quad 29.50$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
.22040E+02	.15230E+04	.15134E+04	.64891E+00
.24050E+02	.11640E+04	.11664E+04	.55570E-01
.26050E+02	.88590E+03	.86843E+03	.38892E+01
.28050E+02	.61610E+03	.61957E+03	.23236E+00
.30060E+02	.42260E+03	.41922E+03	.35643E+00
.32060E+02	.27000E+03	.26762E+03	.34211E+00
.34060E+02	.16020E+03	.16006E+03	.24306E-02
.36070E+02	.91500E+02	.91163E+02	.44395E-01
.38070E+02	.55530E+02	.55230E+02	.16734E+00
.40070E+02	.44680E+02	.44765E+02	.12421E+00

.42080E+02	.52960E+02	.52530E+02	.76193E+00
.44080E+02	.71740E+02	.71346E+02	.28489E+00
.46080E+02	.95440E+02	.94808E+02	.57926E+00
.48080E+02	.11846E+03	.11754E+03	.12657E+01
.50090E+02	.13558E+03	.13552E+03	.72584E-02
.52090E+02	.14562E+03	.14590E+03	.26152E+00
.54090E+02	.14760E+03	.14758E+03	.53350E-03
.56090E+02	.13986E+03	.14072E+03	.14564E+01
.58100E+02	.12710E+03	.12655E+03	.43671E+00
.60100E+02	.10783E+03	.10745E+03	.23062E+00
.62100E+02	.86660E+02	.86114E+02	.46841E+00
.64100E+02	.66120E+02	.65522E+02	.75651E+00
.66100E+02	.48430E+02	.48481E+02	.10080E-01
.68110E+02	.37430E+02	.37301E+02	.17753E+00
.70110E+02	.33770E+02	.33732E+02	.43056E-01
.72110E+02	.38340E+02	.38461E+02	.13210E+00
.74110E+02	.50740E+02	.51308E+02	.10928E+01
.76110E+02	.70820E+02	.71187E+02	.24362E+00
.78110E+02	.95550E+02	.96239E+02	.60125E+00
.80110E+02	.12420E+03	.12403E+03	.27579E-01
.82110E+02	.15340E+03	.15182E+03	.22344E+01
.84110E+02	.17750E+03	.17683E+03	.42129E+00
.86110E+02	.19700E+03	.19657E+03	.17685E+00
.88110E+02	.20974E+03	.20905E+03	.51222E+00
.90110E+02	.21120E+03	.21302E+03	.29660E+01

L	δ_r	δ_m
0	.150760E+03	.000000E+00
2	.866100E+02	.000000E+00
4	.121000E+03	.000000E+00
6	.216000E+01	.000000E+00
8	.900000E-01	.000000E+00

Отличие величины χ^2 в 0.02 связано с ошибками округления фаз при записи их значений в файл из программы на Turbo Basic с дальнейшим использованием в программе на языке Fortran-90. Здесь и далее в этом параграфе мнимая

часть фазы FM(L) равна нулю для всех значений орбитально-го момента.

Используя эти фазы в качестве начальных, при дополнительном варьировании по новой программе на Fortran-90, приведенной выше, с 10 итерациями и максимально возможной точностью, получаем приведенный далее результат для фаз рассеяния с наименьшим значением χ^2

$$\chi^2 = ; \text{NI} = ; \text{EL} = 0.571434 \quad 10 \quad 29.500$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
.22040E+02	.15230E+04	.15144E+04	.52763E+00
.24050E+02	.11640E+04	.11671E+04	.90939E-01
.26050E+02	.88590E+03	.86891E+03	.36792E+01
.28050E+02	.61610E+03	.61990E+03	.27763E+00
.30060E+02	.42260E+03	.41943E+03	.31337E+00
.32060E+02	.27000E+03	.26775E+03	.30469E+00
.34060E+02	.16020E+03	.16015E+03	.33034E-03
.36070E+02	.91500E+02	.91219E+02	.30734E-01
.38070E+02	.55530E+02	.55273E+02	.12333E+00
.40070E+02	.44680E+02	.44803E+02	.25848E+00
.42080E+02	.52960E+02	.52569E+02	.62951E+00
.44080E+02	.71740E+02	.71391E+02	.22342E+00
.46080E+02	.95440E+02	.94863E+02	.48325E+00
.48080E+02	.11846E+03	.11761E+03	.10869E+01
.50090E+02	.13558E+03	.13560E+03	.13302E-02
.52090E+02	.14562E+03	.14600E+03	.47518E+00
.54090E+02	.14760E+03	.14770E+03	.17885E-01
.56090E+02	.13986E+03	.14085E+03	.19094E+01
.58100E+02	.12710E+03	.12668E+03	.25354E+00
.60100E+02	.10783E+03	.10757E+03	.10341E+00
.62100E+02	.86660E+02	.86228E+02	.29377E+00
.64100E+02	.66120E+02	.65613E+02	.54400E+00
.66100E+02	.48430E+02	.48542E+02	.48101E-01
.68110E+02	.37430E+02	.37326E+02	.11519E+00
.70110E+02	.33770E+02	.33722E+02	.70632E-01
.72110E+02	.38340E+02	.38419E+02	.55430E-01

.74110E+02	.50740E+02	.51240E+02	.84900E+00
.76110E+02	.70820E+02	.71105E+02	.14712E+00
.78110E+02	.95550E+02	.96154E+02	.46141E+00
.80110E+02	.12420E+03	.12395E+03	.59440E-01
.82110E+02	.15340E+03	.15175E+03	.24240E+01
.84110E+02	.17750E+03	.17678E+03	.48540E+00
.86110E+02	.19700E+03	.19654E+03	.20525E+00
.88110E+02	.20974E+03	.20903E+03	.54586E+00
.90110E+02	.21120E+03	.21300E+03	.29054E+01

L	δ_r	δ_m
0	.150729E+03	.000000E+00
2	.865625E+02	.000000E+00
4	.120914E+03	.000000E+00
6	.211725E+01	.000000E+00
8	.662343E-01	.000000E+00

Как видно, удается улучшить χ^2 до 0.571, что оказывается возможным благодаря существенно повышенной, по сравнению с [17], точностью поиска минимума такой вариационной задачи.

2.2 Фазовый анализ упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния Phase shifts analysis of ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ scattering

Рассмотрим теперь методы фазового анализа для нетождественных частиц со спином 0 + 0 и результаты фазового анализа для упругого рассеяния в ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ системе при астрофизических энергиях. Для получения этих результатов использовалась та же компьютерная программа, что и для упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния, но с другим программным параметром (см. параграф 2.1.5) [146].

2.2.1 Дифференциальные сечения Differential cross sections

В случае упругого рассеяния нетождественных частиц с нулевым спином выражение для сечения принимает наиболее простой вид [88]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |f(\theta)|^2,$$

где полная амплитуда рассеяния $f(\theta)$ представляется в виде суммы кулоновской $f_c(\theta)$ и ядерной $f_N(\theta)$ амплитуд

$$f(\theta) = f_c(\theta) + f_N(\theta),$$

которые выражаются через ядерные $\delta_L \rightarrow \delta_L + i\Delta_L$ и кулоновские σ_L фазы рассеяния, а вид самих амплитуд приведен в начале этого раздела (см. параграф 2.1.2).

Для полного сечения упругого рассеяния при $f_c = 0$ будем иметь

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_L \left[(2L+1) \left(|1 - S_L|^2 \right) \right] = \frac{4\pi}{k^2} \sum_L (2L+1) \eta_L^2 \sin^2 \delta_L.$$

Суммирование в этом выражении, в отличие от ${}^4\text{He}^4\text{He}$

рассеяния, выполняется по всем возможным L .

2.2.2 Фазовый анализ Phase shifts analysis

Приведем результаты фазового анализа, полученные для ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния в области энергий от 1.5 МэВ до 6.5 МэВ. Ранее фазовый анализ дифференциальных сечений при энергиях 2.5÷5.0 МэВ был проведен в работе [147], а потенциальное описание таких фаз рассеяния на основе потенциалов с запрещенными состояниями было выполнено нами в работе [52]. Здесь, используя экспериментальные данные по функциям возбуждения при семи углах из [147], мы повторили фазовый анализ [147] в области энергий 2.5÷4.5 МэВ, который можно рассматривать, как контрольный тест для нашей новой компьютерной программы и использованных нами методов расчета.

Заметим, что измерение функций возбуждения при таком небольшом количестве точек по углам рассеяния недостаточно, чтобы с хорошей точностью воспроизвести форму угловых распределений ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния даже при низких энергиях. Возможно, поэтому, фазовый анализ не позволяет получить полностью однозначные значения фаз рассеяния, особенно для S волны, несмотря на то, что в качестве начальных фаз [17] были использованы известные результаты фазового анализа [147].

Результаты нашего анализа приведены далее на рис.2.2.1 ÷ рис.2.2.5. На рис.2.2.1 вместе с S фазой рассеяния показаны значения среднего χ^2 , которые получены для различных энергий рассеяния. Как видно из этих рисунков, S фаза несколько отличается от данных работы [147], а фазы во всех остальных парциальных волнах вполне согласуются с этими результатами [147]. Однако, поскольку, данные по функциям возбуждения брались из рисунков работы [147], возможная ошибка в настоящем фазовом анализе, зависящая от точности данных по сечениям, может составлять примерно $2^\circ \div 3^\circ$, что в целом позволяет объяснить расхождение в результатах этих

двух фазовых анализов для S фазы упругого рассеяния.

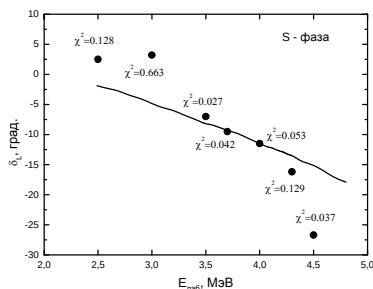


Рис.2.2.1. S фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Кривая – данные работы [147].
Точки – наши результаты, полученные на основе данных [147].

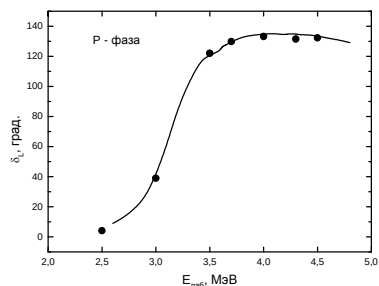


Рис.2.2.2. P фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.1.

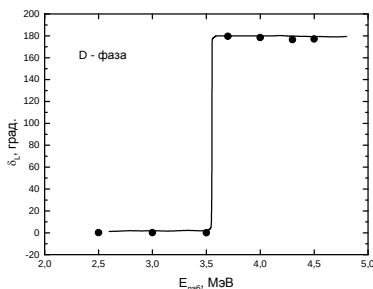


Рис.2.2.3. D фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.1.

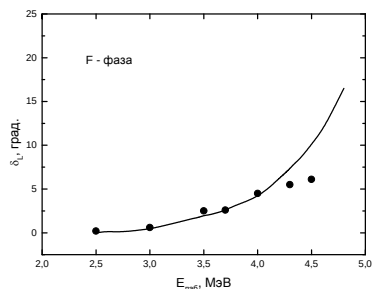


Рис.2.2.4. F фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.1.

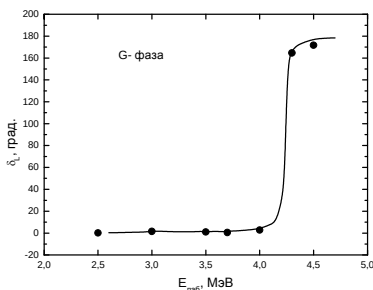


Рис.2.2.5. G фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.1.

Далее, в работе [148], был выполнен очень аккуратный фазовый анализ экспериментальных данных при 49 энергиях в области от 1.5 до 6.5 МэВ. Используя эти данные, мы провели новый фазовый анализ при энергиях 1.466, 1.973, 2.073, 2.870, 3.371, 4.851, 5.799 и 6.458 МэВ. Результаты, полученные в нашем анализе, представлены в табл.2.2.1÷табл.2.2.8 вместе со средними значениями χ^2 в сравнении с табличными данными работы [148]. В табл.2.2.9 показан спектр резонансных уровней, наблюдаемых в упругом $^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеянии [149].

Табл.2.2.1. Результаты фазового анализа $^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 1.466 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 1.466 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.055)$		
L	δ^0 (Наш)	δ^0 [148]
0	-0.2	0.5 ± 1.0
1	-0.4	-0.1 ± 1.0
2	-1.1	-0.8 ± 1.0

Табл.2.2.2. Результаты фазового анализа $^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 1.973 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 1.973 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.077)$		
L	δ^0 (Наш)	δ^0 [148]
0	-2.6	-0.5 ± 1.0
1	0.0	0.9 ± 1.7
2	-1.2	-0.1 ± 1.3

Табл.2.2.3. Результаты фазового анализа $^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 2.073 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 2.073 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.029)$		
L	δ^0 (Наш)	δ^0 [148]
0	-1.2	0 ± 0.8
1	-0.1	0.1 ± 1.2
2	-1.1	-0.6 ± 0.9

Табл.2.2.4. Результаты фазового анализа $^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 2.870 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 2.870 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.038)$		
L	δ^0 (Наш)	δ^0 [148]
0	-3.1	-2.1 ± 1.1
1	21.3	22.0 ± 2.1
2	0.0	0.4 ± 0.9
3	0.5	1.0 ± 0.5

Табл.2.2.5. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 3.371 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 3.371 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.31)$		
L	δ^0 (Наш)	δ^0 [148]
0	169.4	-
1	103.4	103.7 ± 1.7
2	-1.7	0.0 ± 0.7
3	0.2	0.8 ± 0.6

Табл.2.2.6. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 4.851 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 4.851 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.26)$		
L	δ^0 (Наш)	δ^0 [148]
0	164.2	164 ± 1.1
1	128.4	129.5 ± 0.9
2	177.1	178.8 ± 0.9
3	15.5	16.4 ± 0.8
4	176.9	177.2 ± 0.8
5	-0.3	0.5 ± 0.5

Табл.2.2.7. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 5.799 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 5.799 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.37)$		
L	$\text{Re}\delta^0$ (Наш)	$\text{Re}\delta^0$ [148]
0	162.2	-
1	128.2	-
2	83.2	82.3 ± 0.6
3	86.0	-
4	173.8	175.3 ± 0.7
5	-1.0	0.2 ± 0.4

Табл.2.2.8. Результаты фазового анализа ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ упругого рассеяния и их сравнение с данными работы [148] при энергии 6.458 МэВ.

$E_{\text{лаб}} = 6.458 \text{ МэВ } (\chi^2 = 0.41)$		
L	δ^0 (Наш)	δ^0 [148]
0	151.2	153 ± 2.5
1	115.8	119.4 ± 2.1
2	172.2	172.2 ± 1.9
3	120.8	122.0 ± 2.4
4	176.4	179.1 ± 1.2
5	0.8	2.2 ± 0.8
6	0.1	0.4 ± 0.4

Из приведенных таблиц видно, что энергия ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния 3.371 МэВ приходится на уровень 3.324 МэВ с шириной 480 ± 20 кэВ, приведенный в табл.2.2.9 и обзоре [149]. Хотя в таблицах работы [148] не приводится фаза для S волны

(прочерки в табл.2.2.5) при этой энергии, наш фазовый анализ на основе только действительных фаз рассеяния позволяет определить все фазы рассеяния. Величина S фазы приведена в табл.2.2.5 с $\chi^2 = 0.31$ при 10% ошибках определения экспериментальных дифференциальных сечений из рисунков работы [148].

Энергия 5.799 МэВ приходится на уровень 5.809 ± 18 МэВ с шириной 73(3) кэВ [149] (см. ниже табл.2.2.9) и в таблицах работы [148] не приводятся значения фаз рассеяния для некоторых парциальных волн (прочерки в табл.2.2.7). В проведенном здесь фазовом анализе вполне удастся описать эти дифференциальные сечения упругого рассеяния со средним значением $\chi^2 = 0.37$ и найти все парциальные фазы, как это показано в табл.2.2.7.

Табл.2.2.9. Спектр уровней ядра ^{16}O в упругом $^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеянии при изоспине $T = 0$ [149].

Здесь J^π – полный момент и четность, $E_{\text{лаб}}$ – энергия налетающей α - частицы в лабораторной системе, $\Gamma_{\text{цм}}$ – ширина уровня в системе центра масс. Курсивом в таблице выделены уровни с шириной меньше 1 кэВ, а жирным показаны состояния, которые рассматриваются в тексте.

$E_{\text{лаб}}, \text{ МэВ}$	J^π	$\Gamma_{\text{цм}}, \text{ кэВ}$
3.324	1^-	480±20
<i>3.5770±0.5</i>	<i>2^+</i>	<i>0.625±0.1</i>
4.259	4^+	27±3
<i>5.245±8</i>	<i>4^+</i>	<i>0.28±0.05</i>
5.47	0^+	2500
5.809±18	2^+	73±5
5.92±20	3^-	800±100
6.518±10	0^+	1.5±0.5
7.043±4	1^-	99±7

Нерезонансные энергии при 2.870, 4.851 и 6.458 МэВ (см. табл.2.2.4, 2.2.6, 2.2.8) описываются фазами, которые в

пределах, приведенных в работе [148] погрешностей, и с учетом возможных 10% ошибок нашего извлечения экспериментальных данных из рисунков [148] совпадают с результатами работы [148]. Последние три энергии 1.466, 1.973 и 2.073 МэВ (см. табл.2.2.1, 2.2.2, 2.2.3) совместимы с нулевыми значениями ядерных фаз, т.е. имеют значения $\pm 1^\circ \pm 1^\circ$, и соответствуют чисто кулоновскому, т.е. резерфордовскому рассеянию.

На рис.2.2.6÷2.2.13 показано качество описания экспериментальных дифференциальных сечений упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния [148] с приведенными в табл.2.2.1÷2.2.8 фазами рассеяния при всех рассмотренных энергиях. В процессе нашего фазового анализа пришлось перевести дифференциальные сечения и углы, приведенные в работе [148] в лабораторной системе, в систему центра масс, которая наиболее удобна для расчетов.

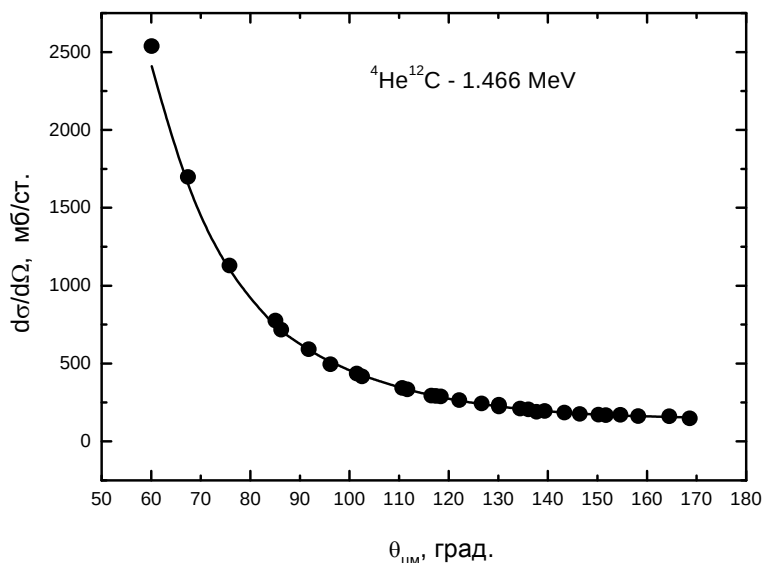


Рис.2.2.6. Сечения упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния при 1.466 МэВ. Точки – экспериментальные данные работы [148], кривая – результаты нашего фазового анализа.

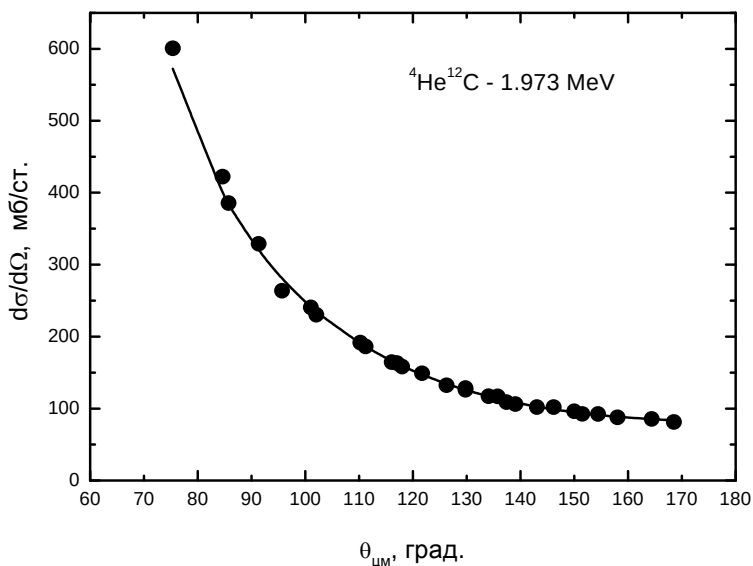


Рис.2.2.7. То же, что на рис.2.2.6, но при энергии 1.973 МэВ.

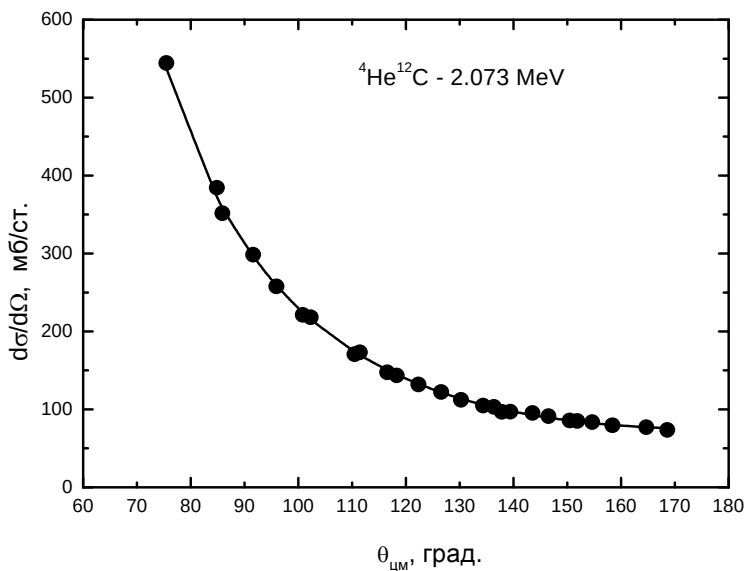


Рис.2.2.8. То же, что на рис.2.2.6, но при энергии 2.073 МэВ.

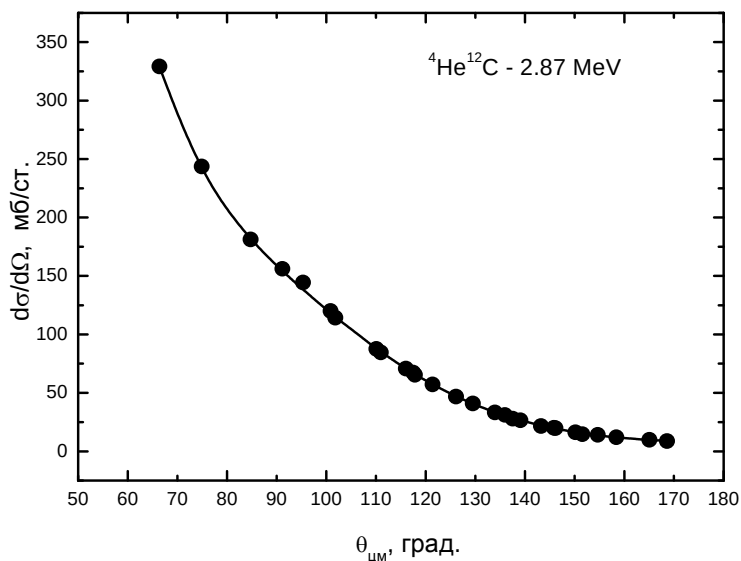


Рис.2.2.9. То же, что на рис.2.2.6, но при энергии 2.87 МэВ.

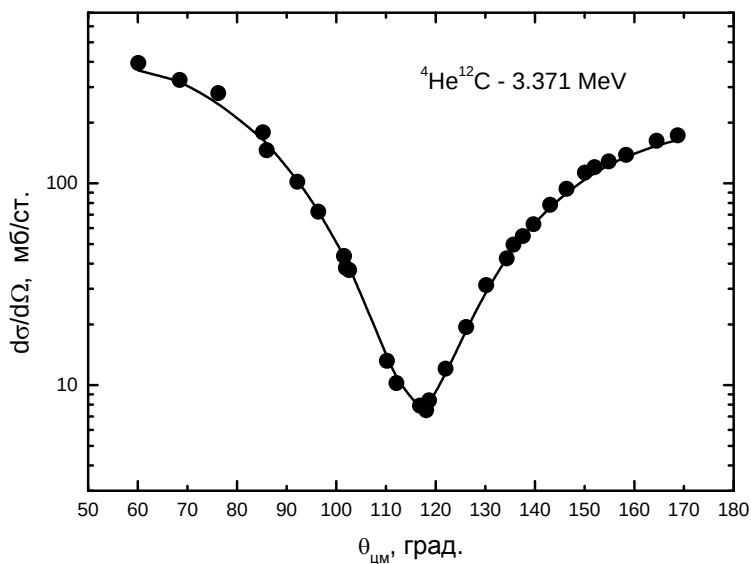


Рис.2.2.10. То же, что на рис.2.2.6, но при энергии 3.371 МэВ.

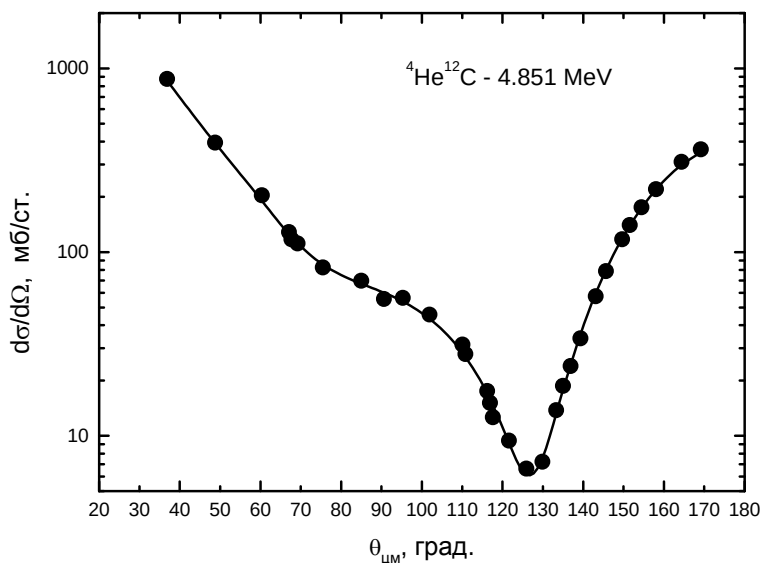


Рис.2.2.11. То же, что на рис.2.2.6, но при энергии 4.851 МэВ.

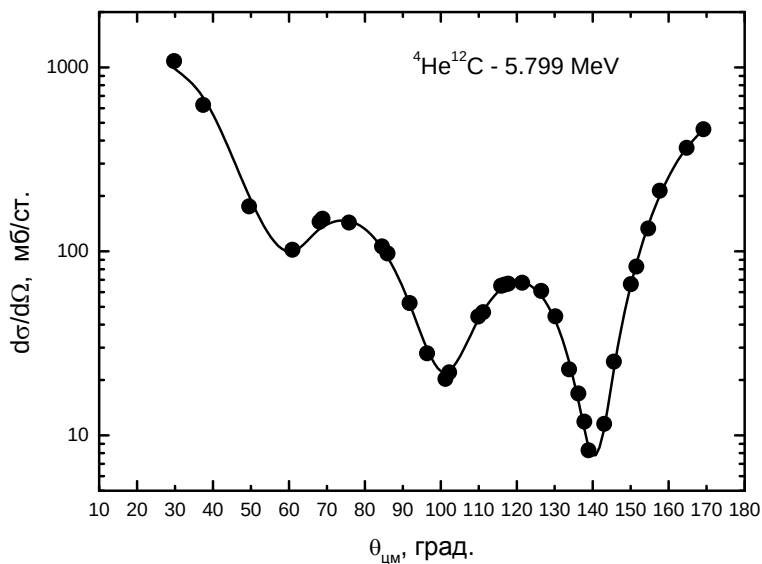


Рис.2.2.12. То же, что на рис.2.2.6, но при энергии 5.799 МэВ.

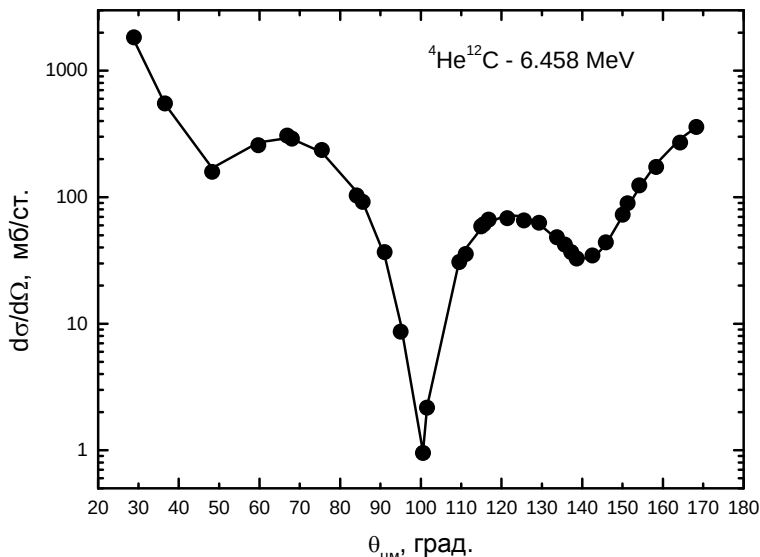


Рис.2.2.13. То же, что на рис.2.2.6, но при энергии 6.458 МэВ.

Небольшие отличия в фазах рассеяния могут быть обусловлены, кроме этого, различными значениями констант или масс частиц, которые используются в таком анализе. Например, можно использовать точные значения масс частиц [120] или же их целые величины, а константа $\hbar^2 / m$ может быть принята равной, например, 41.47 или более точно 41.4686 МэВ·Фм² (хотя возможны и другие ее значения). Кроме того, точность определения фаз рассеяния, в проведенном фазовом анализе, на основе данных [148] оценивается нами на уровне $1^\circ \div 2^\circ$.

На рис.2.2.14÷рис.2.2.18 приведено сравнение результатов последнего фазового анализа [150], полученного на основе экспериментальных данных работы [148] (точки) и фазового анализа работы [147] (квадраты). Как видно из приведенных в табл.2.2.1÷табл.2.2.8 и рис.2.2.14÷рис.2.2.18 результатов, полученные фазы практически совпадают с выводами работы [148], но несколько отличаются от данных [147], особенно в S волне рассеяния.

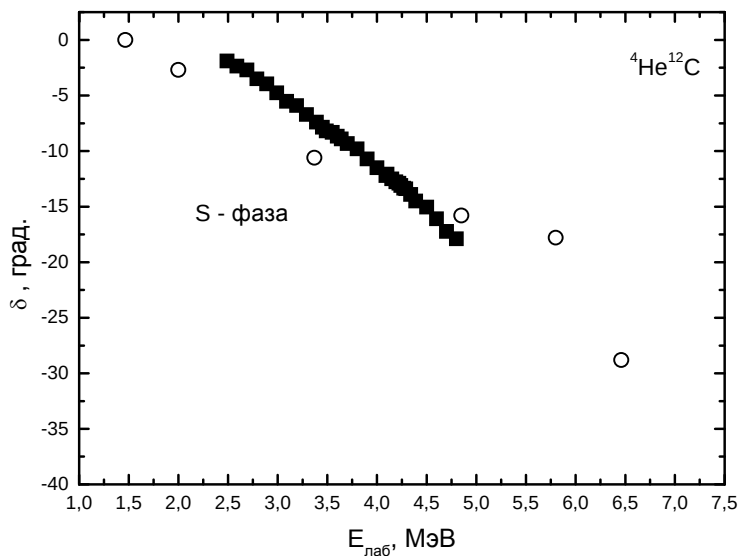


Рис.2.2.14 S фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Квадраты – данные работы [147]. Круги – наши результаты [150],
полученные на основе данных [148].

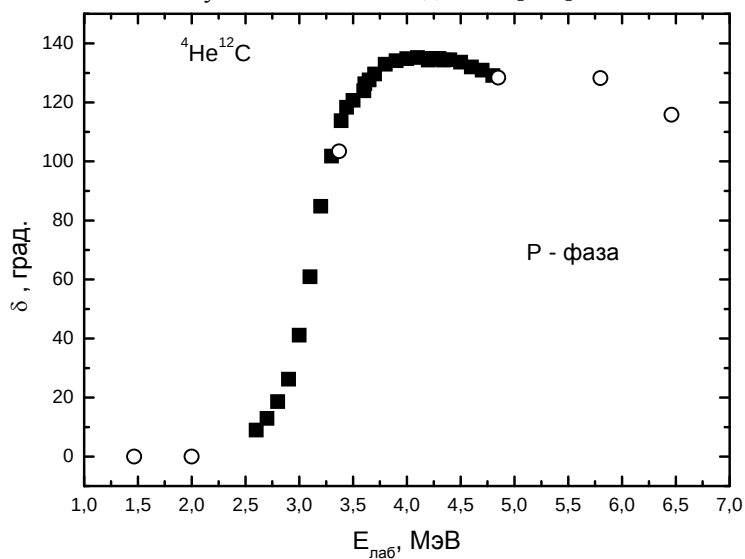


Рис.2.2.15. P фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.14.

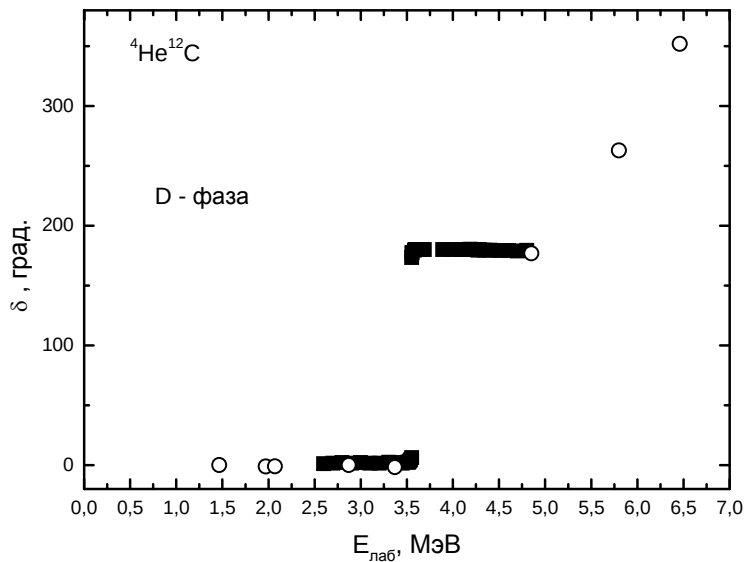


Рис.2.2.16. D фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.14.

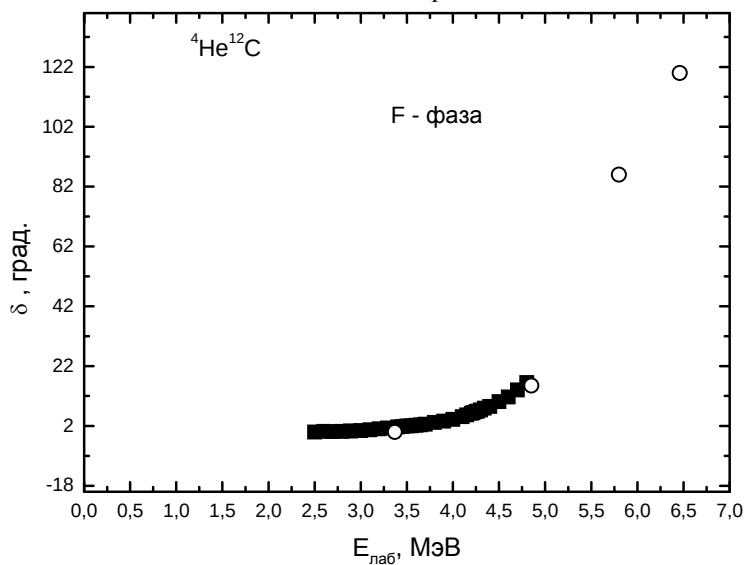


Рис.2.2.17. F фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.14.

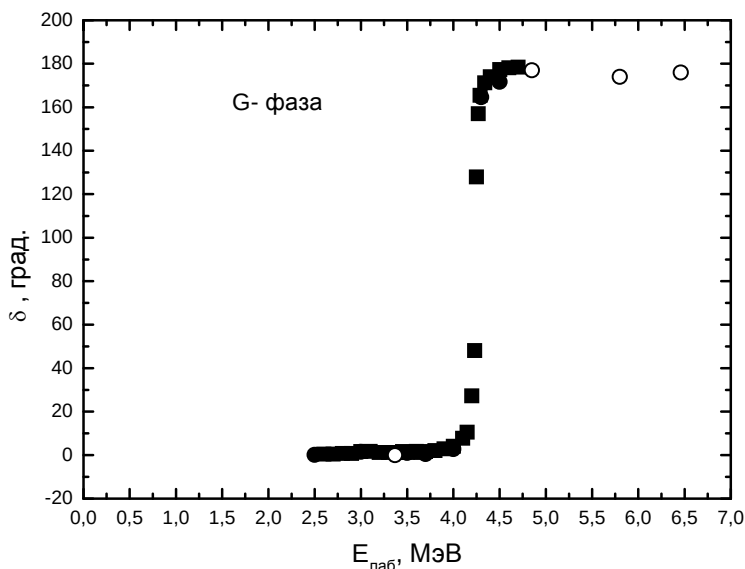


Рис.2.2.18. G фаза упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния.
Обозначения, как на рис.2.2.14.

В целом это понятно, поскольку анализ [147] выполнялся в начале 60-х годов, когда вычислительной техники еще практически не существовало, а программные и вычислительные средства только начинали развиваться. В тоже время, работа [148] была проведена в конце 80-х при развитых компьютерных и программных системах и средствах.

В результате выполненного здесь фазового анализа можно сделать следующие выводы:

1. Энергия 3.371 МэВ приходится на уровень 3.324 МэВ с довольно большой шириной 0.48 МэВ и в P волне хорошо просматривается плавный резонанс.

2. По данным работ [147,148] в D волне наблюдается резонанс, который соответствует уровню при 3.577 МэВ с очень маленькой шириной 0.625 кэВ. При этой энергии на рис.2.2.16 наблюдается переход фазы через 90° , приведенный также в табл.2.2.5 и 2.2.6. Кроме того, в результатах анализа [148] появляется еще один резонанс при 5.799 МэВ, поскольку

ку при этой энергии в D волне имеется уровень 5.809 МэВ с относительно большой шириной 73 кэВ. При этой энергии величина фазы (см. табл.2.2.7) почти равна 90° . В результате D фаза рассеяния, приведенная на рис.2.2.16, дважды переходит через 90° , т.е. соответствует двум резонансам, присутствующим в этой парциальной волне.

3. При энергии 4.259 МэВ с шириной 27 кэВ в G волне имеется резонансный уровень и в результатах работ [147] и [148] виден скачек фазы, показанный на рис.2.2.18.

4. Энергия 5.799 МэВ находится около резонанса при 5.47 МэВ с очень большой шириной 2.5 МэВ и моментом 0^+ , и S фаза испытывает некоторый подъем.

5. При энергии 5.92 МэВ имеется резонанс с шириной 0.8 МэВ и $J^\pi = 3^-$ для F волны и F фаза, показанная на рис.2.2.17, при этой энергии имеет величину около 90° (см. также результаты, приведенные в табл.2.2.7 и 2.2.8 для F фазы рассеяния).

6. При трех энергиях в области 1.47-2.07 МэВ наблюдается чисто резерфордское рассеяние и все фазы практически равны нулю.

В дальнейшем, полученные здесь фазы упругого рассеяния [151], используются для построения межкластерных потенциалов и расчетов астрофизического S -фактора реакции радиационного $^{12}\text{C}(^4\text{He},\gamma)^{16}\text{O}$ захвата [152]. Этот процесс, наряду с тройным гелиевым циклом, присутствует в цепочке термоядерных реакций на горячей стадии развития звезд, когда температура внутри звезды достигает сотен миллионов градусов Кельвина [153].

При столь высокой температуре взаимодействующие частицы имеют достаточную энергию для существенного увеличения вероятности прохождения через кулоновский барьер. В таком случае они попадают в область сильного взаимодействия, что ведет к увеличению вклада такой реакции, т.е. ее энергетического выхода в полный энергетический баланс звезды.

2.3 Фазовый анализ упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния Phase shifts analysis of $p^{12}\text{C}$ scattering

В этом параграфе будут рассмотрены методы фазового анализа для частиц со спинами $0 + 1/2$ и результаты фазового анализа для $p^{12}\text{C}$ системы. По-видимому, самые последние экспериментальные данные, полученные при низких, астрофизических энергиях приведены в работах Института Ядерной Физики (ИЯФ) Национального Ядерного Центра (НЯЦ) Республики Казахстан (РК). Именно они и будут использованы далее в нашем фазовом анализе.

2.3.1 Дифференциальные сечения Differential cross sections

При рассмотрении упругого рассеяния в системе частиц со спинами 0 и $1/2$ учтем спин-орбитальное расщепление фаз, которое имеет место в ядерных системах типа N^4He , $^3\text{H}^4\text{He}$, $p^{12}\text{C}$. В этом случае упругое рассеяние ядерных частиц полностью описывается двумя независимыми спиновыми амплитудами (A и B), а сечение представляется в следующем виде [88]:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = |A(\theta)|^2 + |B(\theta)|^2 ,$$

где

$$A(\theta) = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} \{ (L+1)S_L^+ + LS_L^- - (2L+1) \} \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos\theta) ,$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{L=0}^{\infty} (S_L^+ - S_L^-) \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos\theta) .$$

Здесь $S_L^{\pm} = \eta_L^{\pm} \exp(2i\delta_L^{\pm})$ – матрица рассеяния, $\eta_L^{\pm}$ – параметры неупругости, а знаки “ $\pm$ ” соответствуют полному

моменту системы $J = L \pm 1/2$, f_c – кулоновская амплитуда, представляется в виде

$$f_c(\theta) = - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0\} ,$$

где $P_n^m(x)$ – присоединенные полиномы Лежандра, η – кулоновский параметр, μ – приведенная масса частиц, k – волновое число относительного движения частиц во входном канале.

Присоединенные полиномы или функция Лежандра $P_n^m(x)$ представляются в виде

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} ,$$

и для $m = 1$ их можно вычислять по рекуррентным формулам вида

$$P_{L+1}^1(x) = \frac{(2L+1)x}{L} P_L^1(x) - \frac{L+1}{L} P_{L-1}^1(x)$$

с начальными значениями

$$P_0^1(x) = 0 , \quad P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} , \quad P_2^1(x) = 3xP_1^1(x) .$$

Величины $P_n^2(x)$, которые встретятся нам далее, вычисляются по другим рекуррентным формулам

$$P_{L+1}^2(x) = \frac{(2L+1)x}{L-1} P_L^2(x) - \frac{L+2}{L-1} P_{L-1}^2(x)$$

с начальными значениями

$$P_0^2(x) = P_1^2(x) = 0 \quad , \quad P_2^2 = 3(1 - x^2) \quad , \quad P_3^2(x) = 5xP_2^2(x).$$

Через приведенные амплитуды A и B можно выразить и векторную поляризацию в упругом рассеянии таких частиц [88]

$$P(\theta) = \frac{2 \operatorname{Im}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2} \quad .$$

Расписывая выражение для амплитуды $B(\Theta)$, получим

$$\operatorname{Re} B = \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [a \cdot \sin(2\sigma_L) + b \cdot \cos(2\sigma_L)] P_L^1(x) \quad ,$$

$$\operatorname{Im} B = \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [b \cdot \sin(2\sigma_L) - a \cdot \cos(2\sigma_L)] P_L^1(x) \quad ,$$

где

$$a = \eta_L^+ \cos(2\delta_L^+) - \eta_L^- \cos(2\delta_L^-) \quad ,$$

$$b = \eta_L^+ \sin(2\delta_L^+) - \eta_L^- \sin(2\delta_L^-) \quad .$$

Аналогичным способом, для амплитуды $A(\Theta)$ можно найти следующую форму записи [154]

$$\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} f_c + \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [c \cdot \sin(2\sigma_L) + d \cdot \cos(2\sigma_L)] P_L(x) \quad ,$$

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} f_c + \frac{1}{2k} \sum_{L=0}^{\infty} [d \cdot \sin(2\sigma_L) - c \cdot \cos(2\sigma_L)] P_L(x) \quad ,$$

где

$$c = (L+1)\eta_L^+ \cos(2\delta_L^+) + L\eta_L^- \cos(2\delta_L^-) - (2L+1) \quad ,$$

$$d = (L+1)\eta_L^+ \sin(2\delta_L^+) + L\eta_L^- \sin(2\delta_L^-) \quad .$$

Для полного сечения упругого рассеяния можно получить [88]

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_L \left[(L+1) |1 - S_L^+|^2 + L |1 - S_L^-|^2 \right]$$

или

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} \sum_L \left\{ (L+1) [\eta_L^+ \sin \delta_L^+]^2 + L [\eta_L^- \sin \delta_L^-]^2 \right\} \quad .$$

Все эти выражения использовались далее для выполнения фазового анализа $p^{12}\text{C}$ упругого рассеяния при энергии до 1.1 МэВ [155].

2.3.2 Контроль компьютерной программы Computer program check

Текст нашей компьютерной программы для расчета полных и дифференциальных сечений упругого рассеяния частиц с полуцелым спином, которая использовалась для выполнения соответствующего фазового анализа, полностью приведен далее и протестирован на упругом рассеянии в $p^4\text{He}$ системе. Здесь приведен только один вариант контрольного счета по этой программе для $p^4\text{He}$ рассеяния, в сравнении с данными из работы [156], где выполнен фазовый анализ для энергии 9.89 МэВ, получены положительные D фазы и среднее по всем точкам значение $\chi^2 = 0.60$.

В анализе [156] использованы 22 точки по сечениям из работы [157] при энергии 9.954 МэВ (в [156] не указано, какие именно 22 точки были взяты из 24-х, приведенных в работе [157]) и несколько точек по поляризациям из работ

[156,158]. В последнем случае, по-видимому, использовано 10 данных при 8-ми углах 46.5^0 , 55.9^0 , 56.2^0 , 73.5^0 , 89.7^0 , 99.8^0 , 114.3^0 , 128.3^0 и энергиях 9.89, 9.84, 9.82 МэВ.

Фазы из работы [156] приведены в табл.2.3.1, а среднее χ^2_σ только для дифференциальных сечений по нашей программе с учетом 24 точек из [157] (энергия задавалась равной 9.954 МэВ) и этими фазами получается равным 0.586. Результаты этих расчетов показаны в табл.2.3.2.

Табл.2.3.1. Фазы (в град.) упругого $p^4\text{He}$ рассеяния из работы [156].

E , МэВ	S_0	$P_{3/2}$	$P_{1/2}$	$D_{5/2}$	$D_{3/2}$
9.954	119,3 $^{+2.0}_{-1.8}$	112,4 $^{+3.5}_{-5.2}$	65,7 $^{+2.7}_{-3.2}$	5,3 $^{+1.6}_{-2.5}$	3,7 $^{+1.6}_{-2.8}$

Табл.2.3.2. Дифференциальные сечения упругого $p^4\text{He}$ рассеяния.

Здесь θ° – угол рассеяния, σ_e – экспериментальные и σ_t – расчетные сечения.

θ°	σ_e , мбн/ст	σ_t , мбн/ст	χ^2_i	θ^0	σ_e , мбн/ст	σ_t , мбн/ст	χ^2_i
25.10	371.00	366.85	0.31	109.90	21.00	20.70	0.51
30.89	339.00	331.54	1.21	120.60	23.00	22.59	0.79
35.07	305.00	308.40	0.31	122.80	24.50	24.19	0.40
49.03	232.00	230.61	0.09	130.13	31.90	31.91	0.00
54.70	205.00	199.10	2.07	130.90	33.20	32.90	0.21
60.00	176.00	170.56	2.39	134.87	37.80	38.44	0.71
70.10	124.00	120.59	1.89	140.80	47.30	47.69	0.17
80.00	82.00	79.77	1.85	145.00	54.00	54.62	0.33
90.00	49.20	48.82	0.15	149.40	61.60	61.88	0.05
94.07	39.10	39.44	0.19	154.90	70.60	70.54	0.00
102.17	26.20	26.39	0.13	160.00	78.40	77.71	0.19
106.90	22.00	22.15	0.12	164.40	83.00	82.94	0.00

Для 10-ти экспериментальных данных из работ [156,158] по поляризациям при энергиях 9.82÷9.89 МэВ при восьми углах рассеяния с фазами из [156], можно получить $\chi^2_p = 0.589$ (энергия, по-прежнему, задается равной 9.954 МэВ). Эти результаты приведены в табл.2.3.3.

Табл.2.3.3. Поляризации в упругом $p^4\text{He}$ рассеянии. Здесь θ° – угол рассеяния, P_e – экспериментальные поляризации, ΔP_e – экспериментальные ошибки для поляризаций и P_t – расчетные поляризации.

θ°	$P_e, \%$	ΔP_e	$P_t, \%$	χ^2_i
46.50	-32.30	2.10	-33.11	0.15
55.90	-41.30	2.20	-42.50	0.30
56.20	-44.40	0.90	-42.81	3.11
73.50	-62.60	3.00	-62.84	0.01
73.50	-64.80	1.90	-62.84	1.06
89.70	-76.10	3.60	-76.33	0.01
89.70	-75.50	2.40	-76.33	0.12
99.80	-59.30	2.50	-58.55	0.09
114.30	48.20	3.20	51.03	0.78
128.30	99.40	3.30	97.66	0.28

Если усреднить χ^2 по всем точкам ($24 + 10 = 34$), т.е. использовать более общее выражение для χ^2

$$\chi^2 = \frac{1}{(N_\sigma + N_p)} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\sigma_i^t - \sigma_i^e}{\Delta \sigma_i^e} \right]^2 + \sum_{i=1}^N \left[\frac{P_i^t - P_i^e}{\Delta P_i^e} \right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{(N_\sigma + N_p)} \{ \chi_\sigma^2 + \chi_p^2 \}$$

то получается величина $\chi^2 = 0.5875 \approx 0.59$ в хорошем согласии с результатами работы [156]. Здесь N_σ и N_p – число данных по сечениям (24 точки) и поляризациям (10 точек), σ^e , P^e , σ^t , P^t – экспериментальные и теоретические значения сечений

и поляризаций, $\Delta\sigma$ и ΔP – их ошибки.

Если выполнить дополнительную минимизацию χ^2 по нашей программе, то для χ^2_σ по сечениям получим 0.576, для поляризаций $\chi^2_p = 0.561$ и среднее $\chi^2 = 0.572 \approx 0.57$ при следующих значениях фаз

$$S_0 = 119.01^\circ, \quad P_{3/2} = 112.25^\circ, \quad P_{1/2} = 65.39^\circ, \quad D_{5/2} = 5.24^\circ, \\ D_{3/2} = 3.63^\circ,$$

которые полностью находятся в полосе ошибок, приведенных в [156] и показаны в табл.2.3.1.

Таким образом, представленная далее программа позволяет получить результаты, хорошо совпадающие с ранее выполненным анализом. Далее она тестировалась по фазовому анализу, проведенному в других работах при низких энергиях, но уже непосредственно для упругого рассеяния в $p^{12}\text{C}$ системе.

Ранее фазовый анализ функций возбуждения для упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния, измеренных в [159], при энергиях в области $400 \div 1300$ кэВ (л.с.) и углах $106^\circ \div 169^\circ$, был выполнен в работе [160], где получено, что, например, при $E_{\text{лаб}} = 900$ кэВ S фаза должна лежать в области $153^\circ \div 154^\circ$. С теми же экспериментальными данными нами получено значение 152.7° . Для получения этого результата использовались сечения рассеяния из функций возбуждения работы [159] при энергиях $866 \div 900$ кэВ. Результаты наших расчетов σ_t в сравнении с экспериментальными данными σ_e приведены в табл.2.3.4.

Табл.2.3.4. Сравнение теоретических и экспериментальных сечений $p^{12}\text{C}$ упругого рассеяния при энергии 900 кэВ.

θ°	σ_e , мбн/ст	σ_t , мбн/ст	χ^2_i
106	341	341.5	1.90E-04
127	280	282.1	5.76E-03
148	241	251.2	1.80E-01
169	250	237.5	2.50E-01

В последнем столбце таблицы даны парциальные значения χ^2_i на каждую точку при 10% ошибках в экспериментальных сечениях, а для среднего по всем экспериментальным точкам χ^2 была получена величина 0.11.

При энергии 751 кэВ (л.с.) в работе [160] для S фазы были найдены значения в интервале $155^\circ \div 157^\circ$. Результаты, полученные нами для этой энергии, приведены в табл.2.3.5. Использовались данные по сечениям из функций возбуждения в диапазоне энергий 749÷754 кэВ и для S фазы найдено 156.8° при среднем $\chi^2 = 0.30$.

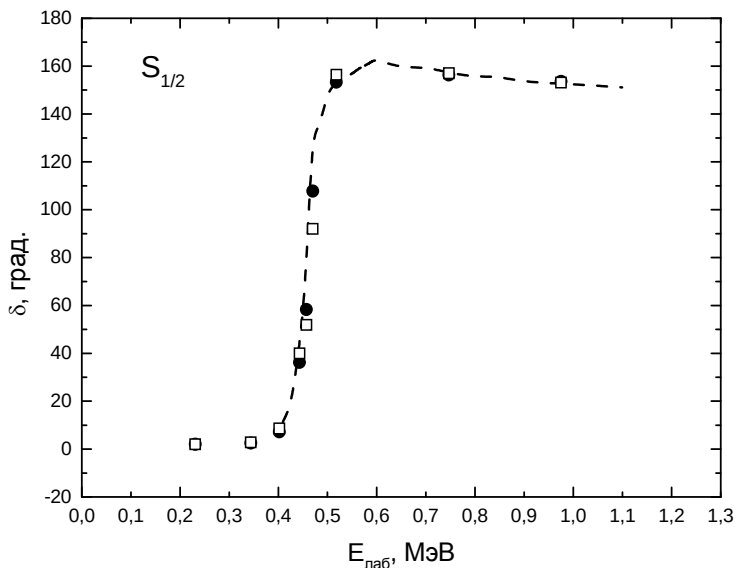
Табл.2.3.5. Сравнение теоретических и экспериментальных сечений $p^{12}\text{C}$ упругого рассеяния при энергии 750 кэВ.

θ°	σ_e , мбн/ст	σ_t , мбн/ст	χ^2_i
106	428	428.3	3.44E-05
127	334	342.8	6.91E-02
148	282	299.1	3.66E-01
169	307	279.9	7.82E-01

Таким образом, по нашей программе, при двух энергиях упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния получены фазы, совпадающие с результатами анализа, выполненного на основе функций возбуждения в работе [160].

2.3.3 Фазовый анализ упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния Phase shifts analysis of $p^{12}\text{C}$ scattering

Приведенные выше контрольные счета хорошо согласуются с более ранними результатами, поэтому по нашей программе, был выполнен фазовый анализ [161] новых экспериментальных данных по дифференциальным сечениям $p^{12}\text{C}$ рассеяния в диапазоне энергий 230÷1200 кэВ (л.с.) [162]. Результаты этого анализа приведены в табл.2.3.6 и представлены точками на рис.2.3.1 в сравнении с данными работы [160], которые показаны штриховой линией.

Рис.2.3.1. S фаза $p^{12}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях.

Точки – результаты фазового анализа для S фазы с учетом в фазовом анализе только S волны, открытые квадраты – результаты фазового анализа для S фазы с учетом S и P волн, штриховая кривая – результаты [160].

Табл.2.3.6. Результаты фазового анализа $p^{12}\text{C}$ упругого рассеяния при низких энергиях с учетом только S фазы.

$E_{\text{цм}}, \text{кэВ}$	$S_{1/2}, \text{град.}$	χ^2
213	2.0	1.35
317	2.5	0.31
371	7.2	0.51
409	36.2	0.98
422	58.2	3.69
434	107.8	0.78
478	153.3	2.56
689	156.3	2.79
900	153.6	2.55
1110	149.9	1.77

На рис.2.3.2а,б,в точками представлены экспериментальные дифференциальные сечения в области резонанса при 457 кэВ (л.с.). Результаты расчета этих сечений на основе формулы Резерфорда (точечная кривая), а также сечения, полученные из нашего фазового анализа (непрерывная линия), который учитывает только S фазу и анализа при учете S и P фаз рассеяния (пунктирная кривая). Из рисунков видно, что в области резонанса не удается хорошо описать сечение только на основе одной S фазы.

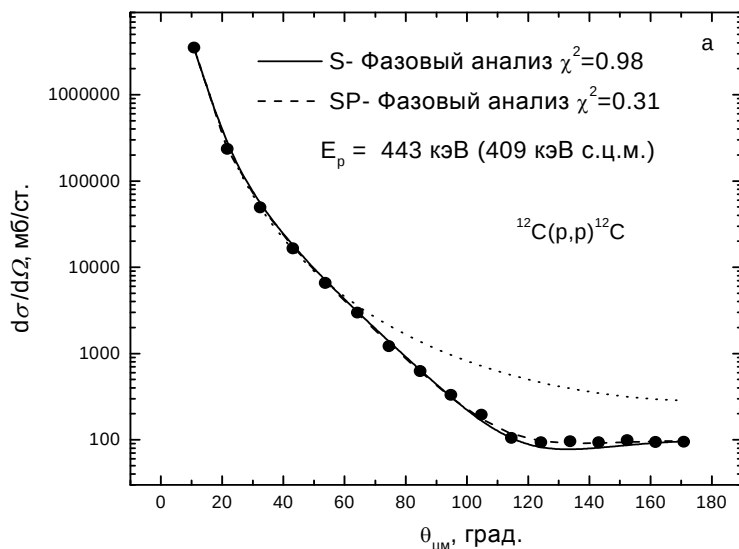


Рис.2.3.2а. Дифференциальные сечения упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния. Непрерывная кривая получена на основе фазового анализа с учетом только S волны, точечная кривая – резерфордовское рассеяние, пунктир – результаты фазового анализа с учетом S и P волн, точки – эксперимент [162].

Заметную роль начинает играть P волна, представленная на рис.2.3.3, учет которой заметно улучшает описание экспериментальных данных. При резонансной энергии 457 кэВ (л.с.), сечения для которой показаны на рис.2.3.2б, учет P волны уменьшает величину χ^2 с 3.69 до 0.79.

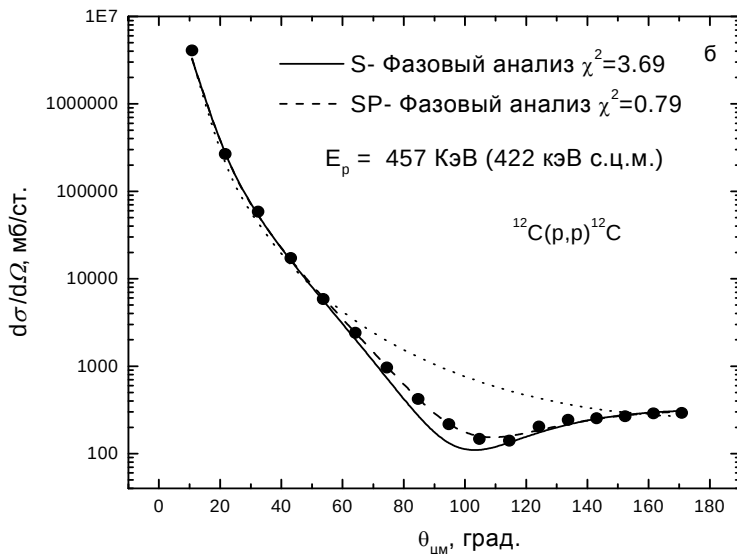


Рис.2.3.2б. Дифференциальные сечения $p^{12}\text{C}$ рассеяния.
Подписи, как на рис.2.3.2а.

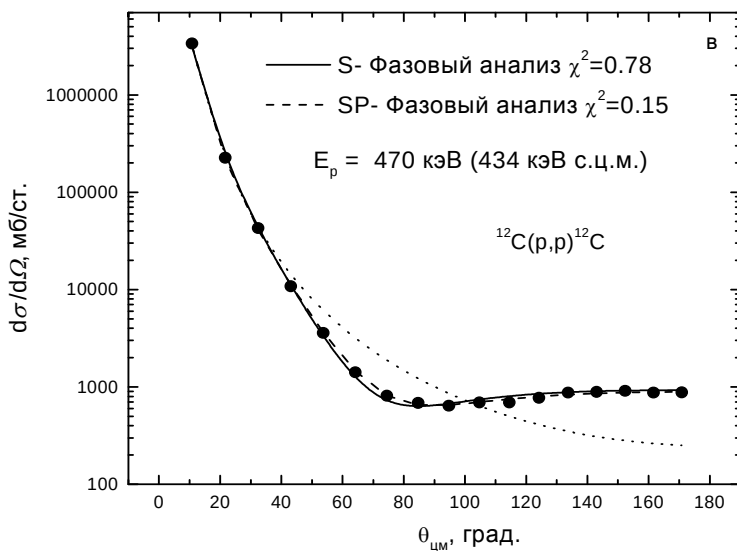


Рис.2.3.2в. Дифференциальные сечения $p^{12}\text{C}$ рассеяния.
Подписи, как на рис.2.3.2а.

На рис.2.3.3 видно, что при низких энергиях $P_{1/2}$ фаза идет выше, чем $P_{3/2}$, но при энергии порядка 1.2 МэВ они пересекаются и далее $P_{3/2}$ идет выше в отрицательной области углов [163,164]. Величина S фазы при учете P волны практически не меняется и ее форма показана на рис.2.3.1 открытыми квадратами. Учет D волны в фазовом анализе приводит к ее величине порядка одного градуса в области резонанса и практически не влияет на поведение расчетных дифференциальных сечений.

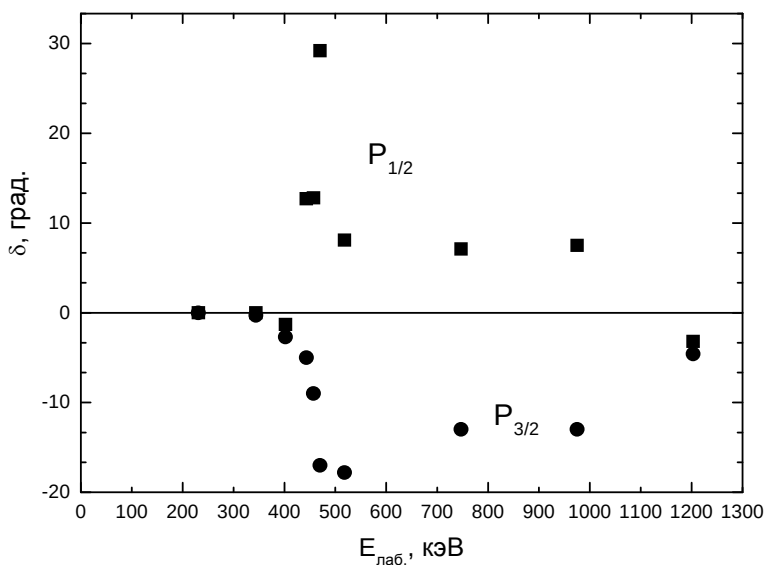


Рис.2.3.3. 2P фазы $p^{12}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях. Точки – $P_{3/2}$ и квадраты – $P_{1/2}$ фазы, полученные в результате фазового анализа с учетом S и P волн.

Полные сечения упругого рассеяния представлены точками на рис.2.3.4. Они рассчитаны на основе извлеченных из экспериментальных дифференциальных сечений S фаз рассеяния. Кружками представляют полные сечения, полученные из фазового анализа работы [160]. На рис.2.3.4 в области энергий 200÷300 кэВ (л.с.) наблюдается некоторое плато.

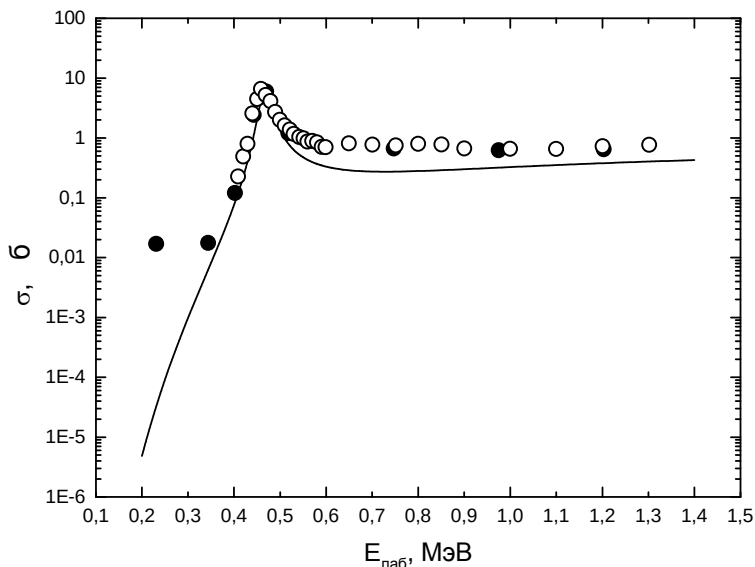


Рис.2.3.4. Полные сечения упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния.
Точки – полные сечения, найденные из фаз рассеяния работ [162],
кружки – тоже для работ [159,160].

В данный момент не понятно, вызвано оно экспериментальными неточностями, непредвиденными ошибками фазового анализа или действительно существует при этих энергиях. Для выяснения этого вопроса требуются новые измерения угловых распределений упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния в области энергий от 100÷150 до 300÷400 кэВ с шагом по энергии порядка 50 кэВ или функций возбуждения при разных углах [155].

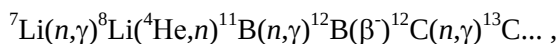
В заключение этого параграфа заметим, что в данном случае использовалось несколько другое, чем обычно, значение $\hbar^2 / m_0 = 41.80159 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^2$, которое было получено с несколькими другими значениями фундаментальных констант $\hbar^2$ и m_0 , где последняя обозначает атомную единицу массы. Однако, как будет видно далее в п.п.2.3.5, это различие практически не сказывается на полученных результатах по фазам рассеяния.

2.3.4 Фазовый анализ упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния Phase shifts analysis of $n^{12}\text{C}$ scattering

В данном параграфе продолжим рассмотрение фазового анализа упругого рассеяния на легких ядрах и на основе измерений [165] выполним фазовый анализ $n^{12}\text{C}$ рассеяния. Нам не удалось найти результаты ранее проведенного фазового анализа для $n^{12}\text{C}$ системы даже при низких энергиях, хотя они должны заметно отличаться от аналогичного анализа $p^{12}\text{C}$ рассеяния [161]. Причиной таких различий является существенное отличие структуры спектров уровней ядер ^{13}C и ^{13}N при энергиях до $1.5 \div 2$ МэВ выше порогов $n^{12}\text{C}$ и $p^{12}\text{C}$ кластерных каналов [166].

В частности, в упругом $p^{12}\text{C}$ рассеянии имеется надпороговый резонансный уровень ядра ^{13}N при энергии 0.42 МэВ с $J^\pi = 1/2^+$, который приводит к резонансу $^2S_{1/2}$ фазы рассеяния, что и было показано в нашей работе [161] в сравнении с более ранними результатами фазового анализа [159,160]. В случае $n^{12}\text{C}$ рассеяния никаких резонансов в спектрах ядра ^{13}C вплоть до энергии 1.9 МэВ не наблюдается. Именно поэтому представляется интересным выяснить форму фаз упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния, извлеченных из экспериментальных данных при низких и, в первую очередь, астрофизических энергиях.

Тем более что реакция радиационного захвата в $n^{12}\text{C}$ канале, по-видимому, при любых энергиях входит в основную цепочку термоядерных реакций первичного нуклеосинтеза [167]



который и привел, в конечном итоге, к начальному формированию Солнца, звезд и всей нашей Вселенной [3,9,15,168,169].

Извлекаемые из экспериментальных дифференциальных сечений фазы упругого рассеяния позволяют построить потенциалы взаимодействия двух частиц в непрерывном спектре и выполнить расчеты некоторых характеристик их взаи-

модействия в процессах рассеяния и реакций. Например, это могут быть астрофизические S -факторы [6] или полные сечения реакций [170], в том числе, радиационного ^{12}C захвата в астрофизической области энергий, которые обычно рассматриваются в наших предыдущих работах [24,37,168].

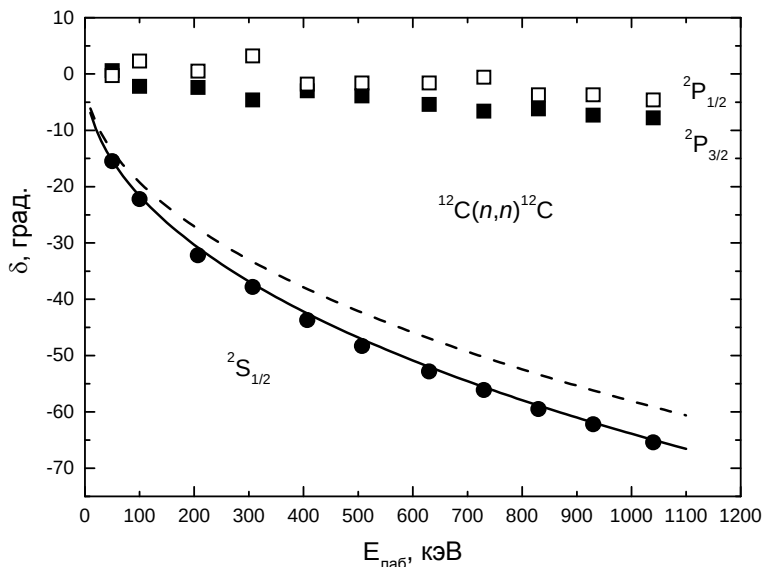


Рис.2.3.5. Результаты фазового анализа упругого ^{12}C рассеяния для варианта с отрицательными значениями 2S фаз.

Точки – результаты фазового анализа для $^2S_{1/2}$ фазы, открытые квадраты – результаты фазового анализа для $^2P_{1/2}$ фазы, черные квадраты – результаты фазового анализа для $^2P_{3/2}$ фазы. Кривые – результаты расчета с разными потенциалами, которые объяснены в тексте.

На основе описанных выше методов был выполнен фазовый анализ известных экспериментальных данных по дифференциальным сечениям упругого ^{12}C рассеяния в диапазоне энергий 50÷1040 кэВ (л.с.) [165]. Результаты нашего фазового анализа для S и P фаз рассеяния представлены на рис.2.3.5 и приведены в табл.2.3.7. При выполнении анализа величина χ^2 вычислялась при 10% экспериментальных ошибок.

ках дифференциальных сечений [165]. В последнем столбце табл.2.3.7 приведено значение χ^2 для каждой рассмотренной энергии.

Табл.2.3.7. Результаты фазового анализа (в град.) упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях для отрицательных значений 2S фаз.

$E_{\text{лаб}}, \text{кэВ}$	$^2S_{1/2}$	$^2P_{3/2}$	$^2P_{1/2}$	χ^2
50	-15.5	0.6	-0.3	0.023
100	-22.2	-2.2	2.3	0.016
157	-28.3	-1.0	-1.0	0.007
207	-32.2	-2.4	0.5	0.014
257	-35.6	-2.5	-0.4	0.009
307	-37.8	-4.6	3.3	0.033
357	-41.3	-2.7	-1.3	0.007
407	-43.7	-3.0	-1.8	0.027
457	-45.3	-5.1	2.5	0.029
507	-48.3	-3.9	-1.6	0.019
530	-49.1	-3.6	-3.4	0.020
630	-52.8	-5.4	-1.6	0.015
730	-56.0	-6.6	-0.6	0.031
830	-59.5	-6.2	-3.7	0.044
930	-62.1	-7.3	-3.7	0.042
1040	-65.4	-7.7	-4.6	0.096

Из рис.2.3.5 видно, что все 2P фазы имеют значения по модулю не более 10° , но их влияние уменьшает величину χ^2 примерно на порядок. Величина 2S фазы плавно спадает и, как будет видно далее, хорошо описывается гауссовым потенциалом во всей области низких энергий, которые были включены в анализ.

На рис.2.3.6 точками представлены дифференциальные сечения для некоторых рассмотренных энергий из работы [165] и сечения, полученные из нашего фазового анализа (непрерывная линия), который учитывает S и P фазы, приведенные в табл.2.3.7. Учет полученных небольших значений 2P

фаз позволил заметно улучшить качество описания дифференциальных сечений даже при самых низких энергиях.

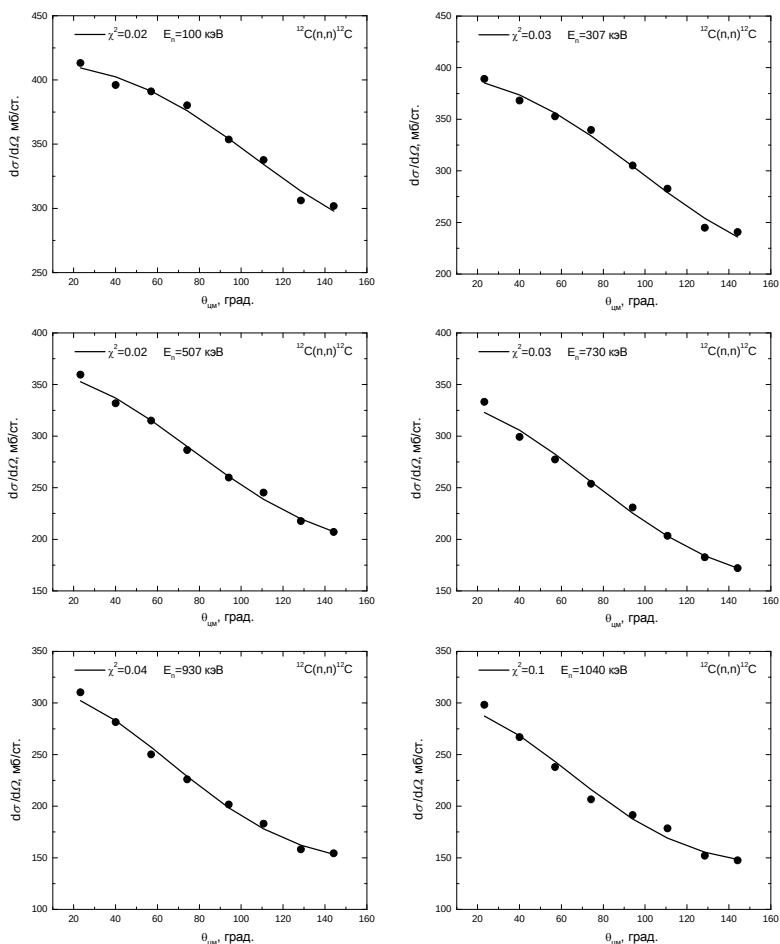


Рис.2.3.6. Дифференциальные сечения упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния. Непрерывная кривая – результаты расчета сечений с найденными фазами, точки – экспериментальные дифференциальные сечения рассеяния [165].

На рис.2.3.7 и в табл.2.3.8 приведен еще один вариант для набора фаз, в котором 2S фаза имеет положительные зна-

чения, также как и величины обеих 2P фаз. Значения χ^2 для этого варианта фаз практически не отличаются от первого набора из табл.2.3.7, но 2S фаза имеет форму близкую к резонансной, хотя в спектрах ядра ${}^{13}\text{C}$ резонансов не наблюдается [166]. Поэтому второй набор фаз рассеяния, по-видимому, не соответствует реальной ситуации и приводится здесь лишь для демонстрации имеющейся неоднозначности фазовых наборов.

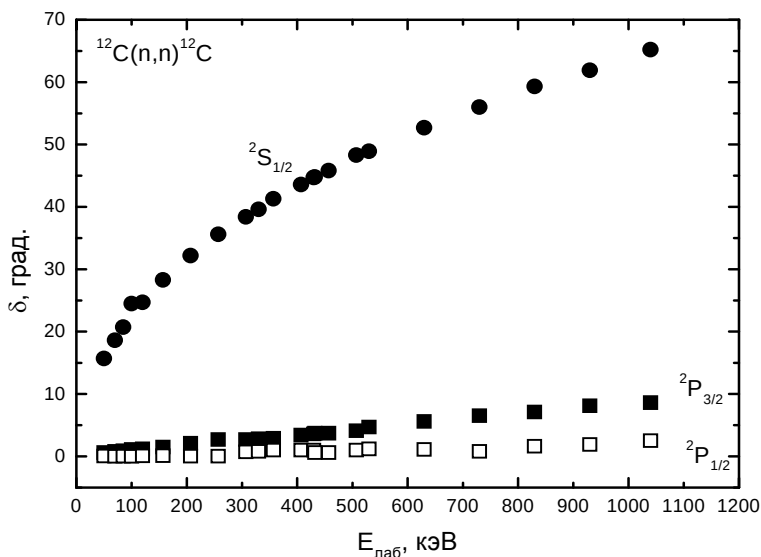


Рис.2.3.7. Результаты фазового анализа упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния для варианта с положительными значениями 2S фаз.

Точки – результаты фазового анализа для ${}^2S_{1/2}$ фазы, открытые квадраты – результаты фазового анализа для ${}^2P_{1/2}$ фазы, черные квадраты – результаты фазового анализа для ${}^2P_{3/2}$ фазы.

Для исключения имеющейся неоднозначности требуется использовать определенные физические принципы, например, информацию о структуре спектров уровней ядра [166]. Такая информация позволяет окончательно выбрать реальные наборы фаз упругого рассеяния, варианты которых могут быть получены в таком анализе. Кроме того, можно исполь-

зовать потенциальное описание процесса рассеяния, которое, как это будет показано далее, позволяет оценить разницу фаз для рассеяния нейтронов и протонов на одном ядре в одном потенциале, т.е. при изменении только кулоновского взаимодействия.

Табл.2.3.8. Результаты фазового анализа (в град.) упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях для положительных значений 2S фаз.

$E_{\text{лаб}}, \text{кэВ}$	$^2S_{1/2}$	$^2P_{3/2}$	$^2P_{1/2}$	χ^2
50	15.7	0.6	0.06	0.036
100	24.5	1.1	0.0	0.029
157	28.3	1.5	0.1	0.007
207	32.3	2.1	0.0	0.014
257	35.6	2.7	0.0	0.009
307	38.4	2.7	0.1	0.05
357	41.3	2.9	1.0	0.007
407	43.6	3.4	1.0	0.028
457	45.8	3.8	0.7	0.037
507	48.3	4.2	1.0	0.019
530	50.0	4.7	1.2	0.021
630	52.8	5.6	1.1	0.015
730	56.1	6.5	0.8	0.031
830	59.3	7.1	1.6	0.045
930	61.9	8.1	1.9	0.044
1040	65.2	8.6	2.5	0.098

Например, на рис.2.3.5 пунктирной кривой показана 2S фаза потенциала с точечным кулоновским членом, имеющего простой гауссов вид (1.2.2) и параметры

$$V_0 = -102.05 \text{ МэВ}, \alpha = 0.195 \text{ Фм}^{-2}.$$

Он был получен ранее для $p^{12}\text{C}$ рассеяния при описании астрофизического S -фактора радиационного $p^{12}\text{C}$ захвата в нашей работе [171]. Такой потенциал правильно описывал

резонансную форму 2S фазы $p^{12}C$ рассеяния и приводил к приемлемому согласию с экспериментальными данными при расчетах астрофизического S -фактора.

На рис.2.3.5 расчеты 2S фазы проводились для приведенного выше $p^{12}C$ потенциала с выключенным кулоновским взаимодействием, т.е. для $p^{12}C$ рассеяния. Из рис. 2.3.5 видно, что 2S фаза процесса $p^{12}C$ рассеяния не содержит резонанса. Это находится в полном согласии с наблюдаемыми спектрами ядра ${}^{13}C$ [166]. Кроме того видно, что результаты расчета 2S фазы вполне приемлемо передают результаты фазового $p^{12}C$ анализа, особенно при самых низких энергиях.

Для более точного описания полученных данных по фазам рассеяния требуется несколько изменить глубину потенциала при той же геометрии и задать -97.0 МэВ, что примерно на 5% отличается от первоначальных параметров. Результаты расчета 2S фазы с таким потенциалом приведены на рис. 2.3.5 непрерывной кривой, которая точно передает положение точек извлеченной из эксперимента 2S фазы упругого $p^{12}C$ рассеяния.

Такой потенциал, как и предыдущий, по-прежнему содержит одно связанное запрещенное состояние, наличие которого следует из анализа структуры запрещенных и разрешенных связанных состояний в $N^{12}C$ системе, проведенного в [168,171]. Несколько округляя ширину потенциала α , получим

$$V_0 = -99.0 \text{ МэВ}, \alpha = 0.2 \text{ Фм}^{-2}.$$

Фаза для такого варианта потенциала не отличается от приведенной на рис.2.3.5 непрерывной кривой.

Таким образом, в результате проведенного фазового анализа экспериментальных дифференциальных сечений получен набор фаз упругого $p^{12}C$ рассеяния при энергиях до 1.0 МэВ, который согласуется со спектрами уровней ядра ${}^{13}C$ [166] и потенциальными расчетами фаз процесса рассеяния, выполненными на основе предложенного ранее $p^{12}C$ потенциала взаимодействия. Полученный набор фаз рассеяния по-

звolyет приемлемо описать величину и форму дифференциальных сечений угловых распределений упругого $n^{12}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях, которые могут представлять интерес в некоторых задачах ядерной астрофизики [168].

Еще раз подчеркнем, что результаты выполненного фазового анализа, т.е. фазы упругого рассеяния системы частиц, в данном случае $n^{12}\text{C}$, позволяют параметризовать, как это было сделано выше, межкластерные парциальные потенциалы взаимодействия процессов рассеяния в этой системе. Такие потенциалы, в свою очередь, могут использоваться далее для выполнения определенных расчетов в области различных астрофизических приложений, частично рассмотренных, например, в наших работах [9,15,168].

2.3.5 Программа для $n^{12}\text{C}$ и $p^{12}\text{C}$ фазового анализа The program for $n^{12}\text{C}$ and $p^{12}\text{C}$ phase shifts analysis

Приведем текст компьютерной программы для выполнения фазового анализа упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния на языке Fortran-90. Программа ищет фазы упругого рассеяния двух частиц по экспериментальным дифференциальным сечениям методами, описанными в предыдущих параграфах.

Описание основных параметров, переменных, параметров потенциалов взаимодействия, блоков программы и подпрограмм дано далее в распечатке самой программы и практически не отличается от обозначений в предыдущих программах.

PROGRAM FAZ_ANAL_p12C

```
! * Программа фазового анализа упругого  $p^{12}\text{C}$  рассеяния *
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L,LMA,NI,NV,LMI,LH,LMI,LMAA,LHN,NTTT,
NTT,NPP,NT,NTP
CHARACTER(34) AA
CHARACTER(33) BB
CHARACTER(25) AC
CHARACTER(24) BC
CHARACTER(3) NOM
```

```

CHARACTER(6) EX,EX1
COMMON /A1/
SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT,POLE(0:50),POLED(0:50),DS1
(0:50),NTP,XIS,XIP,XI1
COMMON /A2/ NTTT,GG,SS,LMII,LMAA,LHH,NP
COMMON /A3/ POL(0:50),TT(0:100),REZ(0:50)
COMMON /A4/ LH,LMI,NTT,NPP
COMMON/A5/ PI
DIMENSION ST(0:50),FP(0:50),FM(0:50),XP(0:50)
! ***** Начальные значения *****
PI=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)
Z1=1.0D-000 ! Заряд P
Z2=6.0D-000 ! Заряд 12C
AM1=1.00727646577D-000; ! Масса P
AM2=12.0D-000; ! Масса 12C
AM=AM1+AM2
A1=41.80159D-000
PM=AM1*AM2/AM
B1=2.0D-000*PM/A1
LMI=0; LH=1; LMA=0
! Минимальный LMI и максимальный LMA орбитальный
! момент
EP=1.0D-05; LMII=LMI; LHH=LH; LMAA=LMA
! EP - точность поиска минимума хи квадрат
NV=1; ! 1 - Проводить минимизацию, 0 - без минимизации
FH=0.0123D-000 ! Начальный шаг
NI=10 ! Число итераций
NP=2*LMA; NPP=NP
! ***** Задание энергии в ц.м. *****
ECM=0.422D-000 ! Энергия в ц.м.
NT=17; NTT=NT; NTTT=NT ! Число точек по углам
NOM='422'
EX='-1.TXT'; EX1='-R.DAT'
AC='G:\BASICA\FAZ-ANAL\p12C\c'
BC='G:\BASICA\FAZ-ANAL\p12C\'
AA=AC//NOM//EX
BB=BC//NOM//EX1
OPEN (1,FILE=AA)

```

```

DO L=1,NT
READ(1,*) TT(L),SE(L),DE(L)
SE(L)=SE(L)*1000.0D-000
DE(L)=SE(L)*0.10D-000
ENDDO
CLOSE(1)
OPEN (1,FILE="G:\BASICA\FAZ-ANAL\p12C\FAZ.DAT")
DO L=LMI,LMA,LH
READ(1,*) FP(L),FM(L)
ENDDO
CLOSE(1)
! ***** Перевод начальных фаз в радианы *****
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*PI/180.0D-000
FP(L)=FP(L)*PI/180.0D-000
ENDDO
FH=FM*PI/180.0D-000
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I)=FP(I)
IF (I==LMA) GOTO 112
XP(I+LMA+LH)=FM(I+1)
112 ENDDO
! ***** Поиск минимума хи квадрат *****
EL=ECM*AM1/PM
SK=ECM*B1
SS=DSQRT(SK)
GG=3.4495312D-002*Z1*Z2*PM/SS
CALL VAR(ST,FH,NI,XP,EP,XI,NV)
FM(0)=XP(0)
DO I=LMI,LMA,LH
FP(I)=XP(I)
IF (I==LMA) GOTO 111
FM(I+1)=XP(I+LMA+LH)
111 ENDDO
! ***** Печать результатов *****
PRINT *," EL, ECM, SK, SS=",EL,ECM,SK,SS
PRINT *
PRINT *,"          T                      SE                      ST

```

```

XI "
DO I=1,NT
PRINT *,TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
PRINT *
PRINT *, "  XI=(XIS+XIP),XIS,XIP=",XI,XIS,XIP
PRINT *
PRINT *, "          L          FP          FM"
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*180.0D-000/PI
FP(L)=FP(L)*180.0D-000/PI
PRINT *,L,FP(L),FM(L)
ENDDO
OPEN (1,FILE=BB)
WRITE(1,*) " EL,ECM=",EL,ECM
WRITE(1,*) "XI=(XIS+XIP),XIS,XIP=",XI,XIS,XIP
WRITE(1,*) "          T          SE          ST
XI"
DO I=1,NT
WRITE(1,*) TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
WRITE(1,*) "
WRITE(1,*) "          L          FP          FM"
DO I=LMI,LMA,LH
WRITE(1,*) I,FP(I),FM(I)
ENDDO
OPEN (1,FILE="G:\BASICA\FAZ-ANAL\p12C\FAZ.DAT")
DO I=LMI,LMA,LH
WRITE(1,*) FP(I),FM(I)
ENDDO
CLOSE(1)
END
SUBROUTINE VAR(ST,PHN,NI,XP,EP,AMIN,NV)
! Вариационная подпрограмма для минимизации хи квадрат
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,NI,NT,NV,NP,LMI,LH,NN,IN,NTT,NTP
COMMON /A1/
SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT,POLE(0:50),POLED(0:50),DS1

```

```

(0:50),NTP,XIS,XIP,XI1
COMMON /A3/ POL(0:50),TT(0:100),REZ(0:50)
COMMON /A4/ LH,LMI,NTT,NP
COMMON/A5/ PI
DIMENSION XPN(0:50),XP(0:50),ST(0:50)
DO I=LMI,NP,LH
  XPN(I)=XP(I)
ENDDO
NN=LMI
PH=PHN
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (NV==0) GOTO 3012
DO IIN=1,NI
  NN=-LH
  PRINT *, 'FF=',ALA,IIN
  1119 NN=NN+LH
  IN=0
  2229 A=B
  XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
  IN=IN+1
  CALL DET(XPN,ST,ALA)
  B=ALA
  IF (B<A) GOTO 2229
  C=A
  XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
  IF (IN>1) GOTO 3339
  PH=-PH
  GOTO 5559
3339 IF (ABS((C-B)/(B))<EP) GOTO 4449
  PH=PH/2.0D-000
5559 B=C
  GOTO 2229
4449 PH=PHN
  B=C
  IF (NN<NP) GOTO 1119
  AMIN=B
  PH=PHN

```



```

ENDDO
3012 AMIN=B
DO I=LMI,NP,LH
XP(I)=XPN(I)
ENDDO
END
SUBROUTINE DET(XP,ST,XI)
! ***** Подпрограмма вычисления хи квадрат *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,NT,NTP
COMMON /A1/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT,POLE(0:50),
POLED(0:50),DS1(0:50),NTP,XIS,XIP,XI1
COMMON /A3/ POL(0:50),TT(0:100),REZ(0:50)
DIMENSION XP(0:50),ST(0:50)
S=0.0D-000
CALL SEC(XP,ST)
S1=0.0D-000
DO I=1,NT
DS(I)=((ST(I)-SE(I))/DE(I))**2
S=S+DS(I)
ENDDO
XI=S/NT
END
SUBROUTINE SEC(XP,S)
! *** Подпрограмма вычисления сечения рассеяния *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,NT,LMI,LMA,LH,L
COMMON /A2/ NT,GG,SS,LMI,LMA,LH,NP
COMMON /A3/ POL(0:50),TT(0:100),REZ(0:50)
COMMON/A5/ PI
DIMENSION
S0(0:50),P(0:50),PP(0:50),FP(0:50),FM(0:50),XP(0:50),S(0:50)
DO I=LMI,LMA,LH
FP(I)=XP(I)
IF (I==LMA) GOTO 111
FM(I+1)=XP(I+LMA+LH)
111 ENDDO
FM(0)=FP(0)

```

```

CALL CULFAZ(GG,S0)
DO I=1,NT
T=TT(I)*PI/180.0D-000
X=DCOS(T)
A=2.0D-000/(1.0D-000-X)
S00=2.0D-000*S0(0)
BB=-GG*A
ALO=GG*DLOG(A)+S00
REC=BB*DCOS(ALO)
AMC=BB*DSIN(ALO)
REZ1=REC**2+AMC**2
REA=0.0D-000
AMA=0.0D-000
REB=0.0D-000
AMB=0.0D-000
DO L=LMI,LMA,LH
FPP=2.0D-000*FP(L)
FMP=2.0D-000*FM(L)
AA=DCOS(FPP)-DCOS(FMP)
BB=DSIN(FPP)-DSIN(FMP)
SL=2.0D-000*S0(L)
CALL FUNLEG(X,L,PP)
REB=REB+(BB*DCOS(SL)+AA*DSIN(SL))*PP(L)
AMB=AMB+(BB*DSIN(SL)-AA*DCOS(SL))*PP(L)
LL=2*L+1
JJ=L+1
AA=JJ*DCOS(FPP)+L*DCOS(FMP)-LL
BB=JJ*DSIN(FPP)+L*DSIN(FMP)
CALL POLLEG(X,L,P)
REA=REA+(BB*DCOS(SL)+AA*DSIN(SL))*P(L)
AMA=AMA+(BB*DSIN(SL)-AA*DCOS(SL))*P(L)
ENDDO
REA=REC+REA
AMA=AMC+AMA
RE=REA**2+AMA**2
AM=REB**2+AMB**2
S(I)=10.0D-000*(RE+AM)/4.0D-000/SS**2
REZ(I)=REZ1*10.0D-000/4.0D-000/SS**2

```

```

POL(I)=2.0D-000*(REB*AMA-REA*AMB)/(RE+AM)
ENDDO
END
SUBROUTINE POLLEG(X,L,P)
! ***** Подпрограмма вычисления полиномов Лежандра ***
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L
DIMENSION P(0:50)
P(0)=1.0D-000; P(1)=X
DO I=2,L
P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
ENDDO
END
SUBROUTINE FUNLEG(X,L,P)
! *** Подпрограмма вычисления функций Лежандра *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L
DIMENSION P(0:50)
P(0)=0.0D-000; P(1)=DSQRT(ABS(1.-X**2)); P(2)=3.0D-
000*X*P(1)
IF (L>=3) THEN
DO I=2,L
P(I+1)=(2*I+1)*X/I*P(I)-(I+1)/I*P(I-1)
ENDDO
ENDIF
END
SUBROUTINE CULFAZ(G,F)
! *** Подпрограмма вычисления кулоновских фаз *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,N
DIMENSION F(0:50)
C=0.5772156650D-000; S=0.0D-000; N=50
A1=1.202056903D-000/3.0D-000; A2=1.036927755D-000/5.0D-
000
DO I=1,N
A=G/I-DATAN(G/I)-(G/I)**3/3.0D-000+(G/I)**5/5.0D-000
S=S+A
ENDDO

```

```
FAZ=-C*G+A1*G**3-A2*G**5+S
F(0)=FAZ
DO I=1,20
F(I)=F(I-1)+DATAN(G/I)
ENDDO
END
```

Следующий контрольный счет по этой программе выполнен при резонансной энергии 422 кэВ (ц.м.) в $p^{12}\text{C}$ упругом рассеянии с учетом в фазовом анализе только одной S волны:

EL, ECM, SK, SS = 4.574E-1 4.22E-1 1.87E-2 1.37E-1

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
10.83	409561	3256822.3428083	4.194371298676935
21.63	266969	227766.5412064077	2.156278956304461
32.39	58583.1	50674.784355610	1.8223143351212
43.07	17267.6	15925.09271621951	6.044624704055184E-1
53.66	5839.94	5640.62956376928	1.164778401875084E-1
64.14	2414.18	2060.5610732571380	2.145515754644307
74.5	965.24	740.3435278409627	5.428685268597148
84.71	422.29	265.4550687576415	13.793167214162040
94.79	217.01	120.1919175449456	19.9046247867550
104.7	147.11	103.6791667064438	8.715893867706498
114.5	140.23	133.5569838776437	2.264448667637590E-1
124.15	204.09	175.8612452117759	1.913110216888019
133.67	243.52	216.8648984979974	1.198095428652019
143.08	253.77	251.4932553653157	8.049114108914179E-3
152.39	267.64	278.2186995788807	1.562293138659170E-1
161.64	288.94	296.9745596276764	7.732302205565983E-2
170.84	292.72	308.0225110939944	2.732880319244108E-1

$$\chi^2 = 3.69$$

L	δ_p	δ_m
0	58.15	58.15

В результате получаем значение S фазы 58.15° при сравнительно большом значении $\chi^2 = 3.69$. Величины фаз и неко-

торые другие характеристики показаны в округленном, до второго знака после запятой, виде.

Если в анализе учитывать и P волну, то для фаз рассеяния получим следующий контрольный счет:

EL, ECM, SK, SS = 4.57E-1 4.22E-1 1.87E-2 1.37E-1

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
10.83	4095610	3264781.541334357	4.115148756111661
21.63	266969	223190.0387772885	2.689114135211925
32.39	58583.1	49592.26685532391	2.355348513821907
43.07	17267.6	16111.41279780082	4.483243796400418E-1
53.66	5839.94	6059.579098437353	1.414498640631696E-1
64.14	2414.18	2415.589085838059	3.406713446204295E-5
74.5	965.24	982.7590318182862	3.294197102373393E-2
84.71	422.29	414.5062045985828	3.397513798561286E-2
94.79	217.01	205.28584114367	2.918797023030877E-1
104.71	147.11	149.1168415589131	1.860980323212324E-2
114.5	140.23	155.8558179281346	1.241662746301032
124.15	204.09	185.2840079884762	8.490808445689716E-1
133.67	243.52	219.3107960699812	9.883067178217969E-1
143.08	253.77	250.1596154521572	2.024073897229597E-2
152.39	267.64	274.7849530022851	7.126835104038670E-2
161.64	288.94	292.3439981186766	1.387916330759821E-2
170.84	292.72	302.7569167687375	1.175698198093965E-1

$$\chi^2 = 7.90E-1$$

L	δ_p	δ_m
0	52.13	52.13
1	-8.97	12.82

Видно, что при учете в фазовом анализе S и P волн рассеяния, величина χ^2 уменьшается с 3.69 до 0.79.

В распечатках использованы следующие обозначения: EL – энергия частиц в лабораторной системе, ECM – энергия частиц в системе центра масс, SK – квадрат волнового числа k^2 , SS – волновое число k , L – орбитальный момент, θ – угол рассеяния, σ_e – экспериментальные сечения, σ_t – вычисленные сечения, χ^2_i – парциальные χ^2 для i -го угла, δ_p – фаза с J

$= L + 1/2$, δ_m – фаза при $J = L - 1/2$, χ^2 – среднее значение по всем точкам.

Если использовать для величины константы $\hbar^2 / m_0$ обычное значение 41.4686 МэВ·Фм², то, как видно из приведенной ниже распечатки, величина χ^2 изменяется примерно на 10%, а некоторые фазы на 0.5°, что практически не сказывается на результатах даже при резонансной энергии:

$$\chi^2 = 8.85E-1$$

L	δ_p	δ_m
0	51.63	51.63
1	-9.40	12.87

Из приведенных результатов видно, что при 422 кэВ (ц.м.) S фаза почти достигает своего резонансного значения в 90°. При энергиях в области резонанса, поскольку его ширина менее 32 кэВ [166], наблюдается настолько резкий подъем фазы, что изменение энергии примерно на 1 кэВ может привести к изменению фазы на 40°÷50°. Заметим, что точность определения энергии в рассматриваемом эксперименте составляет около 1 кэВ, а точность определения энергии резонансного уровня имеет величину 0.6 кэВ [166].

Найденные в результате фазового анализа фазы рассеяния использованы далее для построения межкластерных $p^{12}\text{C}$ потенциалов, которые, в свою очередь, применялись для расчетов астрофизических S-факторов радиационного $p^{12}\text{C}$ захвата [171]. Данный процесс является первой термоядерной реакцией CNO-цикла, который присутствует на более поздней стадии развития звезд, когда происходит частичное выгорание водорода. По мере его выгорания, ядро звезды начинает заметно сжиматься, приводя в результате к увеличению давления и температуры внутри звезды, и наряду с протон-протонным циклом вступает в действие следующая цепочка термоядерных процессов, называемая, CNO или углеродным циклом [1-3,168].

2.4 Фазовый анализ упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния Phase shifts analysis of $p^6\text{Li}$ scattering

Рассмотрим процессы упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния при астрофизических энергиях и выполним фазовый анализ экспериментальных данных. Результаты такого фазового анализа потребуются для построения в дальнейшем потенциалов межкластерного взаимодействия при расчетах, связанных с решением астрофизических задач [172].

2.4.1 Дифференциальные сечения Differential cross sections

При рассмотрении процессов рассеяния в системе частиц со спинами $1/2$ и 1 без учета спин-орбитального расщепления фаз сечение упругого рассеяния представляется в наиболее простом виде [88]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{2}{6} \frac{d\sigma_d(\theta)}{d\Omega} + \frac{4}{6} \frac{d\sigma_q(\theta)}{d\Omega} ,$$

где индексы d и q относятся к дублетному (со спином $1/2$) и квартетному (со спином $3/2$) состоянию $p^6\text{Li}$ системы, а сами сечения выражаются через амплитуды рассеяния, которые записываются подобно выражениям для фазового анализа в $^4\text{He}^4\text{He}$ системе

$$\frac{d\sigma_d(\theta)}{d\Omega} = |f_d(\theta)|^2 , \quad \frac{d\sigma_q(\theta)}{d\Omega} = |f_q(\theta)|^2 ,$$

где

$$f_{d,q}(\theta) = f_c(\theta) + f^N_{d,q}(\theta) ,$$

и

$$f_c(\theta) = - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0\} ,$$

$$f_d^N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L^d - 1] P_L(\cos\theta) ,$$

$$f_q^N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L^q - 1] P_L(\cos\theta) ,$$

где $S_L^{d,q} = \eta_L^{d,q} \exp[2i\delta_L^{d,q}(k)]$ - матрица рассеяния в дублетном или квартетном спиновом состоянии [88].

Возможность использования простых выражений для расчетов сечений упругого рассеяния обусловлена тем, что в области низких энергий спин-орбитальное расщепление фаз оказывается сравнительно мало, так как в упругом рассеянии отсутствуют резонансы, что подтверждается и результатами фазового анализа, выполненного ранее в работе [173], в которой учитывалось спин-орбитальное расщепление фаз рассеяния.

2.4.2 Фазовый анализ Phase shifts analysis

Ранее фазовый анализ дифференциальных сечений и функций возбуждения для упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния без явного учета дублетной 2P волны был выполнен в [173]. Наш фазовый анализ проводится при более низких энергиях, имеющих значение для ядерной астрофизики, учитывает все низшие парциальные волны, в том числе дублетную 2P волну и основан на дифференциальных сечениях, приведенных в работах [174,175] и [176].

При энергии 500 кэВ, на основе данных [176], находим 2S и 4S фазы рассеяния, которые даны в табл.2.4.1 под №1. Полученные результаты расчета сечений вполне согласуются с экспериментальными данными при среднем по всем точкам $\chi^2 = 0.15$. Ошибка дифференциальных сечений этих данных

принималась равной 10%. Учет дублетной 2P и квартетной 4P фаз показал, что их численные значения меньше 0.1° .

Табл.2.4.1. Результаты фазового анализа
(в град.) упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния.

№	E_p , кэВ	2S	4S	2P	4P	χ^2
1	500	176.2	178.7	—	—	0.15
2	593.0	174.2	178.8	—	—	0.15
3-1	746.4	170.1	180.0	—	—	0.24
3-2	746.4	172.5	179.9	1.7	—	0.16
4-1	866.8	157.8	180.0	—	—	0.39
4-2	866.8	170.2	174.9	3.9	—	0.22
4-3	866.8	169.6	175.0	3.5	0.1	0.23
5-1	976.5	160.0	178.5	—	—	0.12
5-2	976.5	167.0	174.5	1.1	—	0.12
6-1	1136.3	144.9	180.0	—	—	0.58
6-2	1136.3	164.7	171.1	5.8	—	0.32
6-3	1136.3	166.4	169.9	5.5	0.1	0.32

Следующие пять энергий относятся к новым результатам измерений дифференциальных сечений, выполненных в работах [174,175] в самое последнее время. Первая из них, 593.0 кэВ, дает возможность найти ${}^{2,4}S$ фазы, которые мало отличаются от фаз для предыдущей энергии, имеют такой же χ^2 и показаны в табл.2.4.1 под №2, а фазы для ${}^{2,4}P$ волн также стремятся к нулю.

При энергии 746.7 кэВ находим ${}^{2,4}S$ фазы (табл.2.4.1 №3-1), которые позволяют описать сечения с точностью $\chi^2 = 0.24$. Несмотря на малость величины χ^2 , была предпринята попытка учесть ${}^{2,4}P$ фазы. Вначале полагалось, что квартетная 4P фаза пренебрежимо мала, что следует из результатов [173], в которой их учет начинался только с $1.0 \div 1.5$ МэВ. Результаты нашего анализа с учетом только 2P фазы представлены на рис.2.4.1а и в табл.2.4.1 под №3-2. Видно, что учет неболь-

шой дублетной 2P фазы несколько изменяет величину 2S волн, увеличивая ее значение, и уменьшает $\chi^2 = 0.16$. Учет квартетной 4P фазы дал для ее численного значения пренебрежимо малую величину, меньше 0.1° , что соответствует результатам [173].

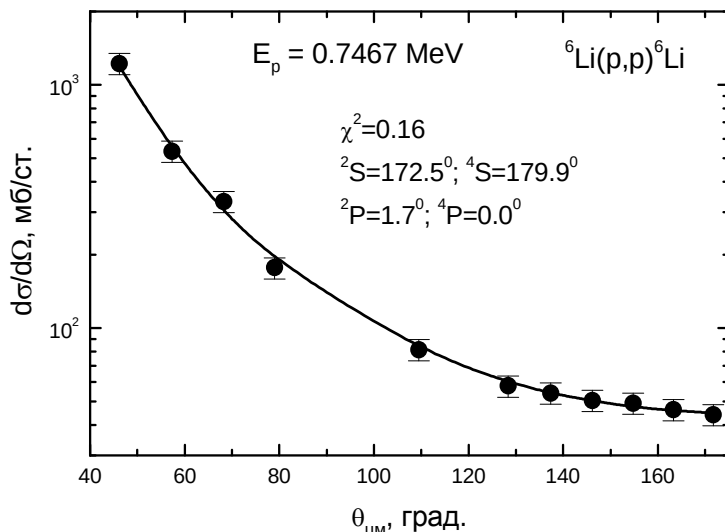


Рис.2.4.1а. Сечения упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния при 746.7 кэВ. Непрерывная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

Результат поиска фаз для энергии 866.8 кэВ с учетом только 2,4S волн приведен в табл.2.4.1 под №4-1 при $\chi^2 = 0.39$. Как видно, величина 2S фазы резко падает по сравнению с предыдущей энергией. Учет же 2P волны заметно увеличивает ее значение (рис.2.4.1б и табл.2.4.1 №4-2) и почти в два раза уменьшает величину χ^2 . Попытка учесть квартетную 4P фазу привела к значению около 0.1° (табл.2.4.1 №4-3).

Любое изменение 4P волны в большую сторону, в том числе, при других значениях остальных фаз, приводило к увеличению χ^2 . При этой энергии, как и всех других рассмотренных энергиях из работ [174,175], не удастся найти какой-либо вариант для ненулевой квартетной фазы при стремле-

нии величины χ^2 к минимуму.

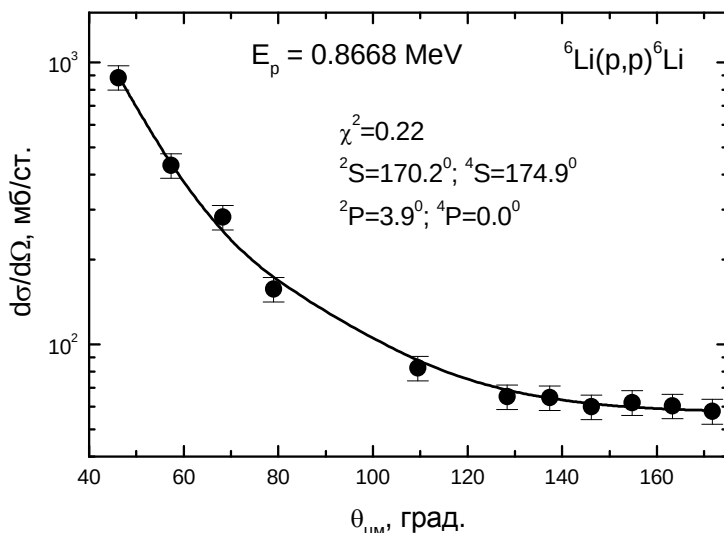


Рис.2.4.16. Сечения упругого $p{}^6\text{Li}$ рассеяния при 866.8 кэВ. Непрерывная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

Для следующей энергии, 976.5 кэВ, без учета ${}^{2,4}P$ волн найдены значения 2S и 4S фаз, приведенные в табл.2.4.1 с номером 5-1. Последующий учет 2P волны заметно увеличивает значения 2S фазы, если пренебречь 4P волной, как это видно на рис.2.4.1в и табл.2.4.1 №5-2 при $\chi^2 = 0.12$. Если включить в анализ квартетную 4P волну, то она стремится к нулю при уменьшении величины χ^2 .

Последняя из рассмотренных энергий 1.1363 МэВ из работ [174,175] даже при учете только ${}^{2,4}S$ волн приводит к сравнительно малому χ^2 , равному 0.58, как это видно в табл.2.4.1 №6-1. И в этом случае, учет 2P волны приводит к заметному увеличению значения 2S фазы – соответствующие результаты расчета сечений показаны на рис.2.4.1г и табл.2.4.1 под №6-2. Учет квартетной 4P волны и при этой энергии приводит к ее значению порядка 0.1° , как показано в табл.2.4.1 под №6-3.

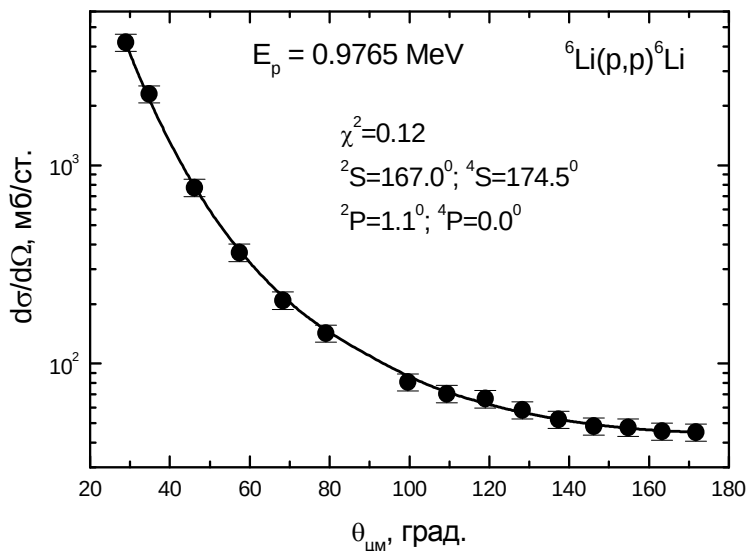


Рис.2.4.1в. Сечения упругого ${}^6\text{Li}$ рассеяния при 976.5 кэВ. Непрерывная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

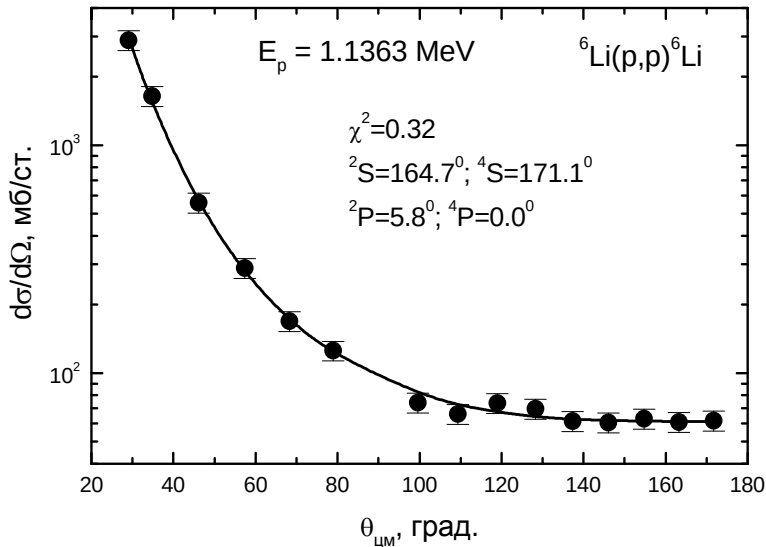


Рис.2.4.1г. Сечения упругого ${}^6\text{Li}$ рассеяния при 1136.3 кэВ. Непрерывная кривая – расчет сечений с найденными фазами.

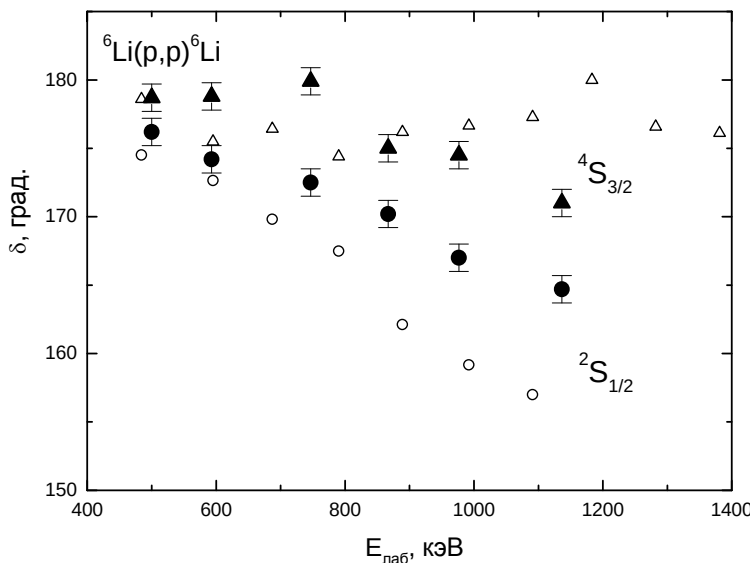


Рис.2.4.2а. Дублетные и квартетные S фазы упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния при низких энергиях.

Приведены дублетные и квартетные S фазы при наличии 2P волны, когда 4P фаза принималась равной нулю. Точки 2S и треугольники 4S фазы, полученные по данным работ [174,175,176]. Для сравнения открытыми треугольниками и кружками приведены результаты фазового анализа [173].

Таким образом, при описании всех экспериментальных данных из работ [174,175] не требуется учета квартетных 4P волн в этой области энергии, т.е. их величина равна или меньше 0.1° . Это согласуется с результатами [173], однако, дублетная 2P фаза доходит до $5.5^\circ \pm 6^\circ$ и ее значением нельзя пренебречь.

Общий вид 2S и 4S фаз рассеяния показан на рис.2.4.2а, а дублетные 2P фазы приведены на рис.2.4.2б. Несмотря на довольно большой разброс результатов для 4S фаз, дублетная 2S фаза имеет определенную тенденцию к убыванию, но происходит это заметно медленнее, чем следует из результатов анализа [173]. Если в нашем анализе не учитывать дублетную 2P волну, то для 2S фазы получаются результаты очень близ-

кие к результатам фазового анализа работы [173].

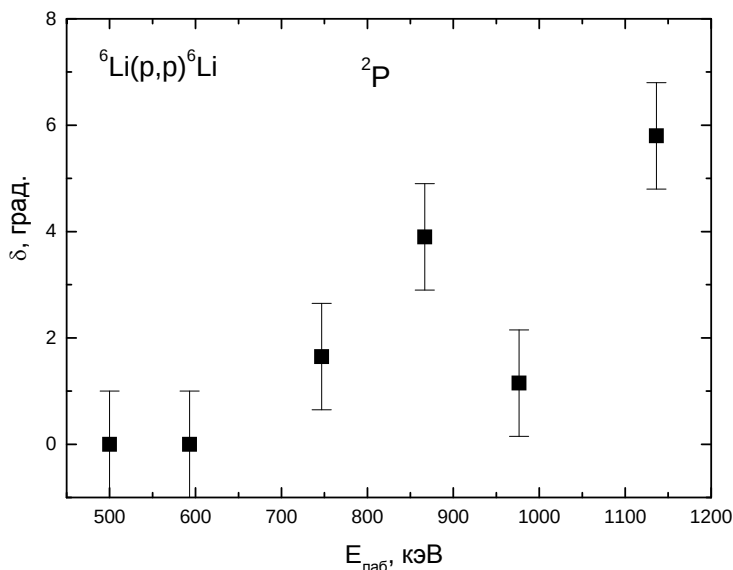


Рис.2.4.26. Дублетные 2P фазы упругого ${}^6\text{Li}$ рассеяния при низких энергиях.

Квадраты – результаты нашего фазового анализа для 2P фазы при ${}^4P = 0$.

Ошибки фаз упругого рассеяния, приведенных на рис.2.4.2, определяются неоднозначностью фазового анализа, а именно, при практически одном и том же значении χ^2 , которое может отличаться на 5÷10%, оказывается возможным получить несколько разные значения самих фаз рассеяния. Эта неоднозначность для ${}^{2,4}S$ и 2P фаз оценивается на уровне $1^\circ \div 1.5^\circ$.

2.4.3 Программа для фазового анализа Program for phase shifts analysis

Приведем текст компьютерной программы для выполнения ${}^6\text{Li}$ фазового анализа при низких энергиях без спин-орбитального расщепления фаз, которая использовалась для

получения описанных выше результатов. Обозначения основных параметров программы совпадают с предыдущими распечатками.

PROGRAM FAZ_ANAL_P6LI

```
! CALCULATE OF CROSS SECTION WITH COMPLEX
! PHASE SHIFTS FOR SYSTEM SPIN 1/2+1 WITHOUT LS
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER
L,LL,TMA,T,LN,LV,NV,Z1,Z2,LN1,NT,NP,NPP,NI,NYS,NNN
REAL(8)
SECT(0:200),FK(0:200),FD(0:200),XP(0:200),FK1(0:200),FD1(
0:200),S0(0:200)
COMMON REAL(8) /A/
PI,ET(0:200),ES(0:200),ST(0:200),SSE(0:200),TE(0:200) /R/
LN1,NT,P1,NP,NPP,LV1,NNN,BB /T/
SECE(0:200),DS(0:200),DSEC(0:200),TMA /W/
GG,SS,LN,LV,NYS
CHARACTER(7) BB
CHARACTER(12) AA
CHARACTER(13) CC
! ***** INPUT PARAMETERS *****
!AA='SEC11363.DAT'
!AA='SEC9765.DAT'
!AA='SEC8668.DAT'
!AA='SEC7467.DAT'
!AA='SEC495.DAT'
!AA='SEC989.DAT'
AA='SEC640.DAT'
!AA='SEC1585.DAT'
BB='FAZ.DAT'
!CC='SECT11363.DAT'
!CC='SECT9765.DAT'
!CC='SECT8668.DAT'
!CC='SECT7467.DAT'
!CC='SECT495.DAT'
!CC='SECT989.DAT'
CC='SECT640.DAT'
```

```

!CC='SECT1585.DAT'
!EL=1.1363D-000
!EL=0.9765D-000
!EL=0.8668D-000
!EL=0.7467D-000
EL=0.7464D-000
!EL=0.989D-000
!EL=1.585D-000
PI=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)
P1=PI
NYS=0; ! =0 - P-6LI; =1 - 3HE-3HE
NNN=1; ! ЧИСЛО НА КОТОРОЕ УМЕНЬШАЕТСЯ ШАГ
ПРИ КАЖДОЙ ИТЕРАЦИИ
NV=1 ! =0 БЕЗ ВАРИАЦИИ = 1 С ВАРЬИРОВАНИЕМ
FH=0.0123D-000; ! НАЧАЛЬНЫЙ ШАГ
NI=10; ! ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ
EPP=1.0D-010; ! ТОЧНОСТЬ
LN=0; LN1=LN
LV=0
LV1=LV; NPP=2*LV
TMA=11
NT=TMA
AM1=1.0D-000; AM2=6.0D-000; Z1=1; Z2=3
A1=41.4686D-000
PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
B1=2.0D-000*PM/A1
NP=NPP+2
! ***** PHASE SHIFKS FOR P- 6LI *****
FD(0)=160.0D-000
FD(1)=5.D-000
FD(2)=1.D0-000
FK(0)=179.D-000
FK(1)=3.0D-000
FK(2)=1.1D-000
OPEN (1,FILE=BB)
DO I=LN,LV
READ(1,*) FD(I),FK(I)
ENDDO

```



```

CLOSE(1)
OPEN (1,FILE=AA)
DO L=1,NT
READ(1,*) TE(L),SECE(L)
!,DSEC(L)
PRINT *, TE(L),SECE(L),DSEC(L)
ENDDO
CLOSE(1)
DO L=LN,LV
FD(L)=FD(L)*PI/180.0D-000
FK(L)=FK(L)*PI/180.0D-000
ET(L)=1.0D-000
ES(L)=1.0D-000
ENDDO
FH=FH*PI/180.0D-000
!DO L=LN,LV
!XP(L)=FD(L)
!XP(L+LV+1)=FK(L)
!ENDDO
DO I=LN,LV
XP(2*I)=FD(I)
XP(2*I+1)=FK(I)
ENDDO
! ***** TRANSFORM TO C.M. *****
ECM=EL*PM/AM1
! ***** TOTAL CROSS SECTION *****
SK=ECM*B1
SS=DSQRT(SK)
GG=3.44476D-002*Z1*Z2*PM/SS
CALL CULFAZ(GG,S0)
DO I=1,NT
TT=TE(I)*PI/180.0D-000
S00=2.0D-000*S0(0)
X=DCOS(TT)
A=2.0D-000/(1.0D-000-X)
BBB=-GG*A
ALO=GG*DLOG(A)+S00
RECU=BBB*DCOS(ALO)

```

```

AIMCUL=BBB*DSIN(ALO)
CUL=RECU**2+AIMCUL**2
SCUL=CUL*10.0D-000/4.0D-000/SS**2
!SECE(I)=SECE(I)*SCUL
DSEC(I)=SECE(I)*0.1
!DSEC(I)=DSEC(I)*SCUL
ENDDO
SIGS=0.0D-000; SIGT=0.0D-000
DO LL=LN,LV
FK11=FK(LL)
FD11=FD(LL)
SIGS=SIGS+(2.0D-000*LL+1.0D-000)*DSIN(FK11)**2
SIGT=SIGT+(2.0D-000*LL+1.0D-000)*DSIN(FD11)**2
ENDDO
SIGS=10.0D-000*4.0D-000*PI*SIGS/SK
SIGT=10.0D-000*4.0D-000*PI*SIGT/SK
SIG=1.0D-000/4.0D-000*SIGS+3.0D-000/4.0D-000*SIGT
PRINT *,"          SIGMS-TOT=",SIG
! ***** DIFFERENTIAL CROSS SECTION *****
CALL VAR(SECT,FH,NI,XP,EPP,XI,NV)
PRINT *,'  T    SE    ST    XI'
DO T=1,TMA
WRITE(*,1) TE(T),SECE(T),SECT(T),DS(T)
ENDDO
1 FORMAT(1X,F8.3,3E12.5)
PRINT *,'  FD    FK'
DO L=LN,LV
!FD(L)=XP(L)*180.0D-000/PI
!FK(L)=XP(L+LV+1)*180.0D-000/PI
FD(L)=XP(2*L)*180.0D-000/PI
FK(L)=XP(2*L+1)*180.0D-000/PI
IF (FD(L)<+0.0D-000) THEN
FD1(L)=FD(L)+180.0D-000
ELSE
FD1(L)=FD(L)
ENDIF
IF (FK(L)<+0.0D-000) THEN
FK1(L)=FK(L)+180.0D-000

```

```

ELSE
FK1(L)=FK(L)
ENDIF
WRITE(*,3) FD1(L),FK1(L)
ENDDO
WRITE(*,5) XI
5 FORMAT(F12.5)
OPEN (1,FILE=CC)
WRITE(1,*)"    EL    ECM    XI"
WRITE(1,4) EL,ECM,XI
WRITE(1,*) "    T        SE        DS        ST
XI"
DO I=1,NT
WRITE(1,6)TE(I),SECE(I),DSEC(I),SECT(I),DS(I)
ENDDO
WRITE(1,*) "    FD        FK"
DO I=LN,LV
WRITE(1,3)FD1(I),FK1(I)
ENDDO
CLOSE(1)
OPEN (1,FILE=BB)
DO I=LN,LV
WRITE(1,3)FD(I),FK(I)
ENDDO
CLOSE(1)
6 FORMAT(1X,F8.3,4E12.5)
4 FORMAT(3F10.5)
2 FORMAT(4F10.5)
3 FORMAT(2F10.5)
END
SUBROUTINE VAR(ST,PHN,NI,XP,EP,AMIN,NV)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,LMI,NV,NI,NPP,NT,IIN,NN,NP,IN,KK,NNN
REAL(8) XPN(0:50),XP(0:50),ST(0:50),FD(0:50),FK(0:50)
COMMON REAL(8) /R/ LMI,NT,PI,NP,NPP,LV,NNN,BB
CHARACTER(7) BB
!  

!BB='FAZ.DAT'

```

```

DO I=LMI,NP
XPN(I)=XP(I)
ENDDO
CALL DET(XPN,ST,B)
IF (NV==0) GOTO 3013
! -----
KK=1
DO IIN=1,NI
PH=PHN/KK
NN=-1
1119 NN=NN+1
IN=0
2229 A=B
XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XPN(NN)
IF (XPN(NN)>PI)GOTO 1118
IF (NN>NPP+2) THEN
IF (XPN(NN)<0.0D-000) GOTO 1118
ELSE
IN=IN+1
ENDIF
! -----
CALL DET(XPN,ST,B)
IF (B<A) GOTO 2229
1118 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XPN(NN)
IF (XPN(NN)>PI .AND. NN/=0 .AND. NN/=1)THEN
XPN(NN)=XPN(NN)-PI
ENDIF
PRINT *, '1=',B,NN,XPN(NN)*180.0/PI
IF (IN>1) THEN
IF (ABS(B-A)<EP .OR. ABS(PH*XPN(NN))<EP) GOTO 4449
PH=PH/2.0D-000
ELSE
PH=-PH/2.0D-000
ENDIF
GOTO 2229
! -----
4449 IF (NN+1<NP) THEN
PH=PHN

```

```

!/KK
GOTO 1119
ENDIF
PRINT *, '-----'
PRINT*, 'B=',B,IIN,PHN/KK/PI*180
PRINT *, '-----'
DO L=LMI,LV
FD(L)=XPN(2*L)*180.0D-000/PI
FK(L)=XPN(2*L+1)*180.0D-000/PI
ENDDO
OPEN (5,FILE=BB)
DO I=LMI,LV
WRITE(5,3)FD(I),FK(I)
ENDDO
CLOSE(5)
KK=NNN*KK
ENDDO
3013 AMIN=B
DO I=LMI,NP
XP(I)=XPN(I)
3 FORMAT(2F10.5)
ENDDO
END
SUBROUTINE DET(XP,ST,XI)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,NT
REAL(8) XP(0:50),ST(0:50)
COMMON REAL(8) /T/
SECE(0:200),DS(0:200),DSEC(0:200),NT
S=0.0D-000
CALL SEC(XP,ST)
DO I=1,NT
DS(I)=((ST(I)-SECE(I))/DSEC(I))**2
S=S+DS(I)
ENDDO
XI=S/NT
END
SUBROUTINE SEC(XP,ST)

```

```

IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER TT,L,TMA,LMA,LMI,NYS
REAL(8)
S0(0:20),P(0:20),ST(0:200),FK(0:200),FD(0:200),XP(0:200)
COMMON REAL(8) /A/
PI,ET(0:200),ES(0:200),SKS(0:200),SDS(0:200),TE(0:200) /T/
SE(0:200),DS(0:200),DE(0:200),TMA /W/
GG,SS,LMI,LMA,NYS
RECU1=0.0D-000; AIMCU1=0.0D-000
DO L=LMI,LMA
!FD(L)=XP(L)
!FK(L)=XP(L+LMA+1)
FD(L)=XP(2*L)
FK(L)=XP(2*L+1)
ENDDO
CALL CULFAZ(GG,S0)
DO TT=1,TMA
T=TE(TT)*PI/180.0D-000
S00=2.0D-000*S0(0)
X=DCOS(T)
A=2.0D-000/(1.0D-000-X)
BB=-GG*A
ALO=GG*DLOG(A)+S00
RECU1=BB*DCOS(ALO)
AIMCU1=BB*DSIN(ALO)
IF (NYS==0) GOTO 555
X1=DCOS(T)
A1=2.0D-000/(1.0D-000+X1)
BB1=-GG*A1
ALO1=GG*DLOG(A1)+S00
RECU1=BB1*DCOS(ALO1)
AIMCU1=BB1*DSIN(ALO1)
555 RET=0.0D-000; AIT=0.0D-000; RES=0.0D-000; AIS=0.0D-
000
DO L=LMI,LMA
AL=ET(L)*DCOS(2.0D-000*FK(L))-1.0D-000
BE=ET(L)*DSIN(2.0D-000*FK(L))
LL=2.0D-000*L+1.0D-000

```

```

SL=2.0D-000*S0(L)
CALL POLLEG(X,L,P)
RET=RET+LL*(BE*DCOS(SL)+AL*DSIN(SL))*P(L)
AIT=AIT+LL*(BE*DSIN(SL)-AL*DCOS(SL))*P(L)
AL=ES(L)*DCOS(2.0D-000*FD(L))-1.0D-000
BE=ES(L)*DSIN(2.0D-000*FD(L))
RES=RES+LL*(BE*DCOS(SL)+AL*DSIN(SL))*P(L)
AIS=AIS+LL*(BE*DSIN(SL)-AL*DCOS(SL))*P(L)
ENDDO
IF (NYS==0) GOTO 556
AIT=2.0D-000*AIT
RET=2.0D-000*RET
AIS=2.0D-000*AIS
RES=2.0D-000*RES
556 RETR=RECU1+RECU1+RET
AITR=AIMCU1+AIMCU1+AIT
RESI=RECU1+RECU1+RES
AISI=AIMCU1+AIMCU1+AIS
CUL=RECU1**2+AIMCU1**2
SCUL=CUL*10.0D-000/4.0D-000/SS**2
SKS(TT)=10.0D-000*(RETR**2+AITR**2)/4.0D-000/SS**2
SDS(TT)=10.0D-000*(RESI**2+AISI**2)/4.0D-000/SS**2
ST(TT)=(2.0D-000/6.0D-000*SDS(TT)+4.0D-000/6.0D-
000*SKS(TT))
!/SCUL
ENDDO
END
SUBROUTINE POLLEG(X,L,P)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER L,I
REAL(8) P(0:20)
P(0)=1.0D-000; P(1)=X
DO I=2,L
P(I)=(2*I-1)*X/I*P(I-1)-(I-1)/I*P(I-2)
!P(I)=(2.0D-000*I-1.0D-000)*X/(1.0D-000*I)*P(I-1)-(1.0D-
000*I-1.0D-000)/(1.0D-000*I)*P(I-2)
ENDDO
END

```

```

SUBROUTINE CULFAZ(G,F)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,N,J
REAL(8) F(0:20)
C=0.577215665D-000; S=0.0D-000; N=1000
A1=1.2020569030D-000/3.0D-000; A2=1.0369277550D-
000/5.0D-000
DO I=1,N
A=G/(1.0D-000*I)-DATAN(G/(1.0D-000*I))-(G/(1.0D-
000*I))**3/3.0D-000+(G/(1.0D-000*I))**5/5.0D-000
S=S+A
ENDDO
FAZ=-C*G+A1*G**3-A2*G**5+S; F(0)=FAZ
DO J=1,10
F(J)=F(J-1)+DATAN(G/(J*1.0D-000))
ENDDO
END

```

Теперь выполним некоторый контрольный счет по этой программе для поиска фаз рассеяния при энергии 640 кэВ в с.ц.м. (в табл.2.4.1 это вариант 3) с учетом, вначале S , а затем, S и P парциальных волн. Первый из контрольных счетов, проведенный только для нулевой парциальной волны, приводит к следующим результатам:

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
46.150	.12221E+04	.12206E+04	.14291E-03
57.340	.53259E+03	.56204E+03	.30591E+00
68.300	.33140E+03	.31229E+03	.33259E+00
79.020	.17700E+03	.19794E+03	.13992E+01
109.450	.81443E+02	.83291E+02	.51460E-01
128.310	.57902E+02	.60517E+02	.20406E+00
137.350	.54128E+02	.54215E+02	.25420E-03
146.160	.50402E+02	.49847E+02	.12139E-01
154.800	.49110E+02	.46852E+02	.21136E+00
163.290	.46213E+02	.44907E+02	.79861E-01
171.680	.43990E+02	.43811E+02	.16535E-02

$$\begin{array}{cc} \delta_d & \delta_k \\ 170.08 & 179.99 \\ \chi^2 = 0.236 \end{array}$$

В этом контрольном счете получаются фазы и χ^2 , совпадающие с результатами, приведенными выше в табл.2.4.1. под номером 3-1. В приведенных здесь распечатках приняты следующие обозначения: θ – угол рассеяния, σ_e – экспериментальные сечения, σ_t – вычисленные сечения, χ^2_i – парциальные χ^2 для i -го угла, δ_d – дублетная фаза, δ_k – квартетная фаза, χ^2 – среднее значение по всем экспериментальным точкам. При учете в фазовом анализе двух парциальных волн имеем

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
46.150	.12221E+04	.11875E+04	.80049E-01
57.340	.53259E+03	.54118E+03	.26020E-01
68.300	.33140E+03	.29882E+03	.96658E+00
79.020	.17700E+03	.18906E+03	.46396E+00
109.450	.81443E+02	.80736E+02	.75339E-02
128.310	.57902E+02	.59753E+02	.10226E+00
137.350	.54128E+02	.54042E+02	.25495E-03
146.160	.50402E+02	.50126E+02	.29924E-02
154.800	.49110E+02	.47469E+02	.11164E+00
163.290	.46213E+02	.45758E+02	.97024E-02
171.680	.43990E+02	.44800E+02	.33889E-01

$$\begin{array}{cc} \delta_d & \delta_k \\ 172.49 & 179.93 \\ 1.67139 & .00000 \\ \chi^2 = 0.164 \end{array}$$

В этом варианте счета результаты совпадают с данными, приведенными выше в табл.2.4.1 под номером 3-2 [177].

Полученные в этом параграфе фазы упругого рассеяния использовались далее для построения межкластерных потенциалов [177] и расчетов астрофизического S -фактора радиационного ${}^6\text{Li}$ захвата [172,175,178].

2.5 Фазовый анализ и компьютерные программы для рассеяния частиц со спином 1/2+1/2

Phase shifts analysis and computer program for scattering particles with spin 1/2+1/2

Рассмотрим теперь методы и компьютерные программы для фазового анализа процессов упругого рассеяния нетождественных частиц с полуцелым спином, например, это может быть упругое рассеяние $p^3\text{He}$, $p^3\text{H}$ или $p^{13}\text{C}$ и т.д.

2.5.1 Система со спин-орбитальным взаимодействием System with spin-orbit interaction

Использованные здесь выражения для дифференциальных сечений, на основе которых написана программа, приведены в нашей работе [17] вместе с аналогичными программами на языке Turbo Basic и для триплетного спинового состояния имеют вид, который учитывает только спин-орбитальное расщепление фаз рассеяния

$$\frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{3} \left[|A|^2 + 2(|B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2) \right] .$$

где

$$A = f_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum_{L=0} \{ (L+1)\alpha_L^+ + L\alpha_L^- \} \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos\theta) ,$$

$$B = f_c(\theta) + \frac{1}{4ik} \sum_{L=0} \{ (L+2)\alpha_L^+ + (2L+1)\alpha_L^0 + (L-1)\alpha_L^- \} \cdot \\ \cdot \exp(2i\sigma_L) P_L(\cos\theta)$$

$$C = \frac{1}{2ik\sqrt{2}} \sum_{L=1} \{\alpha_L^+ - \alpha_L^-\} \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos\theta) ,$$

$$D = \frac{1}{2ik\sqrt{2}} \sum_{L=1} \frac{1}{L(L+1)} \{L(L+2)\alpha_L^+ - (2L+1)\alpha_L^0 - (L-1)(L+1)\alpha_L^-\} \cdot \\ \cdot \exp(2i\sigma_L) P_L^1(\cos\theta) ,$$

$$E = \frac{1}{4ik} \sum_{L=2} \frac{1}{L(L+1)} \{L\alpha_L^+ - (2L+1)\alpha_L^0 + (L+1)\alpha_L^-\} \cdot \\ \cdot \exp(2i\sigma_L) P_L^2(\cos\theta)$$

Здесь определена величина α для каждого состояния с полным моментом $J = L \pm 1$ (α^+ и α^-) и $J = L$ (α^0). Отметим, что существует и другая форма записи выражений для сечений, представленная через производные полиномов Лежандра [179].

Для рассеяния в синглетном спиновом состоянии имеем

$$\frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} = |f_s(\theta)|^2 ,$$

где

$$f_s(\theta) = f_c(\theta) + f_s^N(\theta) ,$$

$$f_c(\theta) = - \left(\frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} \right) \exp\{i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] + 2i\sigma_0\} ,$$

$$f_s^N(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_L (2L+1) \exp(2i\sigma_L) [S_L^s - 1] P_L(\cos\theta) .$$

Здесь приняты обозначения переменных такими же, как для $^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния. Суммарное сечение упругого рассея-

ния определяется теперь в виде

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{4} \frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} + \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t(\theta)}{d\Omega}.$$

Приведем текст компьютерной программы для поиска фаз рассеяния в системе нетождественных частиц с полуцелым спином, а именно, $p^3\text{He}$. Данная программа учитывает спин-орбитальное расщепление фаз рассеяния, но не учитывает триплет-синглетное смешивание, которое будет включено в следующем параграфе.

PROGRAM FAZOVIIY_ANALIZ_p3He_WITH_LS

IMPLICIT REAL(8) (A-Z)

INTEGER

I,L,Z1,Z2,LMI,LH,LMA,LN,LV,NV,NI,NPP,NT,NTT,NP

DIMENSION ST(0:50),FT(0:50),XP(0:50)

COMMON /A/ LH,LMI,NT,PI,NP,NPP

COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NTT

COMMON /C/ SS,GG,LN,LV,POL(0:50),TT(0:50)

COMMON /D/ FP(0:50),FPI(0:50),EP(0:50),F0(0:50),F0I(0:50),

E0(0:50),M(0:50),FMI(0:50),EM(0:50),FS(0:50),FSI(0:50),

ES(0:50)

CHARACTER(9) BB

CHARACTER(7) AA

CHARACTER(15) CC

! ***** INPUT PARAMETERS *****

AA='SEC.DAT'

BB='FAZLS.DAT'

PI=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)

P1=PI

Z1=1 ! Заряд p

Z2=2 ! Заряд ^3He

AM1=1.0D-000 ! Масса p

AM2=3.0D-000 ! Масса ^3He

AM=AM1+AM2

A1=41.46860D-000

```

PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
B1=2.0D-000*PM/A1
LMI=0 ! Начальный орбитальный момент
LH=1 ! Шаг по моменту
LMA=2 ! Максимальный момент
LN=LMI
LV=LMA
EPP=1.0D-005
NV=1 ! Если 1 то варьировать фазы, если 0 – без варьирования
FH=0.01D-000
NI=5 ! Число итераций
NPP=2*LMA
! ***** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION 11.48 *****
NT=17 ! Число экспериментальных точек
NTT=NT
! ***** FOR P-3HE ON E=11.48 *****
OPEN (1,FILE=AA)
DO L=1,NT
READ(1,*) TT(L),SE(L)
ENDDO
CLOSE(1)
OPEN (1,FILE=BB)
DO I=LN,LV
READ(1,*) FP(I),F0(I),FM(I),FS(I)
ENDDO
CLOSE(1)
! ***** TRANSFORM TO RADIANS *****
DO L=LN,LV,LH
FM(L)=FM(L)*PI/180.0D-000
FP(L)=FP(L)*PI/180.0D-000
F0(L)=F0(L)*PI/180.0D-000
FMI(L)=FMI(L)*PI/180.0D-000
FPI(L)=FPI(L)*PI/180.0D-000
FOI(L)=FOI(L)*PI/180.0D-000
FT(L)=FT(L)*PI/180.0D-000
FS(L)=FS(L)*PI/180.0D-000
FSI(L)=FSI(L)*PI/180.0D-000

```

```

EP(L)=DEXP(-2.0D-000*FPI(L))
EM(L)=DEXP(-2.0D-000*FMI(L))
E0(L)=DEXP(-2.0D-000*F0I(L))
ES(L)=DEXP(-2.0D-000*FSI(L))
ENDDO
! *****
FH=FH*PI/180.0D-000
NP=2*NPP+1
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I)=FP(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+LMA+1)=F0(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+2*LMA+1)=FM(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I+3*LMA+1)=FS(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I+4*LMA+2)=FPI(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+5*LMA+3)=F0I(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+6*LMA+3)=FMI(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I+7*LMA+3)=FSI(I)
ENDDO
! ***** TRANSFORM TO C.M. *****
EL=11.48D-000
CC='SECTLS.DAT'
EC=EL*PM/AM1
SK=EC*B1
SS=DSQRT(SK)

```

```

GG=3.44476D-002*Z1*Z2*PM/SS
CALL VAR(ST,FH,NI,XP,EPP,XI,NV)
PRINT *, "                XI-KV=",XI
! ***** TOTAL CROSS SECTION *****
DO I=LMI,LMA,LH
FP(I)=XP(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
F0(I+1)=XP(I+LMA+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
FM(I+1)=XP(I+2*LMA+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
FS(I)=XP(I+3*LMA+1)
ENDDO
F0(0)=FP(0); FM(0)=FP(0)
DO I=LMI,LMA,LH
FPI(I)=XP(I+4*LMA+2)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
F0I(I+1)=XP(I+5*LMA+3)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
FMI(I+1)=XP(I+6*LMA+3)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
FSI(I)=XP(I+7*LMA+3)
ENDDO
F0I(0)=FPI(0); FMI(0)=FPI(0)
DO L=LN,LV,LH
EP(L)=DEXP(-2.0D-000*FPI(L))
EM(L)=DEXP(-2.0D-000*FMI(L))
E0(L)=DEXP(-2.0D-000*F0I(L))
ES(L)=DEXP(-2.0D-000*FSI(L))
ENDDO
SRT=0.0D-000; SRS=0.0D-000; SST=0.0D-000; SSS=0.0D-
000

```

```

DO L=LN,LV,LH
AP=FP(L)
AM=FM(L)
A0=F0(L)
ASS=FS(L)
L1=2*L+3
L2=2*L+1
L3=2*L-1
SRT=SRT+L1*(1.0D-000-EP(L)**2)+L2*(1.0D-000-
E0(L)**2)+L3*(1.0D-000-EM(L)**2)
SRS=SRS+L2*(1.0D-000-ES(L)**2)
SST=SST+L1*EP(L)**2*DSIN(AP)**2+L2*E0(L)**2*DSIN(A
0)**2+L3*EM(L)**2*DSIN(AM)**2
SSS=SSS+L2*ES(L)**2*DSIN(ASS)**2
ENDDO
SRT=10.0D-000*PI*SRT/SK/3.0D-000
SRS=10.0D-000*PI*SRS/SK
SIGR=1.0D-000/4.0D-000*SRS+3.0D-000/4.0D-000*SRT
SST=10.0D-000*4.0D-000*PI*SST/SK/3.0D-000
SSS=10.0D-000*4.0D-000*PI*SSS/SK
SIGS=1.0D-000/4.0D-000*SSS+3.0D-000/4.0D-000*SST
!PRINT *, "          SIGMS-TOT=",SIGS
PRINT *,"  T    SE    ST    XI"
DO I=1,NT
WRITE(*,2)TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
PRINT *,'  FP    F0    FM    FS'
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*180.0D-000/PI
FP(L)=FP(L)*180.0D-000/PI
FMI(L)=FMI(L)*180.0D-000/PI
FPI(L)=FPI(L)*180.0D-000/PI
F0(L)=F0(L)*180.0D-000/PI
F0I(L)=F0I(L)*180.0D-000/PI
FS(L)=FS(L)*180.0D-000/PI
FSI(L)=FSI(L)*180.0D-000/PI
WRITE(*,2) FP(L),F0(L),FM(L),FS(L)
ENDDO

```



```

OPEN (1,FILE=CC)
WRITE(1,*)"  EL    ECM    XI"
WRITE(1,4) EL,EC,XI
WRITE(1,*)"  T      SE      ST      XI"
DO I=1,NT
WRITE(1,2) TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
WRITE(1,*)"  FP(L)  F0(L)  FM(L)  FS(L)"
DO L=LN,LV
WRITE(1,2) FP(L),F0(L),FM(L),FS(L)
ENDDO
CLOSE(1)
OPEN (1,FILE=BB)
DO L=LN,LV
WRITE(1,3) FP(L),F0(L),FM(L),FS(L)
ENDDO
CLOSE(1)
4 FORMAT(1x,3F10.3)
2 FORMAT(1x,4F10.3)
3 FORMAT(1x,4F14.7)
END
SUBROUTINE VAR(ST,PHN,NI,XP,EP,AMIN,NV)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,LMI,LH,NV,NI,NPP,NT,IIN,NN,NP
DIMENSION XPN(0:50),XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /A/ LH,LMI,NT,PI,NP,NPP
! ***** ПОИСК ФАЗ *****
DO I=LMI,NP,LH
XPN(I)=XP(I)
ENDDO
NN=LMI
PRINT *,NN,XPN(NN)*180.0D-000/PI
PH=PHN
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (NV==0) GOTO 3013
PRINT *,ALA
DO IIN=1,NI

```

```

NN=-LH
PRINT *,ALA,IIN
GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH
IN=0
2229 A=B
XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)
IF (NP==2*NPP+1) GOTO 7777
IF (NN<(NP/2)) GOTO 7777
IF (XPN(NN)<0) GOTO 1159
7777 IN=IN+1
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
GOTO 5678
5678 CONTINUE
IF (B<A) GOTO 2229
C=A
XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF (IN>1) GOTO 3339
PH=-PH
GOTO 5559
3339 IF (ABS((C-B)/(B))<EP) GOTO 4449
PH=PH/2
5559 B=C
GOTO 2229
4449 PH=PHN
B=C
IF (NN<NP) GOTO 1119
AMIN=B
PH=PHN
ENDDO
3013 AMIN=B
DO I=LMI,NP,LH
XP(I)=XPN(I)
ENDDO
END
SUBROUTINE DET(XP,ST,XI)

```

```

! ***** ДЕТЕРМИНАНТ *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,NT
DIMENSION XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT
S=0.0D-000
CALL SEC(XP,ST)
DO I=1,NT
DS(I)=((ST(I)-SE(I)))**2/(0.025*SE(I))**2
S=S+DS(I)
ENDDO
XI=S/NT
END
SUBROUTINE SEC(XP,ST)
! ***** СЕЧЕНИЕ *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L,II,LH,LN,LV,NP,NPP,LMI,NT
COMMON /D/
FP(0:50),FPI(0:50),EP(0:50),F0(0:50),FOI(0:50),E0(0:50),FM(0:5
0),FMI(0:50),EM(0:50),FS(0:50),FSI(0:50),ES(0:50)
COMMON /C/ SS,GG,LN,LV,POL(0:50),TT(0:50)
COMMON /A/ LH,LMI,NT,PI,NP,NPP
DIMENSION
S0(0:50),P(0:50),P1(0:50),P2(0:50),ST(0:50),XP(0:50)
DO I=LN,LV,LH
FP(I)=XP(I)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH
II=I+LV+1
F0(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH
II=I+2*LV+1
FM(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV,LH
II=I+3*LV+1
FS(I)=XP(II)

```

```

ENDDO
F0(0)=FP(0); FM(0)=FP(0)
DO I=LN,LV,LH
  II=I+4*LV+2
  FPI(I)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH
  II=I+5*LV+3
  F0I(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH
  II=I+6*LV+3
  FMI(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV,LH
  II=I+7*LV+3
  FSI(I)=XP(II)
ENDDO
F0I(0)=FPI(0); FMI(0)=FPI(0)
DO L=LN,LV,LH
  EP(L)=DEXP(-2.0D-000*FPI(L))
  EM(L)=DEXP(-2.0D-000*FMI(L))
  E0(L)=DEXP(-2.0D-000*F0I(L))
  ES(L)=DEXP(-2.0D-000*FSI(L))
ENDDO
CALL CULFAZ(GG,S0)
DO I=1,NT
  T=TT(I)*PI/180.0D-000
  X=DCOS(T)
  CALL CULAMP(X,GG,S0,RECU,AMCU)
  CALL POLLEG(X,LV,P)
  CALL FUNLEG1(X,LV,P1)
  CALL FUNLEG2(X,LV,P2)
  RES=0.0D-000; AMS=0.0D-000; REA=0.0D-000; AMA=0.0D-
  000; REB=0.0D-000; AMB=0.0D-000
  REC=0.0D-000; AMC=0.0D-000; RED=0.0D-000; AMD=0.0D-
  000; REE=0.0D-000; AME=0.0D-000
DO L=LN,LV,LH

```

```

FP1=2.0D-000*FP(L);   FM1=2.0D-000*FM(L);   F01=2.0D-
000*F0(L)
SL=2.0D-000*S0(L); C=DCOS(SL); S=DSIN(SL); FS1=2.0D-
000*FS(L)
AL1P=EP(L)*DCOS(FP1)-1.0D-000
AL2P=EP(L)*DSIN(FP1)
AL1M=EM(L)*DCOS(FM1)-1.0D-000
AL2M=EM(L)*DSIN(FM1)
AL10=E0(L)*DCOS(F01)-1.0D-000
AL20=E0(L)*DSIN(F01)
A1=(L+1)*AL1P+L*AL1M
A2=(L+1)*AL2P+L*AL2M
REA=REA+(A2*C+A1*S)*P(L)
AMA=AMA+(A2*S-A1*C)*P(L)
B1=(L+2)*AL1P+(2*L+1)*AL10+(L-1)*AL1M
B2=(L+2)*AL2P+(2*L+1)*AL20+(L-1)*AL2M
REB=REB+(B2*C+B1*S)*P(L)/2.0D-000
AMB=AMB+(B2*S-B1*C)*P(L)/2.0D-000
IF (L<1) GOTO 2111
C1=AL1P-AL1M
C2=AL2P-AL2M
CC1=1.0D-000/(DSQRT(2.0D-000))
REC=REC+(C2*C+C1*S)*P1(L)*CC1
AMC=AMC+(C2*S-C1*C)*P1(L)*CC1
DD1=1.0D-000/(DSQRT(2.0D-000)*L*(L+1))
D1=L*(L+2)*AL1P-(2*L+1)*AL10-(L**2-1)*AL1M
D2=L*(L+2)*AL2P-(2*L+1)*AL20-(L**2-1)*AL2M
RED=RED+(D2*C+D1*S)*P1(L)*DD1
AMD=AMD+(D2*S-D1*C)*P1(L)*DD1
2111 IF (L<2) GOTO 2222
EE1=1.0D-000/(2*L*(L+1))
E1=L*AL1P-(2*L+1)*AL10+(L+1)*AL1M
E2=L*AL2P-(2*L+1)*AL20+(L+1)*AL2M
REE=REE+(E2*C+E1*S)*P2(L)*EE1
AME=AME+(E2*S-E1*C)*P2(L)*EE1
2222 ENDDO
RES=0.0D-000; AMS=0.0D-000
DO L=LN,LV,LH

```

```

SL=2.0D-000*S0(L)
C=DCOS(SL)
S=DSIN(SL)
FS1=2.0D-000*FS(L)
ALS=ES(L)*DCOS(FS1)-1.0D-000
BS=ES(L)*DSIN(FS1)
RES=RES+(2*L+1)*(BS*C+ALS*S)*P(L)
AMS=AMS+(2*L+1)*(BS*S-ALS*C)*P(L)
ENDDO
9191 CONTINUE
RES=RECU+RES
AMS=AMCU+AMS
SES=10.0D-000*(RES**2+AMS**2)/4.0D-000/SS**2
REA=RECU+REA
AMA=AMCU+AMA
REB=RECU+REB
AMB=AMCU+AMB
AA=REA**2+AMA**2
BB=REB**2+AMB**2
CC=REC**2+AMC**2
DD=RED**2+AMD**2
EE=REE**2+AME**2
SET=10.0D-000*(AA+2*(BB+CC+DD+EE))/4.0D-
000/SS**2/3.0D-000
S=3.0D-000/4.0D-000*SET+1.0D-000/4.0D-000*SES
ST(I)=S
ENDDO
END
SUBROUTINE CULAMP(X,GG,S0,RECU,AMCU)
! ***** КУЛОНОВСКАЯ АМПЛИТУДА *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
DIMENSION S0(0:20)
A=2.0D-000/(1.0D-000-X)
S00=2.0D-000*S0(0)
BB=-GG*A
AL=GG*DLOG(A)+S00
RECU=BB*DCOS(AL)
AMCU=BB*DSIN(AL)

```

END

SUBROUTINE POLLEG(X,L,P)

! ***** ПОЛИНОМ ЛЕЖАНДРА *****

IMPLICIT REAL(8) (A-Z)

INTEGER I,L

DIMENSION P(0:20)

P(0)=1.0D-000

P(1)=X

DO I=2,L

P(I)=(2.0D-000*I-1.0D-000)*X/I*P(I-1)-(I-1.0D-000)/I*P(I-2)

ENDDO

END

SUBROUTINE FUNLEG1(X,L,P)

! ***** ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА *****

IMPLICIT REAL(8) (A-Z)

INTEGER I,L

DIMENSION P(0:20)

P(0)=0.0D-000

P(1)=DSQRT(ABS(1.0D-000-X**2))

DO I=2,L

P(I)=(2.0D-000*I-1.0D-000)*X/(I-1.0D-000)*P(I-1)-I/(I-1.0D-000)*P(I-2)

ENDDO

END

SUBROUTINE FUNLEG2(X,L,P)

! ***** ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА *****

IMPLICIT REAL(8) (A-Z)

INTEGER L

DIMENSION P(0:20)

P(0)=0.0D-000

P(1)=0.0D-000

P(2)=3.0D-000*ABS(1.0D-000-X**2)

DO I=3,L

P(I)=(2.0D-000*I-1.0D-000)*X/(I-2.0D-000)*P(I-1)-(I+1.0D-000)/(I-2.0D-000)*P(I-2)

ENDDO

END

SUBROUTINE CULFAZ(G,F)

```
! ***** КУЛОНОВСКИЕ ФАЗЫ *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,N
DIMENSION F(0:20)
C=0.577215665D-000
S=0.D-000
N=50
A1=1.202056903D-000/3.D-000
A2=1.036927755D-000/5.D-000
DO I=1,N
A=G/I-DATAN(G/I)-(G/I)**3/3.D-000+(G/I)**5/5.D-000
S=S+A
ENDDO
FAZ=-C*G+A1*G**3-A2*G**5+S
F(0)=FAZ
DO I=1,20
F(I)=F(I-1)+DATAN(G/I)
ENDDO
END
```

Приведем теперь результаты контрольного счета по этой программе для случая упругого $p^3\text{He}$ рассеяния при энергии 11.48 МэВ, где с учетом синглет-триплетного смешивания для χ^2 было получено 0.45 [180,181]. В этих работах в табличном виде приведены дифференциальные сечения, их ошибки и фазы рассеяния, полученные при фазовом анализе, которые мы используем для контрольных расчетов, т.е. считаем сечения и χ^2 с полученными в [180,181] фазами.

Далее в распечатке результатов приняты следующие обозначения: θ – угол рассеяния, σ_e – экспериментальные сечения, σ_t – вычисленные сечения, χ_i^2 – парциальные χ^2 для i -го угла, χ^2 – среднее значение χ^2 , δ_m – триплетная фаза с $J = L - 1$, δ_0 – фаза при $J = L$, δ_p – фаза при $J = L + 1$, δ_s – синглетная фаза рассеяния.

В первой строчке распечатки фазы соответствуют орбитальному моменту $L = 0$, во второй $L = 1$ и в третьей $L = 2$

$$\chi^2 = 7.375\text{E-}001$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
27.640	223.100	229.159	1.179
31.970	222.000	222.687	0.015
36.710	211.900	211.146	0.020
82.530	54.270	53.522	0.302
90.000	36.760	36.249	0.309
96.030	25.700	25.467	0.133
103.800	16.780	16.162	2.165
110.550	13.210	12.598	3.444
116.570	13.210	13.120	0.075
125.270	20.260	19.962	0.341
133.480	32.210	32.333	0.023
140.790	45.950	46.975	0.794
147.210	58.820	61.388	3.052
153.900	75.460	76.517	0.313
162.140	92.720	93.062	0.022
165.670	97.700	98.823	0.212
166.590	101.100	100.157	0.139

δ_p	δ_0	δ_m	δ_s
-88.800	-88.800	-88.800	-84.600
66.700	49.400	44.300	21.400
2.500	2.500	2.500	-18.600

Поскольку эта программа не учитывает синглет-триплетного смешивания, то и результаты для χ^2 получаются несколько больше, чем в работах [180,181].

Теперь для сравнения приведем результаты с теми же фазами, при выполнении контрольных расчетов по программам на языке Turbo Basic в нашей предыдущей работе [17], где была получена величина $\chi^2 = 0.74$:

θ	σ_e	σ_t
27.64	223.10	229.16
31.97	222.00	222.69
36.71	211.90	211.15

82.53	54.27	53.52
90.00	36.76	36.25
96.03	25.70	25.47
103.80	16.78	16.16
110.55	13.21	12.60
116.57	13.21	13.12
125.27	20.26	19.96
133.48	32.21	32.33
140.79	45.95	46.98
147.21	58.82	61.39
153.90	75.46	76.52
162.14	92.72	93.06
165.67	97.70	98.82
166.59	101.10	100.16

Видно, что эти результаты совпадают с точностью до ошибок округления, т.е. не зависят от языка, на котором написана программа. Однако переход на язык Fortran-90 позволил существенно повысить скорость работы всех компьютерных программ и возможность использования более высокой точности поиска минимума χ^2 .

Если теперь выполнить полное варьирование фаз по новой компьютерной программе, с поиском минимального значения χ^2 , то после, примерно, 3 000 итераций получим следующий результат:

$\chi^2 = 2.27\text{E-}001$			
θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
27.640	223.100	224.854	0.099
31.970	222.000	221.150	0.023
36.710	211.900	211.107	0.022
82.530	54.270	53.832	0.104
90.000	36.760	36.715	0.002
96.030	25.700	26.026	0.257
103.800	16.780	16.737	0.011
110.550	13.210	13.072	0.175
116.570	13.210	13.423	0.415

125.270	20.260	19.928	0.430
133.480	32.210	31.955	0.100
140.790	45.950	46.330	0.109
147.210	58.820	60.563	1.405
153.900	75.460	75.569	0.003
162.140	92.720	92.038	0.087
165.670	97.700	97.785	0.001
166.590	101.100	99.116	0.616

δ_p	δ_0	δ_m	δ_s
-84.530	-84.530	-84.530	-93.630
56.144	46.185	42.904	44.694
3.404	3.584	4.982	-19.086

Полученные новые фазы рассеяния несколько отличаются от предыдущих результатов, а χ^2 уменьшился более чем в три раза.

2.5.2 Система со спин-орбитой и синглет-триплетным смешиванием System with spin-orbit and singlet-triplet mixing

Рассмотрим далее рассеяние нетождественных частиц с полупелым спином, с учетом спин-орбитальных взаимодействий, смешивания различных орбитальных состояний за счет тензорных сил и смешивания синглет-триплетных состояний. Дифференциальное сечение рассеяния имеет более сложный вид, в формулы для сечений входят, как фазы рассеяния, так и параметры смешивания состояний с разным спином и орбитальным моментом, а наиболее полные выражения для таких сечений приведены в работе [182]

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2k^2} \{ |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 + |E|^2 + |F|^2 + |G|^2 + |H|^2 \} .$$

Амплитуды рассеяния записываются в виде

$$A = f'_c + \frac{1}{4} \sum_{L=0}^{\infty} P_L(x) \left\{ -\sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+2) U_{L,1;L,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,1;L,1}^L + \right. \\ \left. + (L-1) U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\},$$

$$B = f'_c + \frac{1}{4} \sum_{L=0}^{\infty} P_L(x) \left\{ \sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+1) U_{L,1;L,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,0;L,0}^L + \right. \\ \left. + L U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\},$$

$$C = \frac{1}{4} \sum_{L=0}^{\infty} P_L(x) \left\{ \sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+1) U_{L,1;L,1}^{L+1} - (2L+1) U_{L,0;L,0}^L + \right. \\ \left. + L U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\},$$

$$D = -\frac{1}{4} i \sin \theta \sum_{L=1}^{\infty} P'_L(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ -\sqrt{(L+1)(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\ \left. - \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} - (2L+1) U_{L,1;L,0}^L \right\},$$

$$E = -\frac{1}{4} i \sin \theta \sum_{L=1}^{\infty} P'_L(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ -\sqrt{(L+1)(L-1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\ \left. - \sqrt{L(L+1)} U_{L,1;L,1}^{L-1} + \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,1;L,0}^L \right\},$$

$$F = -\frac{1}{4} i \sin^2 \theta \sum_{L=2}^{\infty} P''_L(x) / \sqrt{(L-1)L(L+1)(L+2)} \left\{ -\sqrt{(L+1)(L+2)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{L(L-1)(L+2)}{L+1}} U_{L,1;L,1}^{L+1} - (2L+1) \sqrt{\frac{(L-1)(L+2)}{L(L+1)}} U_{L,1;L,1}^L + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{(L-1)(L+1)(L+2)}{L}} U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{L(L-1)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} \right\},$$

$$G = -\frac{1}{4} i \sin \theta \sum_{L=1}^{\infty} P'_L(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ \sqrt{(L-1)(L+1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+2) \sqrt{\frac{L}{L+1}} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\ \left. - \frac{(2L+1)}{\sqrt{L(L+1)}} U_{L,1;L,1}^L - (L-1) \sqrt{\frac{(L+1)}{L}} U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} - (2L+1) U_{L,0;L,1}^L \right\},$$

$$H = -\frac{1}{4}i \sin \theta \sum_{L=1}^{\infty} P_L'(x) / \sqrt{L(L+1)} \left\{ \sqrt{(L-1)(L+1)} U_{L,1;L-2,1}^{L-1} + (L+2) \sqrt{\frac{L}{L+1}} U_{L,1;L,1}^{L+1} - \right. \\ \left. - \frac{(2L+1)}{\sqrt{L(L+1)}} U_{L,1;L,1}^L - (L-1) \sqrt{\frac{(L+1)}{L}} U_{L,1;L,1}^{L-1} - \sqrt{L(L+2)} U_{L,1;L+2,1}^{L+1} + (2L+1) U_{L,0;L,1}^L \right\} .$$

Матрица рассеяния представляется в виде

$$U_{L,S;L,S'}^J = U_{L',S';L,S}^J = \exp[i(\alpha_L + \alpha_{L'})](S_{L',S';L,S}^J - \delta_{L,L'} \delta_{S,S'})$$

и, например, при $L = 1$ и $J = 1$ с учетом смешивания $\varepsilon_{1,0}^1 = \varepsilon_{S,S'}^J$ синглетного и триплетного состояний записывается

$$S_{1,0;1,0}^1 = \cos^2 \varepsilon_{1,0}^1 \exp(2i\delta_{0,1}^1) + \sin^2 \varepsilon_{1,1}^1 \exp(2i\delta_{1,1}^1) ,$$

$$S_{1,1;1,1}^1 = \sin^2 \varepsilon_{1,0}^1 \exp(2i\delta_{0,1}^1) + \cos^2 \varepsilon_{1,1}^1 \exp(2i\delta_{1,1}^1) ,$$

$$S_{1,0;1,1}^1 = S_{1,1;1,0}^1 = \frac{1}{2} \sin(2\varepsilon_{1,0}^1) (\exp(2i\delta_{0,1}^1) - \exp(2i\delta_{1,1}^1)) ,$$

где $\delta_{k,k'}$ – символ Кронекера, $x = \cos(\theta)$, величины без штриха обозначают начальное состояние, а со штрихом – конечное при таком же полном моменте J , кулоновские фазы α_L определены в параграфе 2.1, а ядерные фазы $\delta_{S,L}^J$ считаются комплексными, чтобы учесть неупругие каналы.

Смешивание $\varepsilon_1 = \varepsilon_{S,S'}^J$ триплетных (спины S и S' , и полный момент равны 1) S и D состояний определяется следующими выражениями для матрицы рассеяния

$$S_{0,0}^1 = \cos^2 \varepsilon_1 \exp(2i\delta_0^1) + \sin^2 \varepsilon_1 \exp(2i\delta_2^1) ,$$

$$S_{2,2}^1 = \sin^2 \varepsilon_1 \exp(2i\delta_0^1) + \cos^2 \varepsilon_1 \exp(2i\delta_2^1) ,$$

$$S_{0,2}^1 = S_{2,0}^1 = \frac{1}{2} \sin(2\varepsilon_1) \left[\exp(2i\delta_0^1) - \exp(2i\delta_2^1) \right] .$$

Штрихи у полиномов Лежандра обозначают производные, а кулоновская амплитуда рассеяния записана в форме

$$f_c'(\theta) = - \left(\frac{i\eta}{2\sin^2(\theta/2)} \right) \exp \{ i\eta \ln[\sin^{-2}(\theta/2)] \} .$$

Производные полиномов Лежандра связаны с функциями Лежандра, о которых говорилось ранее, следующим образом

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}(x^2-1)^n}{dx^{m+n}} = \\ &= \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m} . \end{aligned}$$

Если в приведенных выше выражениях пренебречь тензорным взаимодействием и синглет-триплетным смешиванием, то матрица рассеяния примет обычный вид $\exp(2i\delta_{S,L})$ с комплексной фазой.

Следующая программа основана на всех этих выражениях и включает синглет-триплетное смешивание EPS [182], которое учитывается только для $L = 1$. В программе явно заданы значения экспериментальных сечений, их ошибок и фаз рассеяния. Обозначения переменных, параметров и блоков, как в предыдущей программе.

Операторы

READ(1,*) TT(L),SE(L),DE(L)

и

READ(1,*) FP(I),F0(I),FM(I),FS(I),EPS(I)

вначале программы считывают из файлов

```
AA='SEC.DAT'
BB='FAZTENZ.DAT'
```

те же данные, которые явно заданы в самой программе, т.е. исходные данные можно использовать из программы или из этих файлов.

```
PROGRAM FAZ_ANAL_P_3He_WIRH_LS_AND_TS
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER
I,L,LH,LN,LV,LMA,LMI,NT,NP,NPP,Z1,Z2,LMI1,LH1,NT2,N
T1,NI
DIMENSION
ST(0:50),FP(0:50),F0(0:50),FM(0:50),FS(0:50),ES(0:50)
DIMENSION
XP(0:50),FPI(0:50),FOI(0:50),FMI(0:50),FSI(0:50),EPS(0:50),EP
(0:50),EO(0:50),EM(0:50)
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT
COMMON /C/ LH,LMI,NT1,PI,NP,NPP
COMMON /A/ SS,GG,P1,LMI1,LMA,LH1,NT2,POL(0:50),
TT(0:50)
CHARACTER(11) BB
CHARACTER(7) AA
CHARACTER(12) CC
! ***** INPUT PARAMETERS *****
AA='SEC.DAT'
BB='FAZTENZ.DAT'
CC='SECTTENZ.DAT'
PI=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)
P1=PI
Z1=1
Z2=2
AM1=1.0D-000
AM2=3.0D-000
AM=AM1+AM2
A1=41.4686D-000
```

```

PM=AM1*AM2/(AM1+AM2)
B1=2.0D-000*PM/A1
LMI=0
LH=1
LMA=2
LN=LMI
LMI1=LMI
LV=LMA
LH1=LH
EPP=1.0D-05
NV=1
FH=0.01D-000
NI=500
NPP=2*LMA
! **** ECSPERIMENTAL CROSS SECTION 11.48 ****
SE(1)=223.1D-000; SE(2)=222.0D-000; SE(3)=211.9D-000;
SE(4)=54.27D-000; SE(5)=36.76D-000
SE(6)=25.7D-000; SE(7)=16.78D-000; SE(8)=13.21D-000;
SE(9)=13.21D-000; SE(10)=20.26D-000
SE(11)=32.21D-000; SE(12)=45.95D-000; SE(13)=58.82D-000;
SE(14)=75.46D-000
SE(15)=92.72D-000; SE(16)=97.7D-000; SE(17)=101.1D-000
DE(1)=5.58D-000; DE(2)=5.55D-000; DE(3)=5.3D-000;
DE(4)=1.36D-000; DE(5)=0.92D-000
DE(6)=0.64D-000; DE(7)=0.42D-000; DE(8)=0.33D-000;
DE(9)=0.33D-000; DE(10)=0.51D-000
DE(11)=0.81D-000; DE(12)=1.15D-000; DE(13)=1.47D-000;
DE(14)=1.89D-000
DE(15)=2.32D-000; DE(16)=2.44D-000; DE(17)=2.53D-000
TT(1)=27.64D-000; TT(2)=31.97D-000; TT(3)=36.71D-000;
TT(4)=82.53D-000
TT(5)=90.0D-000; TT(6)=96.03D-000; TT(7)=103.8D-000;
TT(8)=110.55D-000
TT(9)=116.57D-000; TT(10)=125.27D-000; TT(11)=133.48D-
000
TT(12)=140.79D-000; TT(13)=147.21D-000; TT(14)=153.9D-
000
TT(15)=162.14D-000; TT(16)=165.67D-000; TT(17)=166.59D-

```



```

000
NT=17
NT1=NT
NT2=NT
! ***** DO P-3HE ON E=11.48 *****
FP(0)=-88.8D-000; FPI(0)=0.D-000
FP(1)=66.7D-000; FPI(1)=0.D-000
FP(2)=2.5D-000; FPI(2)=0.D-000
FP(3)=1.D-000; FPI(3)=0.D-000
F0(0)=FP(0); F0I(0)=0.D-000
F0(1)=49.4D-000; F0I(1)=0.D-000
F0(2)=2.5D-000; F0I(2)=0.D-000
F0(3)=1.D-000; F0I(3)=0.D-000
FM(0)=FP(0); FMI(0)=0.D-000
FM(1)=44.3D-000; FMI(1)=0.D-000
FM(2)=2.5D-000; FMI(2)=0.D-000
FM(3)=1.D-000; FMI(3)=0.D-000
FS(0)=-84.6D-000; FSI(0)=0.D-000
FS(1)=21.4D-000; FSI(1)=0.D-000
FS(2)=-18.6D-000; FSI(2)=0.D-000
FS(3)=1.D-000; FSI(3)=0.D-000
EPS(1)=11.2D-000
EPS(3)=0.D-000
OPEN (1,FILE=AA)
DO L=1,NT
READ(1,*) TT(L),SE(L),DE(L)
ENDDO
CLOSE(1)
OPEN (1,FILE=BB)
DO I=LN,LV
READ(1,*) FP(I),F0(I),FM(I),FS(I),EPS(I)
ENDDO
CLOSE(1)
! ***** TRANSFORM TO RADIANS *****
DO L=LN,LV,LH
FM(L)=FM(L)*PI/180.0D-000
FP(L)=FP(L)*PI/180.0D-000
F0(L)=F0(L)*PI/180.0D-000

```

```

EPS(L)=EPS(L)*PI/180.0D-000
FMI(L)=FMI(L)*PI/180.0D-000
FPI(L)=FPI(L)*PI/180.0D-000
FOI(L)=FOI(L)*PI/180.0D-000
FS(L)=FS(L)*PI/180.0D-000
FSI(L)=FSI(L)*PI/180.0D-000
EP(L)=EXP(-2.0D-000*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2.0D-000*FMI(L))
EO(L)=EXP(-2.0D-000*FOI(L))
ES(L)=EXP(-2.0D-000*FSI(L))
ENDDO
! *****
FH=FH*PI/180.0D-000
NP=5*LMA+2
IF (NP>(5*LMA+2)) GOTO 9988
DO L=LN,LV,LH
FMI(L)=0
FPI(L)=0
FOI(L)=0
FSI(L)=0
ENDDO
9988 DO I=LMI,LMA,LH
XP(I)=FP(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+LMA+1)=FO(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+2*LMA+1)=FM(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I+3*LMA+1)=FS(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I+4*LMA+2)=EPS(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I+5*LMA+3)=FPI(I)

```

```

ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+6*LMA+4)=F0I(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
XP(I+7*LMA+4)=FMI(I+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
XP(I+8*LMA+4)=FSI(I)
ENDDO
! ***** TRANSFORM TO C.M. *****
EL=11.480D-000
EC=EL*PM/AM1
SK=EC*B1
SS=DSQRT(SK)
GG=3.44476D-002*Z1*Z2*PM/SS
CALL VAR(ST,FH,LMA,NI,XP,EPP,XI,NV)
PRINT *, "          XI-KV=",XI
! ***** TOTAL CROSS SECTION *****
DO I=LMI,LMA,LH
FP(I)=XP(I)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
F0(I+1)=XP(I+LMA+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
FM(I+1)=XP(I+2*LMA+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
FS(I)=XP(I+3*LMA+1)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
EPS(I)=XP(I+4*LMA+2)
ENDDO
F0(0)=FP(0); FM(0)=FP(0)
DO I=LMI,LMA,LH
FPI(I)=XP(I+5*LMA+3)
ENDDO

```

```

DO I=LMI,LMA-1,LH
F0I(I+1)=XP(I+6*LMA+4)
ENDDO
DO I=LMI,LMA-1,LH
FMI(I+1)=XP(I+7*LMA+4)
ENDDO
DO I=LMI,LMA,LH
FSI(I)=XP(I+8*LMA+4)
ENDDO
F0I(0)=FPI(0); FMI(0)=FPI(0)
DO L=LN,LV,LH
EP(L)=EXP(-2.0D-000*FPI(L))
EM(L)=EXP(-2.0D-000*FMI(L))
E0(L)=EXP(-2.0D-000*F0I(L))
ES(L)=EXP(-2.0D-000*FSI(L))
ENDDO
SRT=0.0D-000; SRS=0.0D-000; SST=0.0D-000; SSS=0.0D-
000
DO L=LN,LV,LH
AP=FP(L)
AM=FM(L)
A0=F0(L)
ASS=FS(L)
L1=2*L+3
L2=2*L+1
L3=2*L-1
SRT=SRT+L1*(1.0D-000-EP(L)**2)+L2*(1.0D-000-
E0(L)**2)+L3*(1.0D-000-EM(L)**2)
SRS=SRS+L2*(1.0D-000-ES(L)**2)
SST=SST+L1*EP(L)**2*SIN(AP)**2+L2*E0(L)**2*SIN(A0)*
*2+L3*EM(L)**2*SIN(AM)**2
SSS=SSS+L2*ES(L)**2*SIN(ASS)**2
ENDDO
SRT=10.0D-000*PI*SRT/SK/3.0D-000
SRS=10.0D-000*PI*SRS/SK
SIGR=1.0D-000/4.0D-000*SRS+3.0D-000/4.0D-000*SRT
SST=10*4*PI*SST/SK/3
SSS=10.0D-000*4*PI*SSS/SK

```

```

SIGS=1.0D-000/4.0D-000*SSS+3.0D-000/4.0D-000*SST
PRINT *,"          SIGMS-TOT=",SIGS
PRINT *,"  T    SE    ST    XI"
DO I=1,NT
WRITE(*,2) TT(I),SE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
PRINT *,"  FP    F0    FM    FS    EPS"
DO L=LMI,LMA,LH
FM(L)=FM(L)*180.0D-000/PI
FP(L)=FP(L)*180.0D-000/PI
FMI(L)=FMI(L)*180.0D-000/PI
FPI(L)=FPI(L)*180.0D-000/PI
F0(L)=F0(L)*180.0D-000/PI
F0I(L)=F0I(L)*180.0D-000/PI
FS(L)=FS(L)*180.0D-000/PI
FSI(L)=FSI(L)*180.0D-000/PI
EPS(L)=EPS(L)*180.0D-000/PI
WRITE(*,2) FP(L),F0(L),FM(L),FS(L),EPS(L)
ENDDO
!READ *, A
!IF (A==0) GOTO 1111
!PRINT
!PRINT *,"  T    POL "
!DO I=1,NT
!PRINT *,TT(I);POL(I)
!ENDDO
OPEN (1,FILE=CC)
WRITE(1,*)"  EL    ECM    XI"
WRITE(1,4) EL,EC,XI
WRITE(1,*)"  T          SE          DE          ST
XI"
DO I=1,NT
WRITE(1,3) TT(I),SE(I),DE(I),ST(I),DS(I)
ENDDO
WRITE(1,*)"  FP(L)  F0(L)  FM(L)  FS(L)"
DO L=LN,LV
WRITE(1,2) FP(L),F0(L),FM(L),FS(L),EPS(L)
ENDDO

```

```

CLOSE(1)
OPEN (1,FILE=BB)
DO L=LN,LV
WRITE(1,3) FP(L),F0(L),FM(L),FS(L),EPS(L)
ENDDO
CLOSE(1)
!OPEN (1,FILE=AA)
!DO L=1,NT
!WRITE(1,3) TT(L),SE(L),DE(L)
!ENDDO
!CLOSE(1)
4 FORMAT(3F10.5)
2 FORMAT(5F10.5)
3 FORMAT(4F14.7)
END
SUBROUTINE VAR(ST,PHN,LMA,NI,XP,EP,AMIN,NV)
! ***** ПОИСК ФАЗ *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,LH,NT,NP,NPP,NN,NI,LMA,LMI
DIMENSION XPN(0:50),XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /C/ LH,LMI,NT,PI,NP,NPP
DO I=LMI,NP,LH
XPN(I)=XP(I)
ENDDO
NN=LMI
PH=PHN
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (NV==0) GOTO 3013
DO IIN=1,NI
NN=-LH
PRINT *,ALA,IIN
GOTO 1119
1159 XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
1119 NN=NN+LH
IN=0
2229 A=B
XPN(NN)=XPN(NN)+PH*XP(NN)

```

```

IF (NN<(5*LMA+3)) GOTO 7777
IF (XPN(NN)<0) GOTO 1159
7777 IN=IN+1
CALL DET(XPN,ST,ALA)
B=ALA
IF (B<A) GOTO 2229
C=A
XPN(NN)=XPN(NN)-PH*XP(NN)
IF (IN>1) GOTO 3339
PH=-PH
GOTO 5559
3339 IF (ABS((C-B)/ABS(B))<EP) GOTO 4449
PH=PH/2
5559 B=C
GOTO 2229
4449 PH=PHN
B=C
IF (NN<NP) GOTO 1119
AMIN=B
PH=PHN
ENDDO
3013 AMIN=B
DO I=LMI,NP,LH
XP(I)=XPN(I)
ENDDO
END
SUBROUTINE DET(XP,ST,XI)
! ***** ДЕТЕРМИНАНТ *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,NT
DIMENSION XP(0:50),ST(0:50)
COMMON /B/ SE(0:50),DS(0:50),DE(0:50),NT
S=0.0D-000
CALL SEC(XP,ST)
DO I=1,NT
DS(I)=( (ST(I)-SE(I) )/DE(I) )**2
S=S+DS(I)
ENDDO

```

```

XI=S/NT
END
SUBROUTINE SEC(XP,ST)
! ***** СЕЧЕНИЕ *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,II,L,LN,LV,LH,NT
COMMON /A/ SS,GG,PI,LN,LV,LH,NT,POL(0:50),TT(0:50)
DIMENSION
S0(0:50),P(0:50),P1(0:50),P2(0:50),XP(0:50),ST(0:50),F0(0:50),
FP(0:50),FM(0:50),FS(0:50),EPS(0:50)
DIMENSION
F0I(0:50),FPI(0:50),FMI(0:50),FSI(0:50),EP(0:50),EM(0:50),ES(
0:50),E0(0:50)
DO I=LN,LV,LH
FP(I)=XP(I)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH
II=I+LV+1
F0(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH
II=I+2*LV+1
FM(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV,LH
II=I+3*LV+1
FS(I)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV,LH
II=I+4*LV+2
EPS(I)=XP(II)
ENDDO
F0(0)=FP(0); FM(0)=FP(0)
DO I=LN,LV,LH
II=I+5*LV+3
FPI(I)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH

```



```

II=I+6*LV+4
F0I(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV-1,LH
II=I+7*LV+4
FMI(I+1)=XP(II)
ENDDO
DO I=LN,LV,LH
II=I+8*LV+4
FSI(I)=XP(II)
ENDDO
F0I(0)=FPI(0); FMI(0)=FPI(0)
DO L=LN,LV,LH
EP(L)=DEXP(-2.0D-000*FPI(L))
EM(L)=DEXP(-2.0D-000*FMI(L))
E0(L)=DEXP(-2.0D-000*F0I(L))
ES(L)=DEXP(-2.0D-000*FSI(L))
ENDDO
CALL CULFAZ(GG,S0)
DO I=1,NT
T=TT(I)*PI/180.0D-000
X=DCOS(T)
CALL CULAMP(X,GG,S0,RECUL,AMCUL)
CALL POLLEG(X,LV,P)
CALL FUNLEG1(X,LV,P1)
CALL FUNLEG2(X,LV,P2)
REA=0.0D-000; AMA=0.0D-000; REB=0.0D-000; AMB=0.0D-
000; REC=0.0D-000; AMC=0.0D-000; RED=0.0D-000;
AMD=0.0D-000
REE=0.0D-000; AME=0.0D-000; RRG=0.0D-000; AAG=0.0D-
000; REH=0.0D-000; AMH=0.0D-000; REF=0.0D-000;
AMF=0.0D-000
DO L=LN,LV,LH
FP1=2.0D-000*FP(L)
FM1=2.0D-000*FM(L)
F01=2.0D-000*F0(L)
SL=2.0D-000*S0(L)
C=DCOS(SL)

```

```

S=DSIN(SL)
FS1=2.0D-000*FS(L)
SO=DSIN(EPS(L))**2
CO=DCOS(EPS(L))**2
AL1P=EP(L)*DCOS(FP1)-1.0D-000
AL2P=EP(L)*DSIN(FP1)
AL1M=EM(L)*DCOS(FM1)-1.0D-000
AL2M=EM(L)*DSIN(FM1)
AL10=SO*ES(L)*DCOS(FS1)+CO*E0(L)*DCOS(F01)-1.0D-
000
AL20=SO*ES(L)*DSIN(FS1)+CO*E0(L)*DSIN(F01)
A1=(L+2.0D-000)*AL1P+(2.0D-000*L+1.0D-000)*AL10+(L-
1.0D-000)*AL1M
A2=(L+2.0D-000)*AL2P+(2.0D-000*L+1.0D-000)*AL20+(L-
1.0D-000)*AL2M
REA=REA+(A1*C-A2*S)*P(L)/2.0D-000
AMA=AMA+(A1*S+A2*C)*P(L)/2.0D-000
ALS=CO*ES(L)*DCOS(FS1)+SO*E0(L)*DCOS(F01)-1.0D-000
BS=CO*ES(L)*DSIN(FS1)+SO*E0(L)*DSIN(F01)
RES=(2.0D-000*L+1.0D-000)*(ALS*C-BS*S)
AMS=(2.0D-000*L+1.0D-000)*(ALS*S+BS*C)
B1=(L+1.0D-000)*AL1P+L*AL1M
B2=(L+1.0D-000)*AL2P+L*AL2M
REB=REB+(B1*C-B2*S+RES)*P(L)/2.0D-000
AMB=AMB+(B1*S+B2*C+AMS)*P(L)/2.0D-000
REC=REC+(B1*C-B2*S-RES)*P(L)/2.0D-000
AMC=AMC+(B1*S+B2*C-AMS)*P(L)/2.0D-000
IF (L<1) GOTO 1211
SI2=1.0D-000/2.0D-000*DSIN(2.0D-000*EPS(L))
AL1=SI2*(ES(L)*DCOS(FS1)-E0(L)*DCOS(F01))
AL2=SI2*(ES(L)*DSIN(FS1)-E0(L)*DSIN(F01))
RE1=(2.0D-000*L+1.0D-
000)*(AL2*C+AL1*S)/DSQRT(L*(L+1.0D-000))
AM1=(2.0D-000*L+1.0D-000)*(AL2*S-
AL1*C)/DSQRT(L*(L+1.0D-000))
C1=AL1P-AL1M
C2=AL2P-AL2M
RED=RED+(C2*C+C1*S-RE1)*P1(L)/2.0D-000

```

```

AMD=AMD+(C2*S-C1*C-AM1)*P1(L)/2.0D-000
REE=REE+(C2*C+C1*S+RE1)*P1(L)/2.0D-000
AME=AME+(C2*S-C1*C+AM1)*P1(L)/2.0D-000
D1=(L+2.0D-000)/(L+1.0D-000)*AL1P-(2.0D-000*L+1.0D-
000)/(L*(L+1.0D-000))*AL10-(L-1.0D-000)/L*AL1M
D2=(L+2.0D-000)/(L+1.0D-000)*AL2P-(2.0D-000*L+1.0D-
000)/(L*(L+1.0D-000))*AL20-(L-1.0D-000)/L*AL2M
RRG=RRG+(D2*C+D1*S-RE1)*P1(L)/2.0D-000
AAG=AAG+(D2*S-D1*C-AM1)*P1(L)/2.0D-000
REH=REH+(D2*C+D1*S+RE1)*P1(L)/2.0D-000
AMH=AMH+(D2*S-D1*C+AM1)*P1(L)/2.0D-000
1211 IF (L<2) GOTO 2122
F1=1.0D-000/(L+1.0D-000)*AL1P-(2.0D-000*L+1.0D-
000)/(L*(L+1.0D-000))*AL10+AL1M/L
F2=1.0D-000/(L+1.0D-000)*AL2P-(2.0D-000*L+1.0D-
000)/(L*(L+1.0D-000))*AL20+AL2M/L
REF=REF+(F2*C+F1*S)*P2(L)/2.0D-000
AMF=AMF+(F2*S-F1*C)*P2(L)/2.0D-000
2122 ENDDO
RET=0.0D-000; AMT=0.0D-000; RES=0.0D-000; AMS=0.0D-
000
DO L=LN,LV,LH
SL=2.0D-000*S0(L)
C=DCOS(SL)
S=DSIN(SL)
FS1=2.0D-000*FS(L)
ALS=ES(L)*DCOS(FS1)-1.0D-000
BS=ES(L)*DSIN(FS1)
RES=RES+(2.0D-000*L+1.0D-000)*(BS*C+ALS*S)*P(L)
AMS=AMS+(2.0D-000*L+1.0D-000)*(BS*S-ALS*C)*P(L)
ENDDO
RES=RECU+RES
AMS=AMCU+AMS
REA=RECU+REA
AMA=AMCU+AMA
REB=RECU+REB
AMB=AMCU+AMB
AA=REA**2+AMA**2

```

```

BB=REB**2+AMB**2
CC=REC**2+AMC**2
DD=RED**2+AMD**2
EE=REE**2+AME**2
FF=REF**2+AMF**2
HH=REH**2+AMH**2
GGG=RRG**2+AAG**2
SUM=AA+BB+CC+DD+EE+GGG+HH+FF
S=10.0D-000*SUM/2.0D-000/SS**2/4.0D-000
ST(I)=S
! POL(I) = - 2*(REA*REE+AMA*AME+REB*REH
+AMB*AMH+REC*RRG+AMC*AAG+RED*REF+AMD*AM
F)/SUM
ENDDO
END
SUBROUTINE CULAMP(X,GG,S0,RECU,AMCU)
! ***** КУЛОНОВСКАЯ АМПЛИТУДА *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
DIMENSION S0(0:50)
A=2.0D-000/(1.0D-000-X)
S00=2.0D-000*S0(0)
BB=-GG*A
AL=GG*DLOG(A)+S00
RECU=-BB*DSIN(AL)
AMCU=BB*DCOS(AL)
END
SUBROUTINE POLLEG(X,L,P)
! ***** ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L
DIMENSION P(0:50)
P(0)=1.0D-000; P(1)=X
DO I=2,L
P(I)=(2.0D-000*I-1.0D-000)*X/I*P(I-1)-(I-1.0D-000)/I*P(I-2)
ENDDO
END
SUBROUTINE FUNLEG1(X,L,P)
! ***** ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА *****

```

```

IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L
DIMENSION P(0:50)
P(0)=0.0D-000; P(1)=DSQRT(DABS(1.0D-000-X**2))
DO I=2,L
P(I)=(2.0D-000*I-1.0D-000)*X/(I-1.0D-000)*P(I-1)-I/(I-1.0D-
000)*P(I-2)
ENDDO
END
SUBROUTINE FUNLEG2(X,L,P)
! ***** ФУНКЦИЯ ЛЕЖАНДРА *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L
DIMENSION P(0:50)
P(0)=0.0D-000; P(1)=0.0D-000; P(2)=3.0D-000*DABS(1.0D-
000-X**2)
DO I=3,L
P(I)=(2.0D-000*I-1.0D-000)*X/(I-2.0D-000)*P(I-1)-(I+1.0D-
000)/(I-2.0D-000)*P(I-2)
ENDDO
END
SUBROUTINE CULFAZ(G,F)
! ***** КУЛОНОВСКИЕ ФАЗЫ *****
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,N
DIMENSION F(0:50)
C=0.577215665D-000; S=0.0D-000; N=50
A1=1.202056903D-000/3.0D-000; A2=1.036927755D-000/5.0D-
000
DO I=1,N
A=G/I-DATAN(G/I)-(G/I)**3/3.0D-000+(G/I)**5/5.0D-000
S=S+A
ENDDO
FAZ=-C*G+A1*G**3-A2*G**5+S
F(0)=FAZ
DO I=1,20
F(I)=F(I-1)+DATAN(G/(I))
ENDDO

```

END

С такими же фазами, как в предыдущем случае [180,181] и без учета смешивания получаем по этой программе тот же результат, который приведен первым в качестве контрольного счета для предыдущей программы с $\chi^2 = 7.375\text{E-}001$:

$$\chi^2 = 7.375\text{E-}001$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
27.64000	223.10000	229.15944	1.17923
31.97000	222.00000	222.68747	.01534
36.71000	211.90000	211.14558	.02026
82.53000	54.27000	53.52241	.30217
90.00000	36.76000	36.24893	.30859
96.03000	25.70000	25.46703	.13250
103.80000	16.78000	16.16202	2.16494
110.55000	13.21000	12.59755	3.44437
116.57000	13.21000	13.11973	.07482
125.27000	20.26000	19.96234	.34064
133.48000	32.21000	32.33282	.02299
140.79000	45.95000	46.97500	.79443
147.21000	58.82000	61.38791	3.05158
153.90000	75.46000	76.51701	.31277
162.14000	92.72000	93.06232	.02177
165.67000	97.70000	98.82336	.21196
166.59000	101.10000	100.15680	.13898

δ_p	δ_0	δ_m	δ_s	ε
-88.800	-88.800	-88.800	-84.600	0.000
66.700	49.400	44.300	21.400	0.000
2.500	2.500	2.500	-18.600	0.000

Введение смешивания в P волне, как это было сделано в работах [180,181], позволяет лучше описать сечения упругого рассеяния при тех же фазах [180,181]

$$\chi^2 = 2.93\text{E-}001$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
27.640	223.100	228.038	0.783
31.970	222.000	221.732	0.002
36.710	211.900	210.383	0.082
82.530	54.270	54.215	0.002
90.000	36.760	36.966	0.050
96.030	25.700	26.151	0.497
103.800	16.780	16.739	0.010
110.550	13.210	13.031	0.295
116.570	13.210	13.394	0.310
125.270	20.260	19.972	0.400
133.480	32.210	32.075	0.028
140.790	45.950	46.482	0.214
147.210	58.820	60.704	1.642
153.900	75.460	75.656	0.011
162.140	92.720	92.029	0.089
165.670	97.700	97.733	0.000
166.590	101.100	99.054	0.654

δ_p	δ_0	δ_m	δ_s	ε
-88.800	-88.800	-88.800	-84.600	0.000
66.700	49.400	44.300	21.400	11.200
2.500	2.500	2.500	-18.600	0.000

Полученное среднее значение χ^2 несколько меньше, приведенной в работах [180,181] величины 0.45. Вычисления [180,181] выполнялись в начале-середине 60-х годов прошлого века на сравнительно простых вычислительных машинах и, по-видимому, при сравнительно не высокой точности, что вполне может привести к такому небольшому различию результатов для χ^2 . Кроме того, в настоящих расчетах, возможно, использовались несколько другие значения констант, например, $\hbar^2/m_0$ и масс частиц, а округление приводимых в статьях [180,181] фаз до второго знака после запятой также может оказать влияние на величину χ^2 . Поэтому вполне можно считать, что в приведенных контрольных счетах получено приемлемое согласие величины χ^2 с результатами работ [180,

181].

Для сравнения приведем результаты при тех же фазах и параметре смешивания, которые были получены в нашей предыдущей работе [17] для программ на языке Turbo Basic при среднем $\chi^2 = 0.29$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
27.64	223.10	228.04	0.78
31.97	222.00	221.73	0.00
36.71	211.90	210.38	0.08
82.53	54.27	54.22	0.00
90.00	36.76	36.97	0.05
96.03	25.70	26.15	0.49
103.80	16.78	16.74	0.01
110.55	13.21	13.03	0.29
116.57	13.21	13.39	0.31
125.27	20.26	19.97	0.32
133.48	32.21	32.07	0.03
140.79	45.95	46.48	0.21
147.21	58.82	60.70	1.64
153.90	75.46	75.66	0.01
162.14	92.72	92.03	0.09
165.67	97.70	97.73	0.00
166.59	101.10	99.05	0.66

И здесь результаты с точностью до ошибок округления совпадают между собой и не зависят от языка программирования.

Если выполнить детальное варьирование фаз рассеяния и параметра смешивания ε , то в результате примерно 10 000 итераций получим, что для лучшего описания имеющихся экспериментальных данных требуется практически нулевое смешивание

$$\chi^2 = 2.25\text{E-}001$$

θ	σ_e	σ_t	χ^2_i
27.640	223.100	224.736	0.086

31.970	222.000	221.181	0.022
36.710	211.900	211.217	0.017
82.530	54.270	53.839	0.100
90.000	36.760	36.717	0.002
96.030	25.700	26.025	0.259
103.800	16.780	16.736	0.011
110.550	13.210	13.072	0.175
116.570	13.210	13.423	0.415
125.270	20.260	19.927	0.427
133.480	32.210	31.953	0.101
140.790	45.950	46.328	0.108
147.210	58.820	60.562	1.405
153.900	75.460	75.570	0.003
162.140	92.720	92.043	0.085
165.670	97.700	97.791	0.001
166.590	101.100	99.123	0.611

δ_p	δ_0	δ_m	δ_s	ε
-83.342	-83.342	-83.342	-97.861	0.000
52.520	50.021	50.444	44.905	-0.00017
3.222	0.122	2.667	-19.114	0.000

По-видимому, можно считать, что вводить смешивание для наилучшего описания имеющихся экспериментальных данных не требуется, хотя точка при 147° , как и в случае расчетов по предыдущей программе с $\chi^2 = 2.27\text{E-}001$, описывается сравнительно плохо, хотя средние χ^2 практически совпадают. Заметим, что изменение параметра смешивания ε в любую сторону приводит к заметному подъему среднего χ^2 , заметно ухудшая описание используемых экспериментальных данных.

Заметим, что приведенные в этом параграфе результаты непосредственно относятся к проверке работоспособности компьютерных программ, написанных на основе известных методов расчета дифференциальных сечений, а не к получению новых результатов по фазовому анализу упругого $p^3\text{He}$ рассеяния [17]. Новые результаты для фазового анализа в

системе частиц со спином $1/2 + 1/2$ приведены в следующем параграфе для $p^{13}\text{C}$ системы.

2.5.3 Система частиц $p^{13}\text{C}$ с полуцелым спином и спин-орбитой

The $p^{13}\text{C}$ system with spin $1/2$ and spin-orbit interaction

Рассмотрим теперь систему $p^{13}\text{C}$ частиц при низких энергиях, которой соответствуют спины $1/2 + 1/2$. При энергиях ниже $0.5 \div 1$ МэВ отклонение измеренного дифференциального сечения от резерфордской величины вполне может характеризоваться только одной точкой при определенном значении угла рассеяния и заданной энергии. Такое отклонение, как это будет показано далее, вполне однозначно описывается одной триплетной S фазой рассеяния даже в области резонанса в системе $p^{13}\text{C}$.

На основе этих представлений в [183,184] было выполнено измерение дифференциальных сечений, а именно, функций возбуждения для упругого $p^{13}\text{C}$ рассеяния при энергиях от 0.25 до 0.75 МэВ. Измерения сечений при каждой энергии проводились только при одном угле рассеяния, и для разных энергий использовалось четыре значения углов. Эти данные мы используем далее для выполнения фазового анализа упругого $p^{13}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях и определения резонансной формы триплетной 3S_1 фазы при энергии 0.55 МэВ.

На основе проверенных в предыдущем параграфе компьютерных программ со спин-орбитальным смешиванием, был выполнен фазовый анализ экспериментальных данных по дифференциальным сечениям упругого $p^{13}\text{C}$ рассеяния (функциям возбуждения) в диапазоне энергий $300 \div 750$ кэВ (л.с.), приведенных в [183,184]. В результате фазового анализа было показано, что синглетная 1S_0 фаза упругого $p^{13}\text{C}$ рассеяния в рассматриваемой области энергий оказалась близка к нулю – ее величина не превышала $2 \div 3$ градуса. Вид триплетной 3S_1 фазы показан ниже на рис.2.5.1, а ее значения

приведены в табл.2.5.1 и 2.5.2. Эта фаза имеет явно выраженный резонанс, который соответствует уровню ядра ^{14}N в кластерном $p^{13}\text{C}$ канале с $J^{\pi}T = 1^{-}1$ при энергии 0.55 МэВ (л.с.) [166].

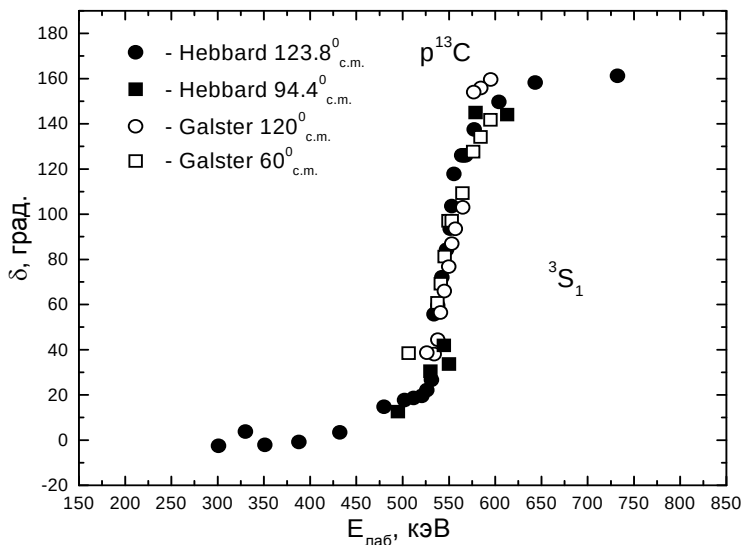


Рис.2.5.1. Триpletная 3S_1 фаза $p^{13}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях. Точки и квадраты – результаты нашего фазового анализа по данным [183] при 94.4° и 123.8° в с.ц.м., кружки и открытые квадраты – результаты нашего фазового анализа по данным [184] при 60° и 120° в с.ц.м.

Далее в табл.2.5.1 приведены результаты фазового анализа экспериментальных данных из работы [183] в области энергий 301-732 кэВ и 495-613 кэВ при двух значениях углов, которые представлены на рис.2.5.1 черными точками и квадратами соответственно.

Табл.2.5.2 содержит результаты фазового анализа экспериментальных данных из [184], которые представлены на рис.2.5.1 кружками (при энергиях 526-595 кэВ) и открытыми квадратами (для энергии 506-595 кэВ). По данным работы [183] извлеченная фаза упругого рассеяния переходит 90°

при энергии 551 кэВ, а для данных [184] это происходит при 557 кэВ.

Табл.2.5.1. Результаты фазового анализа $p^{13}\text{C}$ упругого рассеяния при низких энергиях с учетом 3S_1 фазы по экспериментальным данным [183].

3S_1 фаза получена по данным [183] при 123.8° (ц.м.). Точки на рис.2.5.1.	
$E_{\text{лаб}}, \text{кэВ}$	$^3S_1, \text{град.}$
301	-2,6
330	3,7
351	-2,1
388	-0,8
432	3,4
479,8	14,7
502	17,7
512	18,6
520,8	19,5
526	22,1
531,2	26,7
533,7	55,6
538	59,6
542,4	72,1
547,5	84,2
551,2	93,6
553,1	103,6
555,4	117,8
563,9	126
566	126
568,3	126

577,3	137,5
604	149,7
643,3	158,3
732,1	161,2
³ S ₁ фаза получена по данным [183] при 94.4° (ц.м.). Квадраты на рис.2.5.1.	
<i>E</i> _{лаб} , кэВ	³ S ₁ , град.
495	12,6
530	30,4
544,6	41,9
550	33,7
579	145
613	144

Табл.2.5.2. Результаты фазового анализа р¹³С упругого рассеяния при низких энергиях с учетом ³S₁ фазы по экспериментальным данным [184].

³ S ₁ фаза получена по данным [184] при 120° (ц.м.). Кружки на рис.2.5.1.	
<i>E</i> _{лаб} , кэВ	³ S ₁ , град.
526	38,7
534	38
538	44,4
541	56,5
545	66
549,9	76,7
553	87
557	93,5
565,1	103

576,8	154
584,4	155,8
595,3	159,6
³ S ₁ фаза получена по данным [184] при 60° (ц.м.). Открытые квадраты на рис.2.5.1.	
$E_{\text{лаб}}$, кэВ	³ S ₁ , град.
506,4	38,5
537,8	60,7
541,1	69,2
545,4	81,2
549,5	97
553,1	97
564,7	109,3
576,3	127,6
584,3	134,2
594,9	141,7

Ширина резонанса находится в диапазоне 20÷25 кэВ, что вполне согласуется с результатами работы [166], где приводится величина 23(1) кэВ при энергии резонанса 551 кэВ. Ширина резонанса, извлеченная из экспериментальных данных для триплетной ³S₁ фазы, имеет меньшее, чем в р¹²С рассеянии [161], значение и далее для ее описания потребуются очень узкий потенциал, что должно привести нас к параметру ширины порядка $\beta = 2\div 3 \text{ Фм}^{-2}$ [185].

Однако сравнительно точное извлечение на основе выполненного фазового анализа триплетной S фазы из экспериментальных данных позволяет надеяться на вполне однозначное построение потенциала р¹³С взаимодействия. Резонансная форма фазы при столь малой ширине резонанса позволяет, при построении потенциалов, избежать непрерывной неоднозначности, свойственной оптической модели [88], по-

тому что только вполне определенная ширина потенциала способна правильно описать ее резонансный вид.

В дальнейшем полученные фазы рассеяния используются для построения межкластерных потенциалов взаимодействия [185] и расчетов астрофизического S -фактора радиационного $p^{13}\text{C}$ захвата [186]. Этот процесс входит в CNO-термоядерный цикл, является его второй реакцией и дает, по-видимому, существенный вклад в энергетический выход термоядерных реакций [1,3,170,186,187], приводящих к горению Солнца и звезд нашей Вселенной [168].

Заключение

Conclusion

Таким образом, использованные алгоритмы применения численных методов для нахождения частных решений общей многопараметрической вариационной задачи для функционала χ^2 , который определяет точность описания экспериментальных данных на основе выбранного теоретического представления, позволяет вполне однозначно определять фазы рассеяния ядерных частиц [17].

Использованные методы и алгоритмы позволили получить новые результаты для фазового анализа в упругом $p^3\text{He}$, $p^6\text{Li}$, $p^{12}\text{C}$, $n^{12}\text{C}$, $p^{13}\text{C}$ и $^4\text{He}^4\text{He}$, $^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеянии при любых, в том числе, астрофизических энергиях. Найденные, таким образом, фазы рассеяния хорошо описывают экспериментальные сечения упругого рассеяния, определяя, тем самым, положение некоторых низколежащих резонансных уровней рассматриваемых в этих каналах атомных ядер.

Полученные здесь фазы рассеяния применяются в дальнейшем для построения межкластерных потенциалов взаимодействия, которые могут быть использованы для расчетов полных сечений фотопроцессов и астрофизических S -факторов при сверхнизких или тепловых энергиях [9,14,15, 168,188].

III. ТРЕХТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Three-body model

В настоящее время нет точной теории, которая объясняла бы все свойства атомных ядер. Поэтому для описания структуры ядер используются различные модели, каждая из которых базируется на тех или иных экспериментальных фактах и позволяет объяснить некоторые выделенные свойства ядра [2].

Введение **Introduction**

Ранее в работах [58-63] были подробно рассмотрены возможности трехтельной модели ${}^6\text{Li}$ и показана ее способность описывать почти все наблюдаемые характеристики этого ядра, и продемонстрирована большая степень его кластеризации в ${}^2\text{H}^4\text{He}$ канал. Такой результат вполне может объяснить определенные успехи простых двухкластерных моделей легких ядер с запрещенными состояниями, в частности, ${}^2\text{H}^4\text{He}$ и ${}^3\text{H}^4\text{He}$ моделей ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ [9,12,13,37], в которых получается хорошее описание многих экспериментальных характеристик этих ядер.

В этом разделе будут рассмотрены некоторые наши результаты, полученные для трехчастичной вариационной задачи дискретного спектра с разложением волновой функции по неортогональному гауссовому базису при независимом варьировании всех параметров разложения. Методы решения этой задачи, описанные в первой главе, применяются к рассмотрению некоторых характеристик связанных состояний легких атомных ядер в трехчастичных моделях.

Трехтельная модель, рассмотренных далее легких атомных ядер ${}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ и ${}^{11}\text{B}$, позволяет провести определенную проверку и оценку полученных по фазам рассеяния парных

межкластерных потенциалов. Это дает возможность убедиться в целесообразности их дальнейшего использования для расчетов, связанных с рассмотрением некоторых, в первую очередь, астрофизических характеристик ядерных систем и процессов при низких и сверхнизких энергиях, которые протекают на Солнце, звездах и всей нашей Вселенной [10,12,13,168,189].

3.1 Трехтельные конфигурации ядра ${}^7\text{Li}$ и трехтельная программа

Three-body configuration of ${}^7\text{Li}$ and three-body program

Рассмотрим теперь трехтельную одноканальную кластерную ${}^4\text{He}^2\text{H}$ модель ядра ${}^7\text{Li}$. В любой одноканальной модели возможны три варианта расположения частиц в вершинах треугольника – три возможных канала. Причем, один из таких каналов может иметь наибольшую вероятность существования. Как говорилось в первом разделе, некоторые ядерные характеристики отдельных ядер могут быть обусловлены преимущественно одной кластерной конфигурацией трехкластерной системы при малом вкладе других возможных кластерных структур. В этом случае используемая одноканальная трехкластерная модель позволяет идентифицировать доминирующий кластерный канал и выделить некоторые основные свойства такой ядерной системы, которые им обусловлены.

Кроме того, одноканальная модель заметно проще в численном и программном исполнении, по сравнению с ее многоканальным вариантом. И наконец, для выделения преобладающего кластерного канала и тестирования межкластерных потенциалов требуется рассмотрение именно одноканального варианта трехтельной модели. Далее такие потенциалы могут быть использованы для разнообразных астрофизических приложений, в том числе, при рассмотрении термоядерных процессов на Солнце и Вселенной [168].

3.1.1 Потенциалы и фазы

Potentials and phase shifts

В рассматриваемом варианте расположения частиц будем считать, что в основании треугольника находятся p^2H кластеры (частицы 23) с радиус-вектором относительного расстояния $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{23}$ и орбитальным моментом относительного движения λ , который может принимать значения $1/2$ и $3/2$.

Ядро ${}^4\text{He}$ (частица 1) находится в вершине треугольника и его положение относительно центра масс двухкластерной системы определяется вектором $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(23),1}$ и моментом $\mathbf{l}$. Причем $\mathbf{l} = \mathbf{l}_{12} + \mathbf{l}_{13}$, где $\mathbf{l}_{1i}$ – орбитальные моменты между частицами 1 и i , принимающего значения 2 и 3 (см. рис.3.1.1).

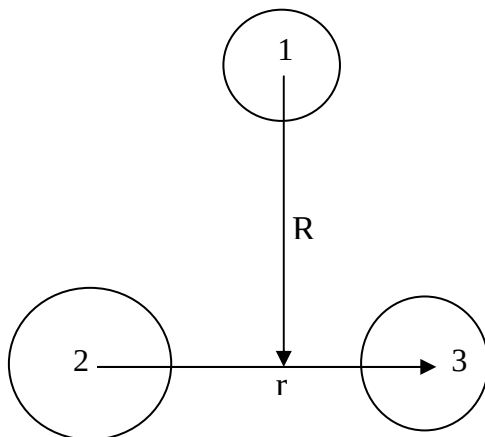


Рис.3.1.1. Векторная схема трехкластерной модели.

Полный спин системы $\mathbf{S} = \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2$ при $S_1 = 0$ может иметь значения $1/2$ и $3/2$, т.е. система p^2H может находиться в дублетном и квартетном спиновом состояниях. Первое из них соответствует основному состоянию ядра трития при $\lambda = 0$ – именно его будем рассматривать далее в используемом здесь одноканальном варианте трехчастичной модели ядра ${}^7\text{Li}$. Полный орбитальный момент системы $\mathbf{L} = \mathbf{l} + \boldsymbol{\lambda}$, равный единице, может быть получен, например, из комбинации $l = 1$ и $\lambda = 0$, которая позволяет рассматривать систему p^2H , как ядро трития [13]. Полный момент $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$ основного состояния ${}^7\text{Li}$, равный $3/2^-$, может быть получен из комбинации $L = 1$ и $S = 1/2$, которая приводит к $J = 1/2$ и $3/2$ с отрицательной четностью. Основному состоянию ядра соответствует момент $J^\pi = 3/2^-$, а первому возбужденному состоянию при энергии 0.478 МэВ момент $1/2^-$.

В качестве парных межкластерных потенциалов выбира-

лись взаимодействия гауссовой формы с отталкивающим ко-
ром (1.2.1), позволяющие правильно передавать соответст-
вующие фазы упругого рассеяния. В паре частиц (13) исполь-
зуется чистый по схемам Юнга $p^4\text{He}$ потенциал для S волны
($l_{13} = 0$) с параметрами, описывающими экспериментальную
фазу [190], как показано на рис.3.1.2.

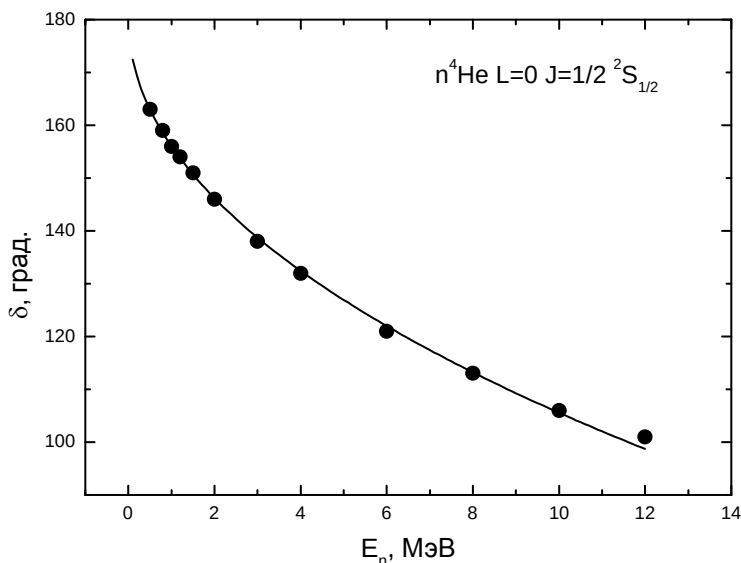


Рис.3.1.2. Фазы упругого $p^4\text{He}$ рассеяния для $L = 0$.
Экспериментальные данные из [190].

В паре (12) использован триплетный P_0 потенциал $^4\text{He}^2\text{H}$ взаимодействия ($l_{12} = 1$), параметры которого в целом уточ-
нялись по трехтельной энергии связи ^7Li , поскольку 3P_0 фазы,
показанные на рис.3.1.3 и полученные в разных работах
[191,192,193,194,195], имеют большую неоднозначность. В
паре частиц (23) взято чистое по орбитальным симметриям
 ^2Hn дублетное S взаимодействие ($l_{23} = \lambda = 0$) с отталкивани-
ем, параметры которого фиксированы по характеристикам
связанного состояния ядра трития, а фазы показаны на
рис.3.1.4 непрерывной линией. Параметры этих потенциалов
приведены в табл.3.1.1.

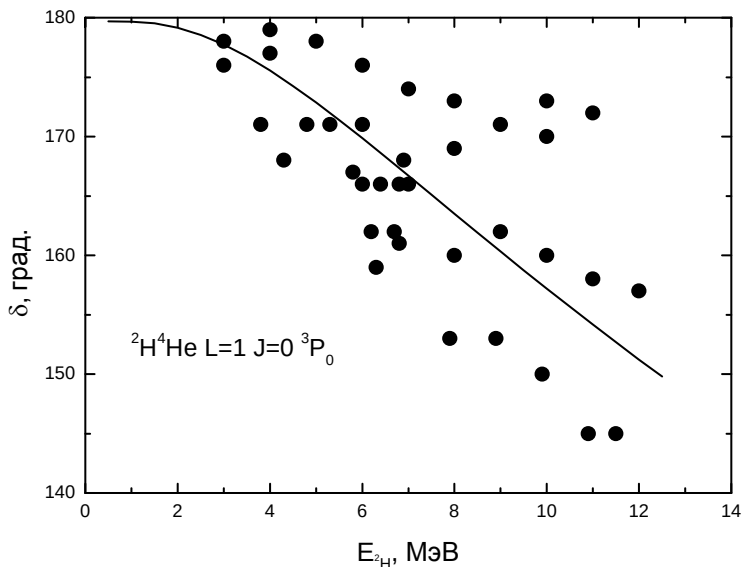


Рис.3.1.3. Фазы упругого ${}^4\text{He}^2\text{H}$ рассеяния для $L = 1$ и $J = 0$.
Экспериментальные данные из [191-195].

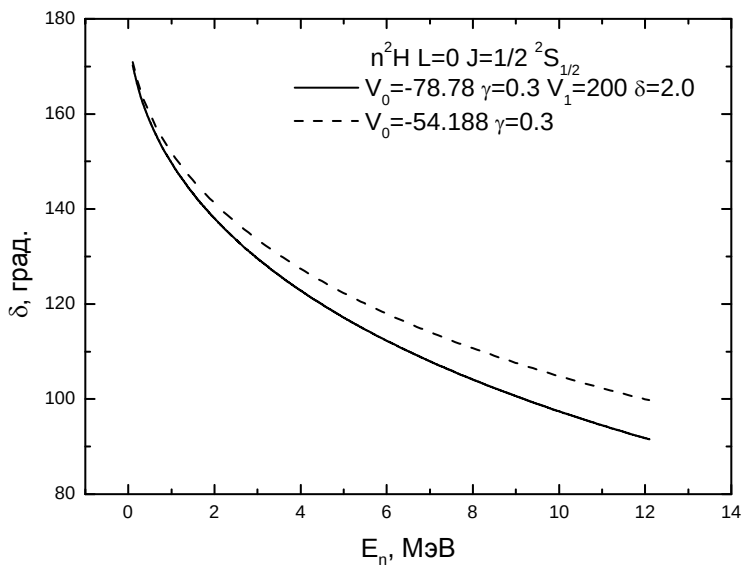


Рис.3.1.4. Фазы упругого $n^2\text{H}$ рассеяния для $L = 0$.

Табл.3.1.1 Параметры межкластерных парных потенциалов взаимодействия.

Пара	Система	$^{2S+1}L_J$	V_0 , МэВ	γ , Фм^{-2}	V_1 , МэВ	δ , Фм^{-2}
12	$^4\text{He}^2\text{H}$	3P_0	-10.0	0.1	72.0	0.2
13	$n^4\text{He}$	$^2S_{1/2}$	-115.5	0.16	500	1.0
23	^2Hn	$^2S_{1/2}$	-78.78	0.3	200	2.0

В каждой паре частиц использовано только одно состояние с определенным орбитальным моментом и один потенциал для заданной парциальной волны и спинowego состояния. Это представляется вполне оправданным, если состояния и потенциалы для остальных парциальных волн (в каждой паре частиц) вносят меньший вклад и приводят только к небольшим поправкам к расчетным характеристикам рассматриваемого ядра. Такую модель можно назвать одноканальной, поскольку учитывается только одного состояние с определенным орбитальным моментом и его взаимодействием в каждой паре частиц.

Характеристики связанного состояния ядра трития с потенциалом из табл.3.1.1 приведены в табл.3.1.2. Для расчетов характеристик трития в ^2Hn канале и ядра ^7Li в трехтельной модели использован радиус протона 0.8768(69) Фм из работы [120], нейтрона – равный нулю, а радиус ^2H принят равным 1.9660(68) Фм [196]. Для радиуса ^4He использована величина 1.671(14) Фм, приведенная в [197].

Табл.3.1.2. Характеристики тритона в $n^2\text{H}$ модели с потенциалом из табл.3.1.1.

Система	$^{2S+1}L_J$	E , МэВ	R_z , Фм	R_m , МэВ	$C_w(R, \text{Фм})$
^2Hn	$^2S_{1/2}$	-6.257	2.17	2.13	2.01(1) (5÷20)

Величина безразмерной асимптотической константы C_w для ^2Hn системы, определение которой дано выражением (1.2.3), также показана в табл.3.1.2. Указанная для C_w ошибка определяется усреднением ее величины по приведенному в

скобках интервалу расстояний. Экспериментальная величина радиуса ^3H по самым современным данным равна 1.7591(363) Фм [198], а его энергия связи в рассматриваемом канале равна -6.257 МэВ [199].

3.1.2 Компьютерная программа Computer program

Приведем текст компьютерной программы для вычисления энергии связи и ВФ ядра ^7Li в трехтельном $^4\text{He}^2\text{Hn}$ канале. Программа основана на вариационном методе с разложением ВФ по неортогональному вариационному базису и независимым варьированием всех параметров разложения, подробно описанном в первом разделе и работе [17], где был приведен вариант этой программы на языке Turbo Basic фирмы Borland.

Для написания текста данной программы использовался современный алгоритмический язык Fortran-90, который в своих основных и используемых здесь возможностях мало отличается от описания последней известной нам версии Fortran-2005. Все параметры и переменные пояснены в распечатке программы или аналогичны, описанным ранее параметрам, для других компьютерных программ.

Например, величина Z с номером всегда обозначает заряд кластера, а его масса обозначается, в данном случае, буквой M с номером, RK и RM с цифрой – зарядовый и массовый радиусы кластеров и т.д.

PROGRAM THREE_BODY_7LI

! Трехтельная программа для ^7Li

IMPLICIT REAL(8) (A-Z)

INTEGER I,J,K,NF, NV, NP,NITER,NP2,IJK,ITER,LA,IA

DIMENSION

FF(0:500000),FU(0:500000),L(0:50,0:50),PH5(0:50)

COMMON /M/

T(0:50,0:50),L1(0:50,0:50),XP(0:50),VN12(0:50,0:50),VN13(0:50,0:50),VN121(0:50,0:50),VN131(0:50,0:50),VN122(0:50,0:50),VN132(0:50,0:50),VN23(0:50,0:50),VN231(0:50,0:50),VN232(0


```
:50,0:50),H(0:50,0:50),SV(0:50),VK12(0:50,0:50),VK13(0:50,0:
50),VK23(0:50,0:50),VCB(0:50,0:50)
COMMON /A/
PM0,R122,PM23,A11,V122,M23,R121,V121,R132,M3,M2,M1
COMMON /B/
R131,V131,HC,R232,V232,R231,V231,PI,A23,A13,A12
COMMON /C/ PVC,EPP,ZYS,V132,PNC,NEV
CHARACTER(9) FILI,FILO
BBB(A,AA,K)=K**2/(2.*K+1.)+(2.*K+3.)*A/AA**2-K
Z1=2.0D-000
Z2=1.0D-000
Z3=0.0D-000
M1=4.0D-000
M2=2.0D-000
M3=1.0D-000
Z=Z1+Z2+Z3
M23=M3+M2
PM23=M3*M2/M23
AM0=M1+M2+M3
PM0=M1*M23/AM0
RK1=1.67D-000
RK2=1.96D-000
RK3=0.0D-000
RM1=1.67D-000
RM2=1.96D-000
RM3=0.877D-000
NF=6000
HF=0.005D-000
BB=1.0D+030
LA=1
HC=0.010D-000
PNC=-10.0D-000
PVC=0.0D-000
A11=41.46860D-000
A12=1.4399750D-000*Z1*Z2
A13=1.4399750D-000*Z1*Z3
A23=1.4399750D-000*Z3*Z2
P1=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)
```

```

PI=DSQRT(P1)
! 1 - AL; 2 - D; 3 - N; L - N-AL - 0, AL-D - 1, N-D - 0
! N-D
V231=-78.78D-000; ! J= 1/2 ; LAM=0 E=6.257 RZ=2.17
! RM=2.13 Cw=2.01(1) 5-20 Fm
R231=0.3D-000
V232=200.0D-000
R232=2.0D-000
! AL-D
V121=-10.0D-000; ! J=0; L=1
R121=0.1D-000
V122=72.0D-000
R122=0.2D-000
! AL-N
V131=-115.5D-000; ! J=1/2; L=0
R131=0.16D-000
V132=500.0D-000
R132=1.0D-000
! -----
NP=10
FIL='ALFAA.DAT'
FILO='ALFA2.DAT'
EP=3.0D-015; ! ТОЧНОСТЬ ЭНЕРГИИ
EPP=2.0D-015; ! ТОЧНОСТЬ ДЕТЕРМИНАНТА
NITER=30; ! ЧИСЛО ИТЕРАЦИЙ
NV=1 ; ! ЕСЛИ =0 - НЕТ ВАРЬИРОВАНИЯ, =1 - ВАРЬИРО-
ВАНИЕ ВСЕХ ПАРАМЕТРОВ
PH=0.00001D-000
IA=1
IF(IA==0) THEN
DO I=1,NP
XP(I)=I/10.0D-000
XP(I+NP)=XP(I)*2.0D-000
ENDDO
ELSE
OPEN (1,FILE=FIL)
READ(1,*)
DO I=1,NP

```

```

READ(1,*) J,XP(I),XP(I+NP)
ENDDO
CLOSE(1)
ENDIF
NP2=2*NP
AAA1: DO ITER=1,NITER
PH55=PH/ITER
50 FMIN=BB
DO IJK=1,NP2
60 PH5(IJK)=XP(IJK)*PH55
XP(IJK)=XP(IJK)+PH5(IJK)
IF (XP(IJK)<0.0D-000) THEN
XP(IJK)=XP(IJK)-PH5(IJK)
GOTO 61
ENDIF
CALL MINIM(NP,F,LA,FIL1)
CC=BB; BB=F
IF(NV==0) GOTO 7654
IF(F<CC)THEN
PRINT*, ITER,IJK,F,ABS(F-CC)
IF (ABS(F-CC)>=EP) GOTO 60
ELSE
XP(IJK)=XP(IJK)-PH5(IJK)
ENDIF
61 ENDDO
PH55=-PH55/2.0D-000
IF (ABS(CC-F)>=EP/2.0D-000) GOTO 50
ENDDO AAA1
7654 PRINT*,
"*****"
PRINT*, "E = ",F
PRINT*
PRINT*, "      N      ALFA      BET"
DO I=1,NP
PRINT*,I,XP(I),XP(I+NP)
ENDDO
PRINT*
899 CONTINUE

```

```

ZYS=1.0D-000
ALA=F
CALL MINIM(NP,ALA,LA,FIL)
!-----НОРМИРОВКА-----
IF (LA==1) THEN
FA=3.; AF=2.
ENDIF
IF (LA==2) THEN
FA=15.; AF=6.
ENDIF
IF (LA<1 .OR. LA>2) STOP
CALL SVNOR(PI,LA,NP,XP,SV)
!-----ПРОВЕРКА НОРМИРОВКИ-----
S=0.0D-000
DO I=1,NP
DO J=1,NP
AL=XP(I)+XP(J)
BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)
DO K=0,NF
R=HF*K
RR=(R**2)*AL
AB=(R**2)*DEXP(-RR)
FF(K)=AB
ENDDO
CALL SIMPS(NF,HF,FF,S1)
DO K=0,NF
R=HF*K
RR=(R**2)*BT
AC=R**(2*LA+2)*DEXP(-RR)
FU(K)=AC
ENDDO
CALL SIMPS(NF,HF,FU,S2)
S=S+SV(I)*SV(J)*S1*S2
ENDDO
ENDDO
SNOR=S
PRINT*
PRINT*, "  NORM =",SNOR,'      NEV-DET = ',NEV

```

```

PRINT*
PRINT*, '      N      SV'
DO I=1,NP
PRINT*, I,SV(I)
ENDDO
6622 CONTINUE
! ***** НОРМИРОВКА *****
BN=LA+1.5
SS=0.
DO I=1,NP
DO J=1,NP
AL=XP(I)+XP(J)
BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)
L(I,J)=1./AL**1.5/BT**BN
SS=SS+SV(I)*SV(J)*L(I,J)
ENDDO
ENDDO
SN=DSQRT(FA*P1/16./2.**LA*SS)
PRINT*
PRINT*, " N = ", SN
! ***** RM *****
S=0.
DO I=1,NP
DO J=1,NP
AL=XP(I)+XP(J)
BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)
S=S+SV(I)*SV(J)/BT**BN/AL**1.5*(3.*PM23/AL+(2.*LA+3.)
*PM0/BT)
ENDDO
ENDDO
RMM=P1*FA*S/2.**((LA+1)/16.
RRR=M1/AM0*RM1**2+M2/AM0*RM2**2+M3/AM0*RM3*
*2+RMM/AM0
RM=DSQRT(RRR)
PRINT*, " RM = ", RM
! ***** RZ *****
CCC=(Z1*M23**2+(Z2+Z3)*M1**2)/AM0**2
DDD=(Z2*M3**2+Z3*M2**2)/M23**2

```

```

EEE=-M1/AM0/M23*(Z2*M3-Z3*M2)
S=0.
SS=0.
SSS=0.
DO I=1,NP
DO J=1,NP
AL=XP(I)+XP(J)
BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)
S=S+SV(I)*SV(J)*(2.*LA+3.)/BT**(LA+2.5)/AL**1.5
SS=SS+SV(I)*SV(J)*3./BT**(LA+1.5)/AL**2.5
SSS=SSS+SV(I)*SV(J)*AF/BT**(LA+2)/AL**2
ENDDO
ENDDO
RMM=FA/2**(LA+1)*P1/16.*(CCC*S+DDD*SS)+EEE*SSS
RRR=Z1/Z*RK1**2+Z2/Z*RK2**2+Z3/Z*RK3**2+RMM/Z
RZ=DSQRT(RRR)
PRINT*, " RZ = ",RZ
! ***** Q *****
QQ=-10.*2./5.*RMM+2.86
PRINT*, " Q = ",QQ
! ***** CONTROL ENERGY *****
SC=0.
SK=0.
SP=0.
SL=0.
S1=0.
S3=0.
S2=0.
SH=0.
DO I=1,NP
DO J=1,NP
S1=S1+SV(I)*SV(J)*VK12(I,J)
S2=S2+SV(I)*SV(J)*VK13(I,J)
S3=S3+SV(I)*SV(J)*VK23(I,J)
SC=SC+SV(I)*SV(J)*VCB(I,J)
SK=SK+SV(I)*SV(J)*T(I,J)
SP=SP+SV(I)*SV(J)*(VN12(I,J)+VN13(I,J)+VN23(I,J))
SL=SL+SV(I)*SV(J)*L1(I,J)

```

```

SH=SH+SV(I)*SV(J)*H(I,J)
ENDDO
ENDDO
SC1=S1*P1/16.0D-000
SC2=S2*P1/16.0D-000
SC3=S3*P1/16.0D-000
SCU=SC1+SC2+SC3
SC=SC*P1/16.0D-000
SK=SK*P1/16.0D-000
SP=SP*P1/16.0D-000
SL=SL*P1/16.0D-000
SH=SH*P1/16.0D-000
ST=SCU+SK+SP+SC
PRINT*
PRINT*, "COUL. ENERGY VK = ",SCU," 12 = ",SC1," 13 =
",SC2," 23 = ",SC3
PRINT*, "CENTROB. ENERGY = ",SC
PRINT*, "KINETICH. ENERGY = ",SK
PRINT*, "M.E. OT L1 = ",SL
PRINT*, "POTENS. ENERGY = ",SP
PRINT*, "POLNAY ENERGY ST = ",ST
PRINT*, "POLNAY ENERGY SH = ",SH
!-----
PRINT*, "???"
READ*, AAA
IF(AAA==0) GOTO 2244
OPEN (1,FILE=FILO)
WRITE(1,*) '      N          ALFA          BETTA'
DO I=1,NP
WRITE(1,*) I,XP(I),XP(I+NP)
ENDDO
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) 'E = ',F
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) 'SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV=',ALA
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) '      N          SV'
DO I=1,NP

```

```

WRITE(1,*) I,SV(I)
ENDDO
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) 'NOR= ',SNOR, SN
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) 'NEV-DET=',NEV
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) "RM=",RM," RZ=",RZ
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) "Q=",QQ
CLOSE(1)
2244 CONTINUE
END
SUBROUTINE SIMPS(N,H,F,S)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,N
DIMENSION F(0:500000)
A=0.0D-000;B=0.0D-000
DO I=1,N-1,2
B=B+F(I)
ENDDO
DO I=2,N-2,2
A=A+F(I)
ENDDO
S=H*(F(0)+F(N)+2.0D-000*A+4.0D-000*B)/3.0D-000
END
SUBROUTINE MINIM(NP,ALA,L,FILO)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER NP, KK, JJ, L, K, I
COMMON /M/
T(0:50,0:50),L1(0:50,0:50),XP(0:50),VN12(0:50,0:50),VN13(0:50,0:50),VN121(0:50,0:50),VN131(0:50,0:50),VN122(0:50,0:50),VN132(0:50,0:50),VN23(0:50,0:50),VN231(0:50,0:50),VN232(0:50,0:50),H(0:50,0:50),SV(0:50),VK12(0:50,0:50),VK13(0:50,0:50),VK23(0:50,0:50),VCB(0:50,0:50)
COMMON /A/
PM0,R122,PM23,A11,V122,M23,R121,V121,R132,M3,M2,M1
COMMON /B/

```



```

R131,V131,HC,R232,V232,R231,V231,PI,A23,A13,A12
COMMON /C/ PVC,EPP,ZYS, V132,PNC,NEV
CHARACTER(9) FILO
BBB(A,AB,K)=(1.*K)**2/(2.*K+1.)+(2.*K+3.)*A/AB**2-
(1.*K)
P1=4.0D-000*DATAN(1.0D-000)
PI=DSQRT(P1)
IF(L==1) THEN
FA=3.; FAA=1.;FFA=1.
ENDIF
IF(L==2) THEN
FA=15.; FAA=3.;FFA=2.
ENDIF
IF(L<1 .OR. L>2) THEN
PRINT*, "STOP"; STOP
ENDIF
A1: DO KK=1,NP
A5: DO JJ=1,NP
AL=XP(KK)+XP(JJ)
AL1=XP(KK)*XP(JJ)
BT=(XP(KK+NP)+XP(JJ+NP))
BT1=XP(KK+NP)*XP(JJ+NP)
H1=FA/2.**L*A11/PM23/BT*BBB(AL1,AL,0)/AL**0.5/BT**
(L+0.5)
H2=FA/2.**L*A11/PM0/AL*BBB(BT1,BT,L)/AL**0.5/BT**
(L+0.5)
T(KK,JJ)=H1+H2
L1(KK,JJ)=FA/2.**L/AL**1.5/BT**(L+1.5)
AA=AL*BT+R121*(AL+BT*(M3/M23)**2)
DD=(M3/M23)**2*R121+AL
VN121(KK,JJ)=FA/2.**L*V121*DD**L/AA**(L+1.5)
AA=AL*BT+R122*(AL+BT*(M3/M23)**2)
DD=(M3/M23)**2*R122+AL
VN122(KK,JJ)=FA/2.**L*V122*DD**L/AA**(L+1.5)
VN12(KK,JJ)=VN121(KK,JJ)+VN122(KK,JJ)
AA=AL*BT+R131*(AL+BT*(M2/M23)**2)
DD=(M2/M23)**2*R131+AL
VN131(KK,JJ)=FA/2.**L*V131*DD**L/AA**(L+1.5)

```

```

AA=AL*BT+R132*(AL+BT*(M2/M23)**2)
DD=(M2/M23)**2*R132+AL
VN132(KK,JJ)=FA/2.**L*V132*DD**L/AA**(L+1.5)
VN13(KK,JJ)=VN131(KK,JJ)+VN132(KK,JJ)
VN231(KK,JJ)=FA/2.**L*V231/BT**(L+1.5)/(AL+R231)**1.5
VN232(KK,JJ)=FA/2.**L*V232/BT**(L+1.5)/(AL+R232)**1.5
VN23(KK,JJ)=VN231(KK,JJ)+VN232(KK,JJ)
VK12(KK,JJ)=2.*FFA*A12/PI/AL**1.5/BT**(L+1)
VK13(KK,JJ)=2.*FFA*A13/PI/AL**1.5/BT**(L+1)
VK23(KK,JJ)=2./2.**L*FA*A23/PI/AL/BT**(L+1.5)
VCB(KK,JJ)=(1.*L)*(1.*L+1.)/2.**L*FAA*A11/AL**1.5/BT**
(L+0.5)/PM0
H(KK,JJ)=T(KK,JJ)+VN23(KK,JJ)+VN12(KK,JJ)+VN13(KK,JJ
)+VCB(KK,JJ)+VK12(KK,JJ)+VK13(KK,JJ)+VK23(KK,JJ)
ENDDO A5
ENDDO A1
CALL MINI(NP,ALA,DETER)
EE=ALA
OPEN (1,FILE=FILO)
WRITE(1,*) '      N          ALFA          BETTA'
DO I=1,NP
WRITE(1,*) I,XP(I),XP(I+NP)
ENDDO
WRITE(1,*)
WRITE(1,*) 'E = ',EE
CLOSE(1)
IF (ZYS==1.0D-000) THEN
CALL VEC(NP,ALA)
CALL SVNOR(PI,L,NP,XP,SV)
ENDIF
END
SUBROUTINE SVNOR(PI,L,NP,XP,SV)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER NP,L,I,J
DIMENSION SV(0:50),XP(0:50),A(0:50,0:50)
IF (L==1) THEN
FA=3.
ENDIF

```

```

IF (L==2) THEN
FA=15.
ENDIF
SS=0.
DO I=1,NP
DO J=1,NP
AL=XP(I)+XP(J)
BT=XP(I+NP)+XP(J+NP)
A(I,J)=1./AL**1.5/BT**(L+1.5)
SS=SS+SV(I)*SV(J)*A(I,J)
ENDDO
ENDDO
ANOR=DSQRT(16.*2.**L/FA/SS)/PI
DO I=1,NP
SV(I)=ANOR*SV(I)
ENDDO
END
SUBROUTINE MINI(NP,COR,D)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER C, NP
COMMON /A/
PM0,R122,PM23,A11,V122,M23,R121,V121,R132,M3,M2,M1
COMMON /B/
R131,V131,HC,R232,V232,R231,V231,PI,A23,A13,A12
COMMON /C/ PVC,EPP,ZYS, V132,PNC,NEV
PN=PNC; PV=PVC; H=HC; E=EPP
IF(PN>PV) THEN
PNN=PV; PV=PN; PN=PNN
ENDIF
A=PN
1 CALL DET(NP,A,D1); B=A+H
2 CALL DET(NP,B,D2)
IF (D1*D2>0.0D-000) THEN
B=B+H; D1=D2
IF (B<=PV .AND. B>=PN) GOTO 2
C=0; RETURN; ELSE
A=B-H; H=H*1.0D-001
IF(ABS(D2)<E .OR. ABS(H)<E) GOTO 3

```

```

B=A+H; GOTO 1
ENDIF
3 C=1; COR=B; D=D2
END
SUBROUTINE DET(NP,LLA,S)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,J,K,NP
DIMENSION
LLL(0:50,0:50),B(0:50,0:50),C(0:50,0:50),AAA(0:50,0:50)
COMMON /M/
T(0:50,0:50),L1(0:50,0:50),XP(0:50),VN12(0:50,0:50),VN13(0:5
0,0:50),VN121(0:50,0:50),VN131(0:50,0:50),VN122(0:50,0:50),
VN132(0:50,0:50),VN23(0:50,0:50),VN231(0:50,0:50),VN232(0
:50,0:50),H(0:50,0:50),SV(0:50),VK12(0:50,0:50),VK13(0:50,0:
50),VK23(0:50,0:50),VCB(0:50,0:50)
COMMON /A/
PM0,R122,PM23,A11,V122,M23,R121,V121,R132,M3,M2,M1
COMMON /B/
R131,V131,HC,R232,V232,R231,V231,PI,A23,A13,A12
COMMON /C/ PVC,EPP,ZYS, V132,PNC,NEV
DO I=1,NP
DO J=1,NP
LLL(I,J)=(H(I,J)-LLA*L1(I,J))
B(I,J)=0.0D-000
C(I,J)=0.0D-000
ENDDO
ENDDO
GOTO 234
PRINT*, "           МАТРИЦА LLL=H-E*L1"
PRINT*
DO II=1,NP
DO KK=1,NP
PRINT*, LLL(II,KK)
ENDDO
PRINT*
ENDDO
234 CONTINUE
! ---- LLLL - РАЗЛОЖЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНЫЕ -----

```

```

DO I=1,NP
C(I,I)=1.0D-000
B(I,1)=LLL(I,1)
C(1,I)=LLL(1,I)/B(1,1)
ENDDO
DO I=2,NP
DO J=2,NP
S=0.0D-000
IF (J>I) GOTO 1
DO K=1,I-1
S=S+B(I,K)*C(K,J)
ENDDO
B(I,J)=LLL(I,J)-S
GOTO 2
1 S=0.0D-000
DO K=1,I-1
S=S+B(I,K)*C(K,J)
ENDDO
C(I,J)=(LLL(I,J)-S)/B(I,I)
2 CONTINUE
ENDDO
ENDDO
! - - - - - ПРОВЕРКА РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ LLL - - - - -
SS=0.0D-000
DO I=1,NP
DO J=1,NP
S=0.0D-000
DO K=1,NP
S=S+B(I,K)*C(K,J)
ENDDO
AAA(I,J)=S-LLL(I,J)
SS=SS+AAA(I,J)
ENDDO
ENDDO
NEV=SS
GOTO 678
PRINT*, "          ДЛЯ ДЕТЕРМИНАНТА N=LLL-B*C =0"
DO I=1,NP

```

```

PRINT*
DO J=1,NP
PRINT*,AAA(I,J)
ENDDO
ENDDO
PRINT*
678 CONTINUE
S=1.0D-000
DO K=1,NP
S=S*B(K,K)
ENDDO
GOTO 991
PRINT 22, LLA,S,SS
PRINT*, "    DET=",S
PRINT*, "    NEV=",SS
991 CONTINUE
22 FORMAT(3E15.5)
END
SUBROUTINE VEC(NP,LLA)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,J,K,J1,I1,NP
DIMENSION
LLL(0:50,0:50),D(0:50),Y(0:50),B(0:50,0:50),AD(0:50,0:50),X(0:50),C(0:50,0:50),E2(50)
COMMON /M/
T(0:50,0:50),L1(0:50,0:50),XP(0:50),VN12(0:50,0:50),VN13(0:50,0:50),VN121(0:50,0:50),VN131(0:50,0:50),VN122(0:50,0:50),VN132(0:50,0:50),VN23(0:50,0:50),VN231(0:50,0:50),VN232(0:50,0:50),H(0:50,0:50),SV(0:50),VK12(0:50,0:50),VK13(0:50,0:50),VK23(0:50,0:50),VCB(0:50,0:50)
COMMON /A/
PM0,R122,PM23,A11,V122,M23,R121,V121,R132,M3,M2,M1
COMMON /B/
R131,V131,HC,R232,V232,R231,V231,PI,A23,A13,A12
COMMON /C/ PVC,EPP,ZYS, V132,PNC,NEV
DO I=1,NP
DO J=1,NP
LLL(I,J)=(H(I,J)-LLA*L1(I,J))

```

```

B(I,J)=0.0D-000
C(I,J)=0.0D-000
ENDDO
ENDDO
DO I=1,NP-1
DO J=1,NP-1
AD(I,J)=LLL(I,J)
ENDDO
ENDDO
I1=1
I2=NP-1
J=NP
DO I=I1,I2
D(I)=-LLL(I,J)
ENDDO
NP=NP-1
CALL TRI(NP,AD,B,C,SOB)
! -----
Y(1)=D(1)/B(1,1)
DO I=2,NP
S=0.0D-000
DO K=1,I-1
S=S+B(I,K)*Y(K)
ENDDO
Y(I)=(D(I)-S)/B(I,I)
ENDDO
X(NP)=Y(NP)
DO I=NP-1,1,-1
S=0.0D-000
DO K=I+1,NP
S=S+C(I,K)*X(K)
ENDDO
X(I)=Y(I)-S
ENDDO
DO I=1,NP
SV(I)=X(I)
ENDDO
NP=NP+1

```

```

SV(NP)=1
S=0.0D-000
DO I=1,NP
S=S+SV(I)**2
ENDDO
!PRINT*, 'S=', S
SS=0.0D-000
DO I=1,NP
SV(I)=SV(I)/DSQRT(ABS(S))
! SS=SS+SV(I)**2
ENDDO
!AN=1.0D-000/DSQRT(ABS(SS))
!AN=1.0D-000
!PRINT*, "                H*SV-LA*L*SV=0"
SSS=0.0D-000
DO I=1,NP
S=0.0D-000
SS=0.0D-000
DO J=1,NP
!SV(J)=SV(J)*AN
S=S+H(I,J)*SV(J)
SS=SS+LLA*L1(I,J)*SV(J)
ENDDO
E2(I)=S-SS
SSS=SSS+E2(I)
ENDDO
LLA=SSS
!DO I=1,NP
!PRINT*, "E2 = ",E2(I)
!ENDDO
PRINT*
PRINT*, '                SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV =' ,LLA
END
SUBROUTINE TRI(NP,AD,B,C,S)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,J,K,NP
DIMENSION
AD(0:50,0:50),B(0:50,0:50),C(0:50,0:50),AAA(0:50,0:50)

```



```

DO I=1,NP
C(I,I)=1.0D-000
B(I,1)=AD(I,1)
C(1,I)=AD(1,I)/B(1,1)
ENDDO
DO I=2,NP
DO J=2,NP
S=0.0D-000
IF (J>I) GOTO 551
DO K=1,I-1
S=S+B(I,K)*C(K,J)
ENDDO
B(I,J)=AD(I,J)-S
GOTO 552
551 S=0.0D-000
DO K=1,I-1
S=S+B(I,K)*C(K,J)
ENDDO
C(I,J)=(AD(I,J)-S)/B(I,I)
552 CONTINUE
ENDDO
ENDDO

```

! -----

```

SS=0.0D-000
DO I=1,NP
DO J=1,NP
S=0.0D-000
DO K=1,NP
S=S+B(I,K)*C(K,J)
ENDDO
AAA(I,J)=S-AD(I,J)
SS=SS+AAA(I,J)
ENDDO
ENDDO
GOTO 578
PRINT*, "
DO I=1,NP
DO J=1,NP

```

NEV = AD - B*C =0"

```

PRINT*,AAA(I,J)
ENDDO
ENDDO
578 S=1.0D-000
DO K=1,NP
S=S*B(K,K)
ENDDO
! GOTO 9753
! PRINT*, "          DET=",S
!PRINT*,S
PRINT*, "          NEV-TRI=",SS
!PRINT*,SS
9753 PRINT*
END
SUBROUTINE WW(SK,L,GK,R,N,H,WH)
IMPLICIT REAL(8) (A-Z)
INTEGER I,L,N,NN
DIMENSION V(50000)
H=H
N=N
SS=DSQRT(ABS(SK))
AA=GK/SS
BB=L
NN=500
HH=.02D-000
ZZ=1+AA+BB
AAA=1.0D-000/ZZ
NNN=2000
DO I2=1,NNN
AAA=AAA*I2/(ZZ+I2)
ENDDO
GAM=AAA*NNN**ZZ
RR=R
CC=RR*SS*2
DO I=0,NN
TT=HH*I
V(I)=TT**(AA+BB)*(1+TT/CC)**(BB-AA)*DEXP(-TT)
ENDDO

```

```
CALL SIMPS(NN,HH,V,S)
WH=S*DEXP(-CC/2.0D-000)/(CC**AA*GAM)
END
```

3.1.3 Трехтельные результаты Three-body results

Приведем теперь результаты счета по этой программе для ядра ${}^7\text{Li}$ при рассмотренном выше варианте трехтельной конфигурации для девяти членов разложения волновой функции (1.5.4) по гауссоидам

E = -8.7165 04042795002

N	ALFA (α)	BETTA (β)
1	2.695013648564534E-001	5.552519454982658E-002
2	6.073846174799727E-002	5.582211053901705E-002
3	1.481076486508074E-001	1.500571262902319E-001
4	1.219211094860576E-001	2.100593191345530E-001
5	1.583008396850423E-001	6.443497149569889E-001
6	1.572092636709496E-001	6.485407339616155E-001
7	2.048327219956353E-001	5.160938755052593E-001
8	2.920843757329559E-001	3.970902201955188E-001
9	1.185843962546213	7.762432248877493E-002

SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV = -3.048700181196296E-011
 NORM = 9.99999999986114E-001
 NEV-DET = -9.947598300641403E-014

N	SV
1	-2.006282287524374E-002
2	-1.041690910372422E-002
3	-1.956124177741528E-001
4	1.721055580493311E-001
5	-33.347719101844450
6	31.786460544316070
7	2.111064771161292
8	-5.187214457242435E-001
9	4.082610488279214E-002

$$RM = 2.771546765454730$$

Для десяти членов разложения ВФ по гауссойдам получаем

$$E = -8.7176\ 07265169926$$

N	ALFA	BET
1	2.667953617399743E-001	5.601125106169563E-002
2	5.941262333765297E-002	5.493848544738812E-002
3	1.393163512886810E-001	1.556109489548065E-001
4	1.235101199700397E-001	1.918288577203961E-001
5	1.584363057560162E-001	6.454611171440240E-001
6	1.578191661203245E-001	6.479935485451310E-001
7	2.037134087039333E-001	5.101654896420405E-001
8	2.707874198704808E-001	4.030486689121375E-001
9	1.211284751587861	7.694488373218295E-002
10	4.678503078478220	7.811004516393501E-002

$$NEV-TRI = 3.979039320256561E-013$$

$$SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV = -3.541195364720196E-009$$

$$NORM = 9.99999999949636E-001$$

$$NEV-DET = 3.836930773104541E-013$$

N	SV
1	2.090487646994713E-002
2	9.678149889880678E-003
3	2.816715670580448E-001
4	-2.562071190446284E-001
5	65.304218586437270
6	-63.510565912605150
7	-2.554362633383337
8	7.253463724545455E-001
9	-4.040198847629709E-002
10	8.813225618937962E-004

$$NN = 9.99999999997704E-001$$

$$RM = 2.792145900219183$$

$$RZ = 2.517493303959341$$

$$Q = -35.515670530665620$$

COUL. ENERGY VK = 7.722608537158121E-001
 12 = 7.722608537158121E-001
 13 = 0.000000000000000E+000
 23 = 0.000000000000000E+000
 CENTROB. ENERGY = 1.906186930356347
 KINETICH. ENERGY = 15.485397205276890
 M.E. OT L1 = 9.99999999985132E-001
 POTENS. ENERGY = -26.881452254540800
POLNAY ENERGY ST = -8.717607265191750
POLNAY ENERGY SH = -8.717607265145604

Как видно, результаты для разных N практически совпадают – их отличие составляет величину порядка 1 кэВ, что демонстрирует насыщение процесса сходимости расчетной трехтельной энергии. Для сравнения приведем экспериментальное значение трехтельной энергии связи -8.724 МэВ ядра ${}^7\text{Li}$ [200]. Она отличается от полученной выше энергии только на $6 \div 7$ кэВ.

Для массового и зарядового радиусов получены величины 2.79 Фм и 2.52 Фм. Последняя из них оказывается заметно больше экспериментальных данных 2.39(3) Фм и 2.35(10) Фм [200]. Однако здесь, как и раньше [13], использовался ${}^2\text{H}$ потенциал, приводящий к завышенному радиусу трития (см. табл.3.1.2), что могло повлиять и на радиус самого ядра ${}^7\text{Li}$. Заметим, что современный радиус дейтрона, равный 2.1402(28) Фм [120], и ядра ${}^4\text{He}$ 1.6753(28) Фм [198], также несколько больше использованных здесь величин 1.97 Фм и 1.67 Фм [121-123,196].

Тем самым дейтронный кластер нужно деформировать, как в ядре трития, так и в ${}^7\text{Li}$, поскольку в свободном состоянии дейтрон очень "рыхлая" система. Для того чтобы получить правильный зарядовый радиус ядра ${}^7\text{Li}$, равный 2.39(3) Фм необходимо уменьшить радиус дейтронного кластера, также как это было сделано раньше для ядра трития [13] и принять его примерно равным 1.4 Фм. Нужно отметить, что наиболее современные значения зарядового радиуса ядра ${}^7\text{Li}$ равны 2.4017(281) Фм [198] или 2.4173(280) Фм, как приведено в работе [201]. Однако эти результаты были получены

нами еще в конце 90-х годов прошлого века [87], поэтому здесь использовались несколько более старые значения всех радиусов.

Для квадрупольно момента ядра ${}^7\text{Li}$ в проведенных выше расчетах получена величина -35.5 мб, которая не намного меньше известных данных -40.7(8) мб [200] и -36.6(3) мб [145]. В распечатке результатов расчета приведены нормировки NORM и NN волновой функции, полученные двумя разными способами и равные в обоих случаях единице с высокой степенью точности. Точность, с которой определяются собственные вектора, не менее 10^{-8} , а невязки триангуляризации NEV-TRI и вычисления детерминанта NEV-DET находятся на уровне $10^{-12} \div 10^{-13}$.

В рассмотренной конфигурации расположения кластеров имеется возможность варьирования параметров P_0 потенциала в ${}^4\text{He}^2\text{H}$ канале из-за больших ошибок в фазах упругого рассеяния. Эта возможность позволила нам скомпенсировать неучет других орбитальных конфигураций, т.е. одноканальность модели, и получить правильную энергию связи ядра. В тоже время, именно эта конфигурация явно выделяет ${}^4\text{He}^3\text{H}$ структуру ядра ${}^7\text{Li}$, которая имеет наибольшую вероятность существования [11,13]. Поэтому дополнительное варьирование параметров P_0 потенциала позволило уточнить энергию связи ${}^7\text{Li}$, приведя ее в хорошее соответствие с экспериментальной величиной.

В заключение этого параграфа обратим внимание на строки

$$\begin{aligned} E &= -8.7176\ 0726\ 51\ 69926 \\ \text{POLNAY ENERGY ST} &= -8.7176\ 0726\ 51\ 91750 \\ \text{POLNAY ENERGY SH} &= -8.7176\ 0726\ 51\ 45604 \end{aligned}$$

которые показывают трехкратную энергию связи ядра ${}^7\text{Li}$ в приведенных выше распечатках. Разница в численных значениях этой энергии показывает точность, с которой она определяется разными методами, и которая составляет порядок $\varepsilon \sim 10^{-10}$ МэВ.

3.2 Трехтельная модель ядра ${}^9\text{Be}$ Three-body model of ${}^9\text{Be}$

Перейдем теперь к рассмотрению ядра ${}^9\text{Be}$ в трехтельной кластерной ${}^4\text{He}{}^3\text{H}^2\text{H}$ модели. Будем считать, что в основании треугольника из трех частиц находятся ${}^3\text{H}^2\text{H}$ кластеры (частицы 23) с орбитальным моментом относительного движения $\lambda = 0$ и спином $1/2$, т.е. рассматривается только дублетное состояние этих кластеров. Ядро ${}^4\text{He}$ (частица 1) находится в вершине треугольника и его положение относительно центра масс двухкластерной системы определяется орбитальным моментом l .

Полный спин системы трех частиц считается равным $1/2$, а орбитальный момент $L = l + \lambda$, равный 1, может быть получен, например, из комбинации $l = 1$ и $\lambda = 0$ ($l = l_{\alpha t} + l_{\alpha d}$). Здесь предполагается, что именно эта орбитальная конфигурация доминирует в рассматриваемой ${}^4\text{He}{}^3\text{H}^2\text{H}$ модели, т.е. также рассматривается одноканальная трехтельная модель этого ядра. При такой конфигурации кластеров полный момент системы $J = L + S$ равен $3/2^-$ и $1/2^-$, первый из которых соответствует ОС ядра ${}^9\text{Be}$.

3.2.1 Потенциалы и фазы рассеяния Potentials and scattering phase shifts

В расчетах использованы бинарные межкластерные потенциалы для ${}^4\text{He}{}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He}{}^2\text{H}$ систем с отталкивающим кором и запрещенным состоянием в ${}^3\text{H}^2\text{H}$ канале обычного вида (1.2.1). Параметры межкластерных парных потенциалов приведены в 1÷6 столбцах табл.3.2.1. В седьмом столбце табл.3.2.1 приведены каналные энергии связи ${}^4\text{He}{}^3\text{H}$ системы в ядре ${}^7\text{Li}$ и ${}^4\text{He}{}^2\text{H}$ канала в ${}^6\text{Li}$, в восьмом – среднеквадратичные зарядовые радиусы связанных состояний этих пар частиц и в девятом – безразмерные асимптотические константы связанных состояний в двухчастичных каналах, найденные с функцией Уиттекера (1.2.3).

Табл.3.2.1. Параметры потенциалов в бинарных кластерных системах и основные характеристики связанных состояний.

Сис- тема	$^{2S+1}L_J$	V_0 , МэВ	γ , ФМ^{-2}	V_1 , МэВ	δ , ФМ^{-2}	E , МэВ	R_z , ФМ	C_w
1	2	3	4	5	6	7	8	9
$^4\text{He}^3\text{H}$	$^2P_{1/2}$	-85.82	0.13	90.0	0.2	-1.989	2.6	3.86(1)
$^3\text{H}^2\text{H}$	$^2S_{1/2}$	-44.5887	0.15	4.5	0.015	—	—	—
$^4\text{He}^2\text{H}$	3S_1	-71.91	0.15	70.0	0.2	-1.474	2.66	3.27(1)

Параметры потенциалов подобраны таким образом, чтобы максимально точно воспроизвести соответствующие экспериментальные фазы упругого рассеяния, которые показаны на рис.3.2.1, 3.2.2 и 3.2.3. В качестве потенциалов кластерной $^3\text{H}^2\text{H}$ системы использованы чистые по схемам Юнга взаимодействия [37], а результаты расчета фаз с таким потенциалом показаны на рис.3.2.1 непрерывной линией.

Пунктиром на рис.3.2.1 приведена полоса ошибок определения чистых $^3\text{H}^2\text{H}$ фаз [37], которая получается из экспериментальных данных различных исследований, описанных в работе [202]. Точки и квадраты показывают извлеченные из экспериментальных данных фазы рассеяния, также приведенные в работе [202], а кружками и открытыми квадратами приведены МРГ (метод резонирующих групп) вычисления фаз рассеяния [203].

Такой $^4\text{He}^2\text{H}$ потенциал с периферическим отталкиванием содержит связанное запрещенное состояние при энергии - 11.49 МэВ. Отметим, что нам не удалось найти другие параметры потенциала, т.е. без связанного запрещенного уровня, с которыми можно было бы описать чистую дублетную $^2S_{1/2}$ фазу упругого $^3\text{H}^2\text{H}$ рассеяния.

Именно такая форма взаимодействия с очень небольшим уточнением глубины $^3\text{H}^2\text{H}$ потенциала на 0.0887 МэВ, предварительно фиксированного по фазам рассеяния [13], позволяет получить правильную величину трехтельной энергии

связи ядра ${}^9\text{Be}$. Таким образом, глубина этого потенциала изменялась для наилучшего описания энергии связи ${}^9\text{Be}$ в трехтельном канале, и это изменение составило всего 0.0877 МэВ.

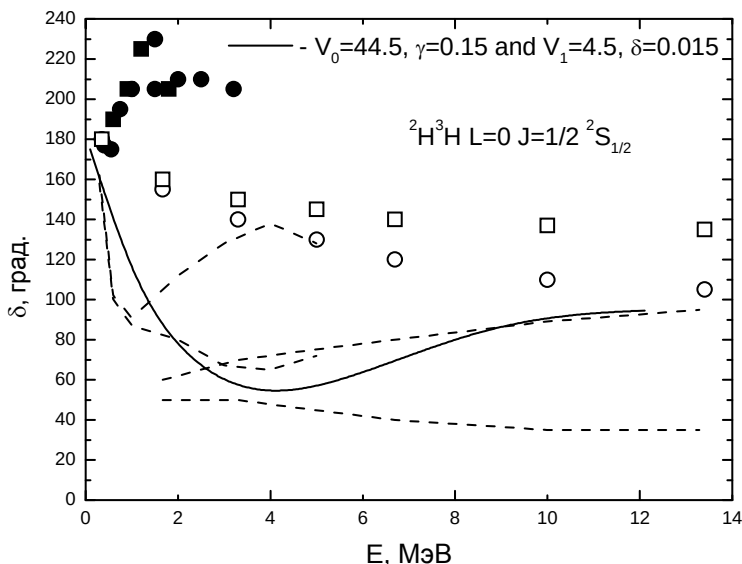


Рис.3.2.1. Чистые фазы упругого ${}^3\text{H}^2\text{H}$ рассеяния для S волны. Непрерывная линия – результаты расчета фазы с потенциалом из табл.3.2.1, пунктиром приведена полоса ошибок определения чистых фаз [37], которая получается из данных экспериментальной работы [202]. Точки и квадраты – извлеченные из экспериментальных данных фазы рассеяния [202]. ружки и открытые квадраты – МРГ вычисления фаз рассеяния [203].

Для ${}^4\text{He}^3\text{H}$ системы использован потенциал первого возбужденного ${}^2P_{1/2}$ состояния без запрещенного связанного уровня, фаза которого показана непрерывной линией на рис.3.2.2. Такой потенциал хорошо описывает фазу рассеяния [204,205] и приводит, по-видимому, к наилучшему описанию характеристик связанного состояния ядра ${}^9\text{Be}$ в трехчастичной модели.

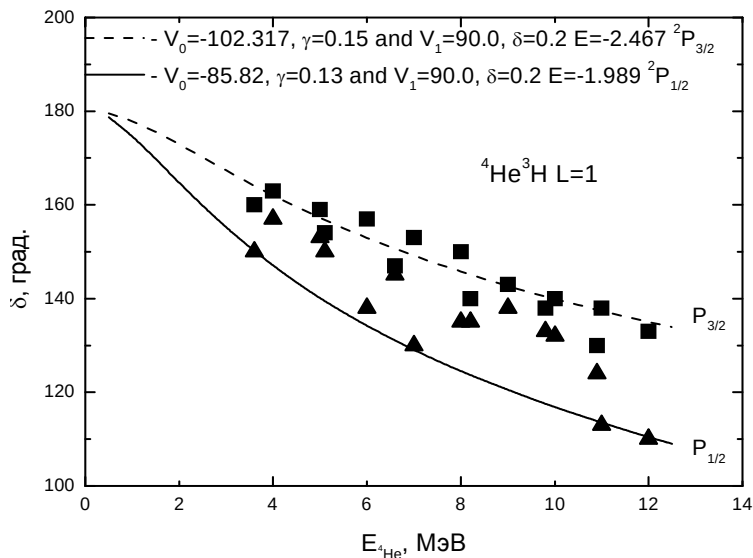


Рис.3.2.2. Фазы упругого ${}^4\text{He}^3\text{H}$ рассеяния для P волны. Треугольники и квадраты – извлеченные из экспериментальных данных фазы рассеяния [204,205].

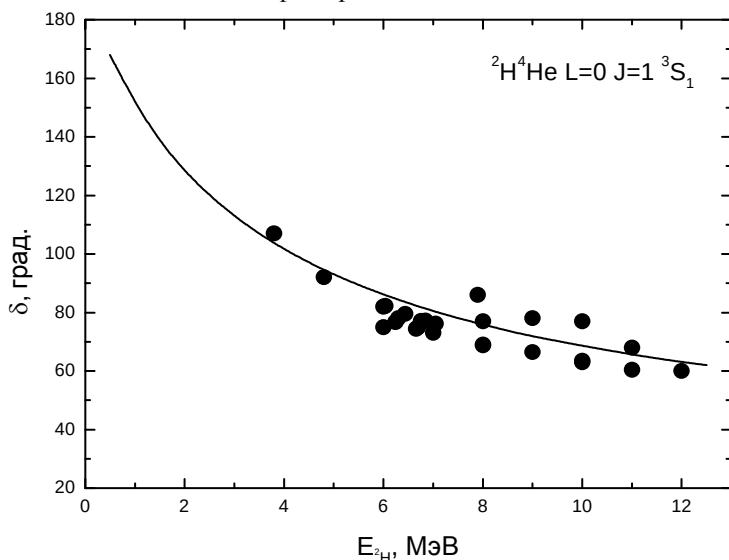


Рис.3.2.3. Фазы упругого ${}^4\text{He}^2\text{H}$ рассеяния при $L = 0$. Экспериментальные данные из [191-195].

Тем самым, исходя из этих результатов, следует считать, что кластерная ${}^4\text{He}^3\text{H}$ система находится внутри ядра ${}^9\text{Be}$ в виртуальном возбужденном ${}^2P_{1/2}$ состоянии, а не на основном ${}^2P_{3/2}$ уровне. Возможно, в будущем этот результат можно будет проверить другими, независимыми методами или подходами.

Потенциал в ${}^4\text{He}^2\text{H}$ системе наилучшим образом описывает характеристики связанного состояния ядра ${}^6\text{Li}$, приведенные в табл.3.2.1, и не имеет ЗС, а качество описания 3S_1 фазы рассеяния [191-195] показано на Рис.3.2.3 непрерывной линией.

3.2.2 Трехтельные результаты и фотосечения Three-body results and photo cross sections

Приведем часть компьютерной программы, которая описана в предыдущем параграфе этого раздела и задает характеристики кластеров и парных потенциалов:

```
! -----
Z1=2.0D-000
Z2=1.0D-000
Z3=1.0D-000
M1=4.0D-000
M2=3.0D-000
M3=2.0D-000
...
RK1=1.670D-000
RK2=1.70D-000
RK3=1.960D-000
RM1=1.670D-000
RM2=1.70D-000
RM3=1.960D-000
...
! 1 - AL; 2 - T; 3 - D;  L - AL-T - 1, AL-D -0, D-T - 0
! D-T
V231=-44.5887D-000    ; ! J= 1 ; L=0
R231=0.150D-000
```

V232=4.50D-000
R232=0.0150D-000

! AL-D

V131=-71.90D-000 ; ! J=1/2 ; L=0
R131=.150D-000
V132=70.0D-000
R132=0.20D-000

! AL-T

V121=-85.820D-000 ; ! J=1/2 ; L=1
R121=.130D-000
V122=90.0D-000
R122=0.20D-000

! -----

С описанными выше парными межкластерными потенциалами найдена трехтельная волновая функция, параметры и коэффициенты разложения которой при $N = 10$ даны в табл.3.2.2 и 3.2.3, энергия связи ядра ${}^9\text{Be}$, нормировка ВФ *Nor* и его зарядовый радиус R_z , которые приведены в табл.3.2.4. Как видно из этих таблиц, полученные характеристики ядра ${}^9\text{Be}$ хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными, а нормировка трехтельной ВФ практически равна единице.

Табл.3.2.2. Параметры α_i и β_i разложения трехтельной волновой функции (1.5.4) ядра ${}^9\text{Be}$ в трехтельной модели.

I	α_i	β_i
1	3.273095667111755E-001	8.983828859473847E-002
2	3.172872902170442	1.207723068311927E-001
3	1.844963898289113E-001	5.507018219497912E-002
4	9.153345511558431E-002	1.025123206313353E-001
5	2.213721392830491E-001	3.620573882275837E-001
6	2.269904002428514E-001	4.017242168731691E-001

7	1.985961231123472E-001	1.634388187790707E-001
8	5.073985961415315E-001	4.769549654021469E-001
9	5.124708157837092E-001	4.828596792375761E-001
10	3.843254062764651E-001	2.094550079909185E-001

Табл.3.2.3. Коэффициенты C_i разложения трехтельной волновой функции (1.5.4) ядра ${}^9\text{Be}$ в трехтельной модели.

i	C_i
1	2.564677848067949E-002
2	-2.825587985872606E-003
3	3.379570860934880E-003
4	1.204452338550613E-002
5	-6.029327933110736E-001
6	4.606318693160417E-001
7	1.677085370227155E-001
8	-3.310475484431805
9	3.189208283959322
10	1.415768198190696E-001

Табл.3.2.4. Некоторые характеристики ядра ${}^9\text{Be}$ в трехтельной кластерной модели.

Хар-ки	Расчет	Эксперимент
E , МэВ	-19.1632	-19.1633 [206]
R_z , Фм	2.56	2.519(12) [206]
Nor	9.99999999999867E-001	

Как уже говорилось, для достижения лучшего согласия расчетной трехтельной энергии ${}^9\text{Be}$ с экспериментом [206], поскольку имеются большие ошибки и неопределенности в ${}^3\text{H}^2\text{N}$ фазовом анализе, приводящие к неоднозначностям по-

строения чистых фаз, глубина этого потенциала несколько варьировалась. Первоначальная глубина притягивающей части, с которой рассчитывалась фаза рассеяния, приведенная на рис.3.2.1, равна $V_0 = -44.5$ МэВ, а для поиска трехтельной энергии связи использовалось несколько большее значение $V_0 = -44.5887$ МэВ. На фазы упругого рассеяния такие изменения глубины потенциала влияния практически не оказывают.

На рис.3.2.4а, 3.2.4б показано сравнение радиальных функций ${}^3\text{H}+{}^6\text{Li}$ относительного движения построенных в ${}^4\text{He}^4\text{He}$ и ${}^4\text{He}^3\text{H}^2\text{H}$ моделях соответственно. Использование потенциалов с отталкиванием в одноканальной ${}^4\text{He}^3\text{H}^2\text{H}$ модели ${}^9\text{Be}$ приводит нас к безузловой $1P$ ВФ относительного движения. В то же время, ${}^4\text{He}^4\text{He}$ модель, построенная с парными потенциалами глубокого притяжения, содержащими ЗС, дает узловую $3P$ волновую функцию.

Сплошная кривая на рис.3.2.4а соответствует результирующей волновой функции. Полученные таким образом двухтельных волновые функции ${}^3\text{H}+{}^6\text{Li}$ канала использованы далее в расчетах сечений фоторазвала ядра ${}^9\text{Be}(\gamma, {}^3\text{H}){}^6\text{Li}$ [207], которые представлены на рис.3.2.5а,б вместе с экспериментальными данными работы [208].

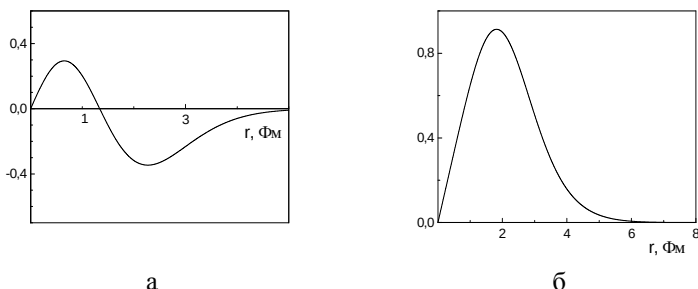


Рис.3.2.4. Радиальные функции относительного движения кластеров в канале ${}^6\text{Li}+{}^3\text{H}$ ядра ${}^9\text{Be}$.
а – ${}^4\text{He}^4\text{He}$ модель и б – ${}^4\text{He}^3\text{H}^2\text{H}$ модель.

Следует отметить, что рассчитанная в этих двух моделях

форма сечения фоторазвала практически не отличается, хотя и имеет некоторые количественные расхождения. Это вполне объясняется схожестью «хвоста» двух различных волновых функций на больших расстояниях, что, в свою очередь, приводит к подобности результатов при рассматриваемых, сравнительно малых энергиях процесса фоторазвала ${}^9\text{Be}$ в двух-частичный ${}^3\text{H}{}^6\text{Li}$ канал.

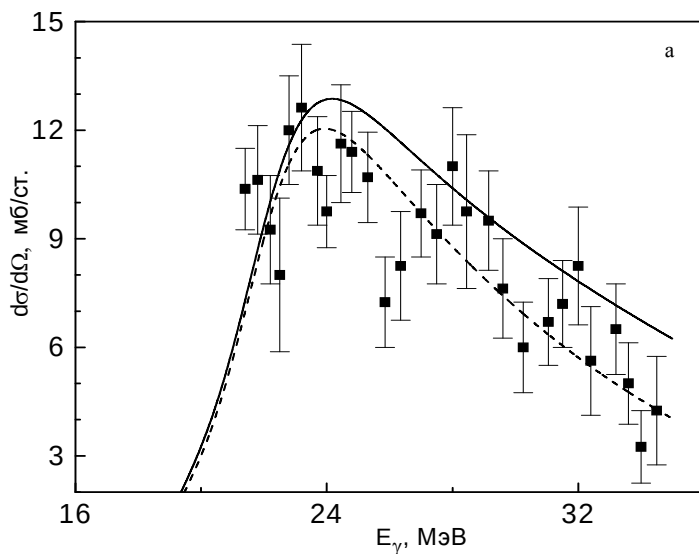


Рис.3.2.5а. Дифференциальные сечения процесса ${}^9\text{Be}(\gamma, {}^3\text{H}){}^6\text{Li}$. Квадраты – эксперимент [208]. Теоретический расчет для $n{}^4\text{He}{}^4\text{He}$ модели. Пунктир – дипольный $E1$ переход, сплошная кривая – суммарное сечение.

Таким образом, в рамках рассматриваемых вариационных методов, получены новые результаты для трехтельной ${}^4\text{He}{}^3\text{H}{}^2\text{H}$ кластерной модели ядра ${}^9\text{Be}$ [207]. В таких расчетах использован неортогональный вариационный базис, независимое варьирование всех параметров разложения ВФ по гауссоидам, межкластерные потенциалы, чистые в некоторых случаях по схемам Юнга и согласованные с фазами упругого рассеяния в двухчастичных системах.

Как видно, именно используемые варианты потенциалов взаимодействия между кластерами приводят к правильной энергии связи ядра ${}^9\text{Be}$, описанию некоторых других его характеристик в трехтельном кластерном канале и разумному объяснению экспериментальных дифференциальных сечений рассмотренной реакции фоторазвала ядра ${}^9\text{Be}$ в двухчастичный ${}^3\text{H}{}^6\text{Li}$ канал.

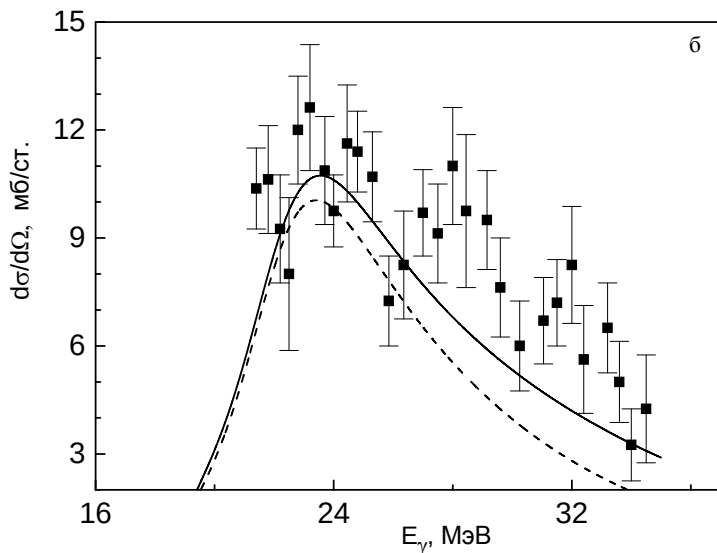


Рис.3.2.56. Дифференциальные сечения процесса ${}^9\text{Be}(\gamma, {}^3\text{H}){}^6\text{Li}$. Квадраты – эксперимент [208]. Теоретический расчет для ${}^4\text{He}{}^3\text{H}{}^2\text{H}$ модели. Пунктир – дипольный $E1$ переход, сплошная кривая – суммарное сечение.

Дальнейшее развитие теоретических исследований в этом направлении требует решения трехтельной задачи со связью каналов, т.е. учета различных возможных парциальных волн в каждом двухтельном плече трехчастичной системы [207]. Однако, рассмотренный здесь одноканальный подход вполне позволяет правильно получить сечение процесса фоторазвала в области низких энергий. Поэтому вполне естественно в дальнейшем выполнить расчеты и при энергиях γ -

кванта стремящихся к нулю. Тем самым рассматривать область астрофизических энергий, которые представляют интерес для задач ядерной астрофизики и термоядерных процессов во Вселенной.

3.3 Трехкластерная структура ^{11}B Three-body structure of ^{11}B

Рассмотрим теперь возможность использования трехтельной модели для следующего нечетного легкого атомного ядра ^{11}B , которое можно представить трехтельной $^4\text{He}^4\text{He}^3\text{H}$ структурой. Момент основного состояния ^{11}B равен $3/2^-$ и может быть образован при $\lambda = 0$ и $l = 1$, поскольку момент ^4He равен нулю, а ^3H имеет полуцелый спин $1/2$. В используемой модели основание треугольника по-прежнему состоит из частиц 2 и 3, которыми в данном случае являются две α -частицы с нулевым относительным моментом λ . Орбитальный момент l , равный 1, может быть получен из комбинации $l_{12} = 1$ и $l_{13} = 1$. Напомним, что здесь $l = l_{12} + l_{13}$, а моменты l_{12} и l_{13} это орбитальные моменты между частицами 12 и 13, причем частицей 1, находящейся в вершине треугольника, является ядро ^3H .

В качестве межкластерных потенциалов будут использованы $^4\text{He}^3\text{H}$ взаимодействия в основном $^2P_{3/2}$ состоянии ядра ^7Li . Здесь предполагается, что именно эта орбитальная конфигурация доминирует в рассматриваемой одноканальной $^4\text{He}^4\text{He}^3\text{H}$ модели. Конечно, в многоканальном варианте такой трехтельной модели возможен вклад, например, конфигураций $l_{12} = 1$ и $l_{13} = 0$ или $l_{12} = 0$ и $l_{13} = 1$, которые также приводят к $l = 1$.

Напомним (п.п.1.6), что в проведенных расчетах, как и ранее, при каждом значении вариационных параметров α_i и β_i , которые варьируются независимо друг от друга, находим некоторую энергию системы E , которая дает ноль детерминанта, а затем, изменяя эти параметры, проводим поиск минимума трехтельной энергии E , которая является собственной энергией вариационной задачи. Затем увеличиваем размерность базиса N и повторяем все вычисления, до тех пор, пока величина собственного значения, т.е. энергия связи E_N , при очередной размерности базиса N не станет отличаться от предыдущего значения E_{N-1} на величину ϵ , которая обычно задается на уровне $1.0 \div 2.0$ кэВ. Эта минимальная энергия и

будет реальной энергией связи трехчастичной системы, т.е. энергией связи ядра в такой модели. Причем размерность гауссова базиса обычно не превышает $10 \div 12$ [16].

3.3.1 Потенциалы и фазы Potentials and phase shifts

В настоящих расчетах для ${}^4\text{He}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He}^4\text{He}$ систем использованы бинарные межкластерные потенциалы с отталкивающим кором (1.2.1), параметры которых приведены в табл.3.3.1. Фазы рассеяния, соответствующие таким потенциалам, показаны на рис.3.2.2 и 3.3.1 штриховыми линиями. Экспериментальные данные для упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния взяты из работ [128,130,209,210].

Табл.3.3.1. Параметры парных межкластерных потенциалов.

Система	${}^{2S+1}L_J$	V_0 , МэВ	γ , Фм^{-2}	V_1 , МэВ	δ , Фм^{-2}
${}^4\text{He}^4\text{He}$	1S_0	-204.0	0.2025	500.0	0.36
${}^4\text{He}^3\text{H}$	${}^2P_{3/2}$	-102.317	0.15	90.0	0.2

Энергия связи ${}^7\text{Li}$ в ${}^4\text{He}^3\text{H}$ канале с потенциалом из табл.3.3.1 и целыми значениями масс частиц -2.467 МэВ точно совпадает с экспериментальной величиной [200]. Зарядовый радиус равен 2.40 Фм, а асимптотическая константа на интервале $7 \div 16$ Фм имеет значение $C_w = 3.57(1)$ [13,89]. В качестве зарядового и массового радиуса тритона принималась величина 1.70 Фм, а для ${}^4\text{He}$ 1.67 Фм [121-123]. Напомним, что одно из наиболее современных значений зарядового радиуса ядра ${}^7\text{Li}$ равно 2.4017(281) Фм [198].

Для асимптотической двухчастичной константы основного ${}^2P_{3/2}$ состояния ${}^4\text{He}^3\text{H}$ системы в ядре ${}^7\text{Li}$, например, в работе [211] с уиттекеровской асимптотикой (1.2.3), учитывая кулоновские эффекты [17], получено, при пересчете к безразмерной величине (1.2.3) с $k_0 = 0.453 \text{ Фм}^{-1}$ [14], следующее значение: 3.87(16). В работе [212] для ОС, также после пересчета к безразмерной величине, приведено 3.73(26),

что вполне согласуется с полученными здесь результатами. Такой пересчет значений требуется, поскольку в указанных работах использовалась несколько другая форма определения асимптотических констант, а именно:

$$\chi_L(r) = C_w W_{-\eta L+1/2}(2k_0 r)$$

На рис.3.3.1 непрерывной линией показана 1S_0 фаза упругого $^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния с потенциалом Али-Бодмера (параметры даны на рис.3.3.1), который приводит к несколько заниженной трехтельной энергии связи $^4\text{He}^4\text{He}^3\text{H}$ системы в ядре ^{11}B . Требуется немного, примерно на 7%, увеличить глубину его притягивающей части (см. табл.3.3.1) для того чтобы получить практически правильную величину энергии связи, сходимость которой от числа членов разложения волновой функции показана в табл.3.3.2.

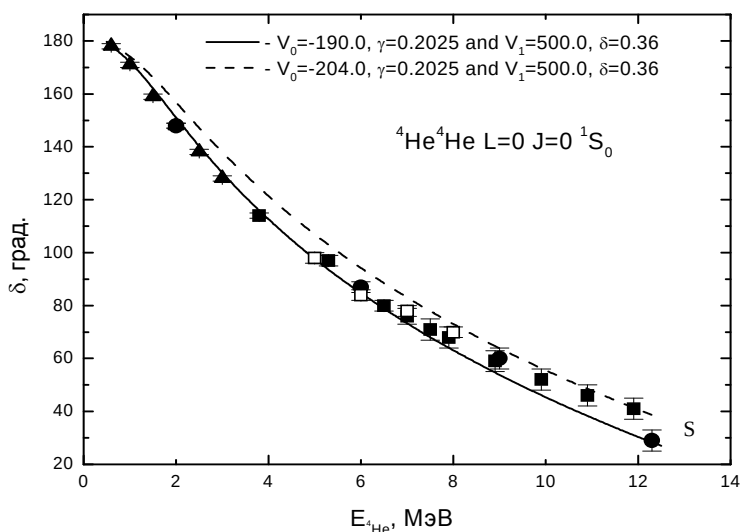


Рис.3.3.1. Фазы $^4\text{He}^4\text{He}$ упругого рассеяния при $L = 0$.

Непрерывной линией показан результат для потенциала Али-Бодмера [209], штриховой – для его модифицированного варианта из табл.3.3.1. Экспериментальные данные взяты из работ: [209] – ●, [128] – ▲, [210] – □, [130] – ■.

Табл.3.3.2. Сходимость трехтельной энергии связи E ядра ^{11}B в зависимости от числа гауссoid N в разложении ВФ.

Экспериментальная величина энергии связи ^{11}B в этом канале равна -11.131 МэВ [213].

N	4	6	8	10	12
E , МэВ	-10.832	-10.985	-11.070	-11.072	-11.079

Фаза такого потенциала показана на рис.3.3.1 штриховой кривой и идет несколько выше извлеченных из эксперимента фаз упругого $^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния. Необходимость изменения глубины $^4\text{He}^4\text{He}$ потенциала, возможно, связана с одноканальностью используемой здесь модели, в которой учитывается только одна допустимая орбитальная конфигурация с межкластерным $^2P_{3/2}$ потенциалом связанного $^4\text{He}^3\text{H}$ состояния при $l = 1$ для $l_{12} = 1$ и $l_{13} = 1$, параметры которого приведены в табл.3.3.1. Учет других $^4\text{He}^3\text{H}$ конфигураций также с $l = 1$, но при $l_{12} = 1$ и $l_{13} = 0$ или $l_{12} = 0$ и $l_{13} = 1$, по-видимому, мог бы увеличить трехтельную энергию связи, и изменять глубину $^4\text{He}^4\text{He}$ потенциала не потребовалось.

3.3.2 Трехтельные результаты Three-body results

3.3.2.1 Первый вариант межкластерных потенциалов First variant of intercluster potentials

Приведем часть программы, полностью распечатанной в пп.3.1.2, в которой записаны характеристики кластеров и потенциалы их взаимодействия:

```
! -----
Z1=1.0D-000
Z2=2.0D-000
Z3=2.0D-000
M1=3.0D-000
M2=4.0D-000
```

M3=4.0D-000

...

RK1=1.7D-000

RK2=1.67D-000

RK3=1.670D-000

RM1=1.7D-000

RM2=1.67D-000

RM3=1.670D-000

...

! 1 - T; 2 - AL; 3 - AL; L - AL1-AL2 - 0, AL1-T - 1, AL2-T - 1

! AL-AL

V231=-204.0D-000 ; ! J= 0 ; LAM=0

R231=0.45D-000**2

V232=500.0D-000

R232=0.6D-000**2

! AL-T

V131=-102.317D-000 ; ! J=3/2; L=1

R131=0.15D-000

V132=90.0D-000

R132=0.2D-000

! AL-T

V121=V131 ; ! J=3/2; L=1

R121=R131

V122=V132

R122=R132

! -----

Параметры и коэффициенты разложения волновой функции ${}^4\text{He}{}^3\text{He}^3\text{H}$ системы для $N = 10$ в ядре ${}^{11}\text{B}$ приведены ниже в самой распечатке, а результаты для энергии показаны в табл.3.3.2

E = -11.072136455745790 (N = 10)

N	ALFA	BET
1	7.731577265613154E-002	1.240840193536184E-001
2	1.641040105068961E-001	2.285876535575549E-001

3	4.870741010024022E-001	1.536884862684963E-001
4	2.513045621382256E-001	3.041700707766410E-001
5	2.033807929862554E-001	3.450251748941237E-001
6	6.368494296100554E-001	1.898054241645994E-001
7	3.430614492885307E-001	1.441809735418989E-001
8	3.520135247366762E-001	2.289195177072528E-001
9	2.131971494536152E-001	3.314403264542553E-001
10	4.968108631879107E-001	2.048954900045679E-001

SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV = -1.776356839400251E-013

NORM = 9.99999999998579E-001

NEV-DET = 1.364242052659392E-012

N	SV
1	7.141139314701980E-002
2	6.873184414416353E-001
3	7.416580078033560E-001
4	4.203984406616693
5	3.779698938600395
6	-1.470993620114665
7	-6.275457436460156E-001
8	-3.525509423084515
9	-7.047436459053254
10	3.191334856523210

N = 9.99999999999705E-001

RM = 2.633871831198857

RZ = 2.630340587104462

COUL. ENERGY VK = 4.106613183539739

12 = 1.219823574100133

13 = 1.219823574100133

23 = 1.666966035339474

CENTROB. ENERGY = 4.025371560588050

KINETICH. ENERGY = 8.030009418604076

POTENS. ENERGY = -27.234130618489780

POLNAY ENERGY ST = -11.072136455757920

POLNAY ENERGY SH = -11.072136455745180

Подобные результаты для энергии и ВФ при размерности $N = 12$

E = -11.079033093916390 (N = 12)

N	ALFA	BET
1	6.409144140489247E-002	1.019587659674352E-001
2	1.258066165364320E-001	1.811335435670906E-001
3	5.502163968570325E-001	1.563736148998969E-001
4	1.093264054668316E-001	2.915855267598159E-001
5	1.333280173011495E-001	4.867098271947788E-001
6	8.577841282629973E-001	1.559124765668210E-001
7	2.427745646298275E-001	9.280370272042079E-002
8	4.374090344872209E-001	1.607892257131171E-001
9	2.506356884255520E-001	3.365880418027703E-001
10	5.992286208956132E-001	1.732142250126302E-001
11	2.513360250891818E-001	3.505196617789699E-001
12	9.123756893621239E-001	1.549639056362407E-001

SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV = 4.089173444299377E-012

NORM = 1.0000000000000028

NEV-DET = 1.818989403545857E-012

N	SV
1	2.405128330550160E-002
2	2.838460999953977E-001
3	3.355552135939775
4	6.347242717086900E-002
5	-7.943048747668001E-002
6	-5.622161796232756
7	-1.975249769693670E-002
8	-2.913336286105724
9	-1.743989588892319
10	9.471131965767997E-001
11	1.677487262418139
12	4.030809374250345

N = 1.0000000000000014

RM = 2.635529943243490

$$RZ = 2.631840422205140$$

$$\text{COUL. ENERGY VK} = 4.103278121515663$$

$$12 = 1.218338113251590$$

$$13 = 1.218338113251590$$

$$23 = 1.666601895012484$$

$$\text{CENTROB. ENERGY} = 4.011294763849525$$

$$\text{KINETICH. ENERGY} = 8.028619034600876$$

$$\text{POTENS. ENERGY} = -27.222225013883560$$

$$\text{POLNAY ENERGY ST} = -11.079033093917500$$

$$\text{POLNAY ENERGY SH} = -11.079033093917130$$

Из этих распечаток видно, что ошибки поиска детерминанта NEV-DET имеют порядок величины 10^{-12} , полная ошибка поиска энергии и собственных векторов, определяемая выражением $(H-EL)C$, оказывается меньше $4.1 \cdot 10^{-12}$, а нормировка полученной волновой функции отличается от единицы только в $12 \div 14$ знаке после запятой.

3.3.2.2 Второй вариант межкластерных потенциалов Second variant of intercluster potentials

Однако нужно отметить, что расчетные среднеквадратичные радиусы получаются несколько больше экспериментальной величина для зарядового радиуса ^{11}B , равного 2.406(29) Фм [198], несмотря на то, что радиус ^7Li в $^4\text{He}^3\text{H}$ канале имеет правильное значение. Обратим теперь внимание на тот факт, что радиусы ядер ^7Li 2.4017(281) Фм [198] и ^{11}B 2.406(29) Фм [198] практически совпадают и, по-видимому, если ядро ^7Li в $^4\text{He}^3\text{H}$ конфигурации и находится внутри ^{11}B в трехтельной $^4\text{He}^4\text{He}^3\text{H}$ модели, то оно должно быть несколько сжато.

Поэтому возьмем $^4\text{He}^3\text{H}$ потенциал с параметрами притягивающей части $V_1 = -121.405$ МэВ и $\alpha = 0.18$ Фм⁻², без изменения его отталкивания (см. табл.3.3.1 и 3.3.3). Он приводит к энергии связи ^7Li с целыми значениями масс частиц -2.467 МэВ, полностью совпадающей с экспериментальной величи-

ной [200]. Зарядовый радиус равен 2.24 Фм, а асимптотическая константа на интервале 5÷15 Фм имеет значение $C_w = 2.58(1)$ [13,89]. Как видно, в таком потенциале ядро ${}^7\text{Li}$ несколько деформировано, а именно, сжато по сравнению с его свободным состоянием.

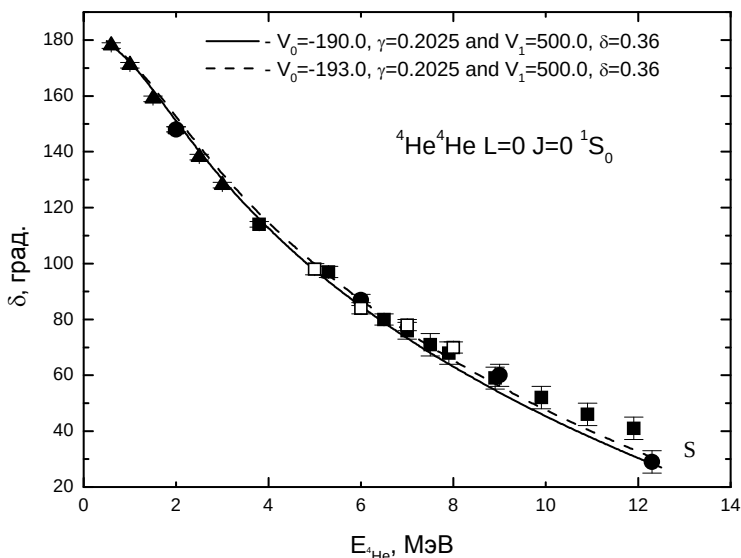


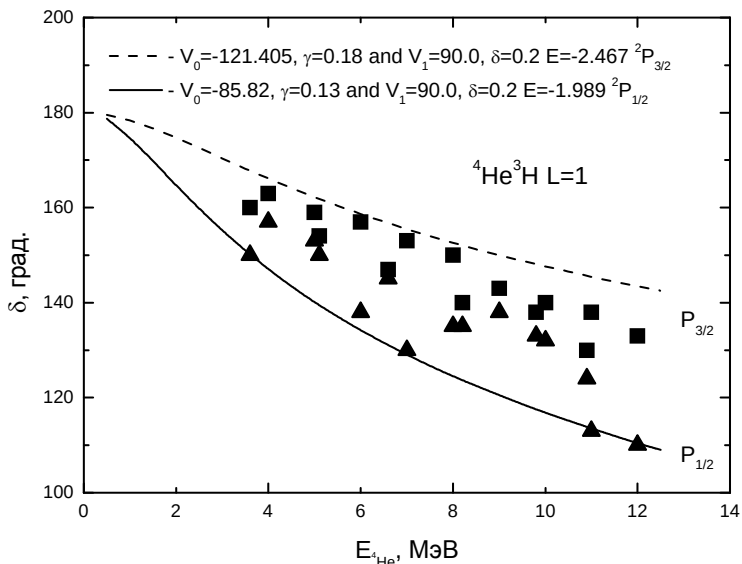
Рис.3.3.2. Фазы ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ упругого рассеяния при $L = 0$.

Непрерывной линией показан результат для потенциала Али-Бодмера [209], штриховой – для его модифицированного варианта из табл.3.3.3. Экспериментальные данные взяты из работ: [209] – •, [128] – ▲, [210] – □, [130] – ■.

Далее, для получения практически правильной величины трехтельной энергии, как будет показано в распечатке ниже, требуется намного меньше деформировать ${}^4\text{He}{}^4\text{He}$ потенциал, а именно, принять его глубину -193.0 МэВ, не меняя других его параметров, как показано в табл.3.3.3. Фаза его упругого рассеяния показана на рис.3.3.2 пунктирной кривой и практически не отличается от результатов для стандартного потенциала Али-Бодмера, которые, по-прежнему, показаны непрерывной линией.

Табл.3.3.3. Новый вариант параметров парных межкластерных потенциалов.

Система	$^{2S+1}L_J$	V_0 , МэВ	γ , $\Phi\text{М}^{-2}$	V_1 , МэВ	δ , $\Phi\text{М}^{-2}$
$^4\text{He}^4\text{He}$	1S_0	-193.0	0.2025	500.0	0.36
$^4\text{He}^3\text{H}$	$^2P_{3/2}$	-121.405	0.15	90.0	0.2


Рис.3.3.3. Фазы упругого $^4\text{He}^3\text{H}$ рассеяния для P волны.

Треугольники и квадраты – извлеченные из экспериментальных данных фазы упругого рассеяния [204,205]. Кривые – расчеты с разными потенциалами, параметры которых показаны на рисунке и в табл.3.3.3.

На рис.3.3.3 приведена фаза используемого далее потенциала $^4\text{He}^3\text{H}$ взаимодействия, которая, по сравнению с результатами, представленными на рис.3.2.2, проходит немного выше, а, по сути, по верхней границе фаз упругого $^4\text{He}^3\text{H}$ рассеяния, извлеченных из экспериментальных данных [204,205].

Приведем часть программы, в которой записаны эти по-

тенциалы взаимодействия кластеров:

```
! -----
! 1 - T; 2 - AL; 3 - AL; L - AL1-AL2 - 0, AL1-T - 1, AL2-T - 1
! AL-AL
V231=-193.0D-000 ; ! J= 0 ; LAM=0
R231=0.45D-000**2
V232=500.0D-000
R232=0.6D-000**2

! AL-T
V131=-121.405D-000 ; ! J=3/2; L=1
R131=0.18D-000
V132=90.0D-000
R132=0.2D-000

! AL-T
V121=V131 ; ! J=3/2; L=1
R121=R131
V122=V132
R122=R132
! -----
```

Теперь приведем результаты расчета трехтельной энергии связи ядра ^{11}B в $^4\text{He}^4\text{He}^3\text{H}$ канале с описанными выше потенциалами для 10 членов разложения ВФ по гауссойдам N:

E = -11.031463381093430		
N	ALFA	BET
1	6.860823790482709E-002	1.372018518013886E-001
2	1.979200374955967E-001	1.975207162666516E-001
3	4.887720500875407E-001	1.729550202313665E-001
4	1.536806478562412E-001	3.328419037585270E-001
5	9.581401187947329E-002	4.647401165174852E-001
6	7.235261491934235E-001	2.130457228008369E-001
7	2.517628737184591E-001	1.646905851358956E-001
8	3.718525859440748E-001	2.263181658977888E-001

9 2.301200947513070E-001 3.053675821366754E-001
 10 5.342732966940103E-001 2.386280212884875E-001

SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV = 1.456612608308205E-012
 NORM = 9.99999999999014E-001
 NEV-DET = 0.000000000000000E+000

N	SV
1	5.144041160323528E-002
2	6.941910561622631E-001
3	5.424054031163350E-001
4	1.121880192698402
5	-1.131115274640460E-001
6	-8.746059242237850E-001
7	-5.773075026219299E-001
8	-1.357323308702923
9	-1.431015963101069
10	1.939168998797320

N = 9.99999999999950E-001
 RM = 2.545788338764759
 RZ = 2.554149440825896

COUL. ENERGY VK = 4.549379683245643
 12 = 1.434603714056763
 13 = 1.434603714056763
 23 = 1.680172255132118

CENTROB. ENERGY = 5.629493999635255
 KINETICH. ENERGY = 9.387040848724377
 POTENS. ENERGY = -30.597377914995690

POLNAY ENERGY ST = -11.031463383390410
POLNAY ENERGY SH = -11.031463383390960

Далее следуют результаты расчета трехтельной энергии
 связи для $N = 12$:

E = -11.032671516388140

N	ALFA	BET
1	6.866999434690753E-002	1.308910045752647E-001
2	1.149793056566817E-001	1.884387791693870E-001
3	5.539896465720190E-001	1.648434683949910E-001
4	1.528193850522205E-001	3.151598143556194E-001
5	1.052759959020325E-001	3.918444921609474E-001
6	8.827637468448799E-001	1.561502493903658E-001
7	2.403581793183441E-001	1.111462488829206E-001
8	5.436244156008828E-001	1.700073788396006E-001
9	2.569650583366106E-001	3.146550134272712E-001
10	5.752686749704641E-001	1.756637188474036E-001
11	2.882071283272155E-001	3.321865686346414E-001
12	9.046635125615116E-001	1.547378005133593E-001

SUM(H*SV-E*L*SV) FROM SV = -4.312994406063808E-012

NORM = 1.000000000006423

NEV-DET = 9.094947017729282E-013

N	SV
1	4.219506029644921E-002
2	6.537938394165033E-002
3	10.984160595778020
4	1.332911137207201
5	-1.904812220035353E-001
6	-16.076855570816770
7	-3.480370810845272E-002
8	-19.639156270511190
9	-3.254715851761231
10	11.029434819668920
11	1.864459157683097
12	13.879575716434890

N = 9.999999999999663E-001

RM = 2.545605920214188

RZ = 2.553862814168674

COUL. ENERGY VK = 4.545338040958250

12 = 1.432617674939411

13 = 1.432617674939411

23 = 1.680102691079429

CENTROB. ENERGY = 5.611694081091503

KINETICH. ENERGY = 9.392846392977125

POTENS. ENERGY = -30.582550036090190

POLNAY ENERGY ST = -11.032671521063310

POLNAY ENERGY SH = -11.032671521338680

Отсюда видно, что даже в этом случае радиусы ^{11}B , примерно равные 2.55 Фм, оказываются заметно больше их экспериментальной величины 2.406(29) Фм [198], но для получения правильной энергии связи ^{11}B практически не требуется деформировать $^4\text{He}^4\text{He}$ потенциал, а парное $^4\text{He}^3\text{H}$ взаимодействие все еще может быть согласовано с фазами рассеяния, как показано на рис.3.3.3.

Конечно, можно еще изменить $^4\text{He}^3\text{H}$ потенциал, сделав его более узким, что приведет к уменьшению радиуса ^7Li и в результате, возможно, удастся получить правильный радиус ^{11}B . Но, как видно из рис.3.3.3, при таком изменении потенциала уже не удастся правильно описать извлеченную из эксперимента фазу упругого $^4\text{He}^3\text{H}$ рассеяния, которая имеет тенденцию к увеличению значений при увеличении глубины потенциала, которые показаны в табл.3.3.1 и табл.3.3.3. Эта тенденция хорошо видна и при сравнении рис.3.2.2 и рис.3.3.3.

В этом смысле рассмотренный здесь второй вариант потенциалов является наиболее оптимальным с точки зрения минимального изменения параметров хорошо определяемого на основе экспериментальных фаз рассеяния $^4\text{He}^4\text{He}$ потенциала. Причем, такой вариант потенциалов все еще позволяет сохранить разумную форму расчетных $^4\text{He}^3\text{H}$ фаз рассеяния, показанных на рис.3.3.3.

С другой стороны, всегда можно считать, что из-за большой трехтельной энергии связи ^{11}B , которая больше энергии связи тритонного кластера в 3N канале, вполне возможна его деформация, т.е. небольшое сжатие с уменьшением радиуса. Действительно, в свободном состоянии радиус трития ^3H оказывается больше радиуса ядра ^4He и если тритий сильно связать в ядре, его радиус может несколько уменьшиться, уменьшив тем самым, радиус ^{11}B .

Как видно из приведенных выше результатов трехтельная модель и в этом случае позволяет получить разумное описание некоторых основных характеристик нечетного ядра ^{11}B . Хотя имеющиеся ошибки фазового анализа приводят к неопределенностям в параметрах межкластерных потенциалов, но практически в их пределах удастся построить потенциалы, приводящие к вполне приемлемым результатам при описании основных характеристик ядра ^{11}B . Кроме того, одноканальность модели также приводит к некоторым неопределенностям в потенциалах взаимодействия, уменьшить которые, как уже говорилось, позволит, по-видимому, только рассмотрение двух- и трехканальных конфигураций (по орбитальному моменту) в некоторых парах частиц.

Заключение **Conclusion**

Тем самым, использованный альтернативный метод нахождения собственных значений обобщенной матричной задачи, рассматриваемой на основе вариационных методов решения уравнения Шредингера с использованием неортогонального вариационного базиса, избавляет нас от возможных неустойчивостей, возникающих в процессе применения обычных методов решения такой математической модели, т.е. обычного метода ортогонализации по Шмидту [17].

В рамках рассматриваемых вариационных методов, получены новые результаты для трехтельных моделей ядер ${}^7\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$ и ${}^{11}\text{B}$. Для этого использован неортогональный вариационный базис, независимое варьирование параметров, межкластерные потенциалы, чистые по схемам Юнга и согласованные с фазами упругого рассеяния в двухчастичных каналах. Все эти результаты позволяют правильно воспроизвести некоторые рассмотренные экспериментальные характеристики связанных состояний этих ядер и сечения некоторых фотоядерных процессов.

Еще раз обратим внимание, что рассмотренная трехтельная модель позволяет, в частности, провести определенную проверку построенных по фазам рассеяния парных межкластерных потенциалов. Получаемые на ее основе результаты позволяют убедиться в целесообразности дальнейшего использования таких взаимодействий для расчетов, связанных с рассмотрением некоторых, в том числе, астрофизических характеристик ядерных систем и термоядерных реакций, например, астрофизических S -факторов на легких атомных ядрах при низких и сверхнизких энергиях [9,12,13,189].

ҚОРЫТЫНДЫ

Көптеген тәжірибелік және теориялық зерттеулер нәтижесінде, ұрылымдары екі немесе үш бөлікті каналдардан тұратын кластерлік модельдеу жеңіл атомдар ядроларының көптеген сипаттамаларын түсіндіретіндігі айқындалды [12].

Бірінші тарауда келтірілген үздіксіз және дискретті спектрлердегі ядроның толқындық функцияларының есептеу әдістерін біле отырып, әр түрлі есептеулерді орындауда төмен және өте төмен энергиялардың ядролық физиканың мәселелерінің шешімі және ядролық астрофизика үшін кез келген моделді есептер [17]. Термоядролық процесстердің ядролық мінездемелерінің нақты есептеулерін Шредингер теңдеулерін орындау үшін, жеңіл ядролық бөлшектердің арасындағы өзара байланысатын потенциалдарын білуі керек, олар термоядролық реакцияларда қатысатын кластерлер [14].

Екінші тарауда келтірілген шашырау процесінің кластераралық потенциалдарын құру үшін, фазалық талдаудың нәтижелері қолданылады, фазаларының іздестіруіне іс жүзінде нөлдік энергиядан басталады. Сондықтан потенциалдар, серпімді шашыратудың процесстері үшін, резонанстық күйлердің болуын есепке алатын, төмен және өте төмен энергиялардың ядролық физиканың және астрофизикалық есептерінің кез келген есептеулерінде қолдану мүмкін [14].

Мысалы, электромагнитті өткелдердің үздіксіз спектрді ядроның байланыс күйінен күйге өту үшін керек болатын потенциалдары кластераралық каналдарындағы ядролардың негізгі күйлерінің негізгі

мінездемелерінің сипаттау негіздерінде беріледі. Олар, тек қана, Юнгтің бір схемасына тәуелді, яғни орбиталық симметрия бойынша мөлдір болу [9,12,13].

Мұндай потенциалдардың кейбір гаустық және Вудс-Саксон байланыс түрлері p^2H , ядролық бөлшектерінің жүйелері үшін NN , p^2H , p^3H , p^3He , p^4He , p^6Li , p^7Li , p^9Be , $p^{12}C$, $p^{13}C$, $^2H^2H$, $^2H^3He$, $^2H^3H$, $^3H^3He$, $^3H^3H$, $^3He^3He$, $^2H^4He$, $^3H^4He$, $^3He^4He$, $^2H^6Li$, $^4He^4He$, $^4He^{12}C$ және кейбір басқа НИИЯФ МГУ және Алматыдағы авторлардың біртума жұмыстарынан бұрын алынды. Кейіннен, олар жүйеленген, анықталған, қайта тексерілген және кітаптың келесі шолуларында берілген [9-11,12-15,17,29,37]. Тыйым салынған және рұқсат етілген күйлердің, кластерлердің салыстырмалы қозғалысындағы тұжырымдама басқа мағнада бұл кластераралық өзарабайланыстарын құруда есепке алынды [11].

Үшінші тарауда, серпімді шашыратудың фазаларының негізінде жұп кластераралық потенциалдарын құрудың дұрыстығының қосымша бақылауына бағытталған кейбір жеңіл атом ядроларының бір арналы модельінің үш денелі нәтижелері толық келтірілген [16,87,207]. Өзара байланыстың кейбірі сыннан өткен және тексерілгендері сайып келгенде астрофизикалық S-факторларды есептеуге – Күн және жұлдыздардағы термоядролық процесстердің ядролық сиппатамаларын анықтауға қолданылады [14,168].

Қорытындысында, төмен және өте төмен ядролық физиканың нақтылы әдістері көрсетуге талпындық, яғни астрофизикалық энергиялардың термоядролық реакциялардың есептеулері үшін төмен энергияларда қолдануға болатындығын көрсеттік. Көрсетілген, ядролық физиканың негізгі кейбір әдістері біздің Өлемнің ядролық астрофизикасының нақтылы мәселелерін шешуге мүмкіндік береді [168].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате многочисленных экспериментальных и теоретических исследований было показано, что именно кластерная модель позволяет успешно объяснять многие характеристики легких атомных ядер, структура которых представляется в двух- или трехчастичных каналах [12].

Таким образом, зная методы расчета волновых функций ядра в непрерывном и дискретном спектрах, которые были приведены в первом разделе, можно рассматривать любые модельные задачи для выполнения различных вычислений и решения большинства проблем ядерной физики низких и сверхнизких энергий и ядерной астрофизики [17]. Однако для выполнения реальных расчетов ядерных характеристик термоядерных процессов при решении уравнения Шредингера нужно знать потенциалы взаимодействия между легкими ядерными частицами – кластерами, которые участвуют в термоядерных реакциях [14].

Для построения межкластерных потенциалов процессов рассеяния обычно используются результаты фазового анализа, приведенные во втором разделе, в котором поиск фаз рассеяния начинается практически с нулевой энергии. Поэтому потенциалы, получаемые на основе таких фаз для процессов упругого рассеяния, которые учитывают наличие резонансных состояний, можно использовать в любых расчетах связанных с решением ядерно-физических и астрофизических задач низких и сверхнизких энергий [14].

Межкластерные потенциалы связанных в ядре состояний кластеров, которые требуются для расчетов,

например, электромагнитных переходов из связанного состояния ядра в состояния непрерывного спектра, обычно строятся на основе описания ими некоторых характеристик основных состояний ядер в кластерных каналах. Они должны, как правило, зависеть только от одной схемы Юнга, т.е. быть чистыми по орбитальной симметрии [9,12,13].

Некоторые варианты таких потенциалов взаимодействия гауссова и Вудс-Саксоновского типа для систем ядерных частиц NN , p^2H , p^3H , p^3He , p^4He , p^6Li , p^7Li , p^9Be , $p^{12}C$, $p^{13}C$, $^2H^2H$, $^2H^3He$, $^2H^3H$, $^3H^3He$, $^3H^3H$, $^3He^3He$, $^2H^4He$, $^3H^4He$, $^3He^4He$, $^2H^6Li$, $^4He^4He$, $^4He^{12}C$ и некоторые другие были получены ранее в оригинальных работах авторов из НИИЯФ МГУ и Алматы. Впоследствии, они были систематизированы, перепроверены, уточнены и приведены в следующих обзорах и книгах [9-11,12-15,17,29,37]. В некоторых случаях при построении таких межкластерных взаимодействий учитывалась концепция запрещенных и разрешенных состояний в относительном движении кластеров, что позволило избавиться от присутствия на малых расстояниях отталкивающего кора [11].

В третьем разделе книги приведено довольно подробное рассмотрение результатов трехтельной одноканальной модели некоторых легких атомных ядер, которое, по сути, направлено на дополнительный контроль правильности построения парных межкластерных потенциалов на основе фаз упругого рассеяния [16,87,207]. В дальнейшем некоторые из полученных и проверенных таким образом взаимодействий используются для расчетов астрофизических S -факторов и других ядерных характеристик термоядерных процессов на Солнце и звездах [14,168].

И в заключение еще раз обратим ваше внимание, что в настоящей книге сделана попытка продемонстрировать определенные методы ядерной физики низких и сверхнизких, т.е. астрофизических энергий, которые могут быть использованы для расчетов термоядерных ре-

акций на Солнце и звездах. Показано, как на основе некоторых методов ядерной физики можно получить потенциалы, которые позволяют решать в дальнейшем определенные проблемы ядерной астрофизики нашей Вселенной [168].

CONCLUSION

It was shown, in the issue of numerous experimental and theoretical studies, that cluster model allows one to successfully describe many characteristics of light atomic nuclei, which structure can be represented in two- or three-body channels [12].

Thereby, it is possible to consider any model problems for carrying out different calculations and solve the majority problems of low and ultralow energy nuclear physics and nuclear astrophysics [17] if we know the methods of calculation of nuclear wave function in continuous and discrete spectra, which are given in the first section. However, it is necessary to know interaction potentials between light nuclear particles – clusters, taking part in thermonuclear reactions [14], for carrying out real calculations of nuclear characteristics of thermonuclear processes by solving the Schrödinger equation.

The results of the phase shift analysis, given in the second section, where the search of phase shifts of scattering practically begins from zero energy, are used for the construction of intercluster potentials of elastic scattering processes. Therefore, the potentials obtained on the basis of such phase shifts of elastic scattering processes and taking into account the presence of the resonance states, which may be used in any calculations connected with the solving of nuclear-physical and astrophysical problems of low and ultralow energies [14].

The intercluster potentials of the bound states, which are needed for calculations, for example, the electromagnetic transitions from the bound state of nucleus to the states of continuous spectrum, usually are constructed on the basis of description of fundamental

characteristics of the ground states of nucleus in cluster channels. They should, as a rule, depend from the only one Young's scheme, i.e. be pure according to orbital symmetry [9,12,13].

Some variants of these potentials of Gaussian and Woods-Saxon types for systems of nuclear particles NN, p^2H , p^3H , p^3He , p^4He , p^6Li , p^7Li , p^9Be , $p^{12}C$, $p^{13}C$, $^2H^2H$, $^2H^3He$, $^2H^3H$, $^3H^3He$, $^3H^3H$, $^3He^3He$, $^2H^4He$, $^3H^4He$, $^3He^4He$, $^2H^6Li$, $^4He^4He$, $^4He^{12}C$ and other were obtained earlier in the original works of authors from Institute of Nuclear Physics (MSU) and Almaty. Later, they were systemized, double-checked, specified and given in the next reviews and books [9-11,12-15,17,29,37]. The conception of forbidden and allowed states in relative cluster motion is taken into account in some cases of construction of these intercluster interactions, and this fact allows us to get rid of the existence of repulsive core at low distances [11].

The quite detailed consideration of the results of three-body one-channel model of certain light atomic nuclei is given in the third section of the book; intrinsically, this is the additional control of correctness of the construction of pair intercluster potentials obtained on the basis of elastic scattering [16,87,207]. Further, some of the similarly obtained and checked interactions are used for calculations of the astrophysical S-factors and other nuclear characteristics of thermonuclear processes in the Sun and the stars [14,168].

Once more, in conclusion, we are paying your attention that it was done the attempt to demonstrate certain methods of nuclear physics of low and ultralow energy, i.e. astrophysical energies, which can be used for the calculations of thermonuclear reactions in the Sun and the stars. It was shown that results, which allow one to solve some problems of nuclear astrophysics of our Universe [168], can be obtained on the basis of certain methods of nuclear physics.

АЛҒЫС БІЛДІРУ

Автор кітаптағы қарастырылған кейбір мәселелердің өте құнды талқылаулары үшін (М.В. Ломоносов атындағы ММУ ЯФҒЗИ, Мәскеу, Ресей) профессор Л.Д. Блохинцевке, профессор Ишхановке Б.С. және профессор В.Г. Неудачинге ф.м.ғ. докторы Ю.Н. Узиовқа (БЯЗИ, Дубна, Россия), профессор А.Д. Дуйсебаевқа және профессор Н.Т. Буртебаевқа (ҚР, Ұлттық ядролық орталығының Ядролық физиканың институты, Алматы, Қазақстан), профессор Н.Т. Данаевқа (ал-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университет, Алматы, Қазақстан), профессор Л.М. Чечинге (В.Г. Фесенков атындағы Астрофизикалық институт, Алматы, Қазақстан) үлкен алғыс білдіреді.

ҚР ҰҒ Академиясының ғылыми консультанты академик, профессор Э.Г. Боостың осы жұмыста баға жетпес жәрдемдесу ерекше атап өтуі керек (Физика-техникалық институты, Қазақстан, Алматы).

Кәсіби ғылыми редакторлардың ерекше үлестері үшін профессор Н.А. Бурковқа (ал-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университет, Алматы, Қазақстан) кітапты редакциялағанда бірнеше пайдалы ескертпелер, түзетулер, қосымшалар жасалғандығын атап өткім келеді.

Бұдан басқа, автор Джазайров-Кахрамановке А.В. кітаптың жеке бөліктерін ағылшын тіліне аударғанына, ал Шамшекова С. (В.Г. Фесенков атындағы Астрофизикалық институт, Алматы, Қазақстан) қазақ тіліне ұқсас бөліктерін аударғанына алғысын білдіреді.

Бұл жұмыс В.Г. Фесенков астрофизика институтының АҚ «ҰҒЗТОҚ» ҚР ҰҒА арқылы ҚР БҒМ фундаменталды зерттеулер бағдарламаларының граттары мен жартылай қолдау көрсетілді.

Осыған байланысты АҚ "ҰҒЗТО" ҚР ҰҒА президенті профессор Ж.Ш. Жантаевке Ядролық астрофизиканың барлық тақырыбы бойынша және осы кітапты жазуда әрқашан қолдау көрсеткені үшін және В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институтының директоры Омаров Ч.Т. осы кітапты басылымға шығаруға көмектескені үшін ерекше алғысымды білдіремін.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает большую признательность проф. Блохинцеву Л.Д., проф. Ишханову Б.С. и проф. Неудачину В.Г. (НИИЯФ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия), д.ф.-м.н. Узикову Ю.Н. (ОИЯИ, Дубна, Россия), проф. Дуйсебаеву А.Д. и проф. Буртебаеву Н.Т. (Институт ядерной физики Национального ядерного центра РК, Алматы, Казахстан), проф. Данаеву Н.Т. (Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан), проф. Чечину Л.М. (Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы, Казахстан) за очень ценные обсуждения некоторых, рассмотренных в книге вопросов.

Следует особо отметить неоценимое содействие данной работе со стороны научного консультанта книги Академика НАН РК, д.ф.-м.н., проф. Боос Э.Г. (Физико-технический институт, Алматы, Казахстан).

Хочу отметить огромный вклад научного редактора проф. Бурковой Н.А. (Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан), которая сделала целый ряд полезных замечаний, правок и дополнений при редактировании книги.

Кроме того, автор выражает большую благодарность Джазаирову-Кахраманову А.В. (Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы) за перевод части текста книги на английский язык, а Шамшековой С. (Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова, Алматы) за перевод на казахский язык.

Данная работа частично поддерживалась грантами Программы фундаментальных исследований МОН РК через Астрофизический институт им. В.Г. Фесенкова АО "НЦКИТ" НКА РК.

В связи с этим, выражаю искреннюю благодарность президенту АО "НЦКИТ" НКА РК проф. Жантаеву Ж.Ш. за постоянное содействие и поддержку всей тематики по Ядерной астрофизике, а также директору Астрофизического института Омарову Ч.Т. за большую помощь при издании настоящей книги.

ACKNOWLEDGMENTS

I would like to express a profound gratitude to Prof. Blokhintsev L.D., Prof. Ishkhanov B.S. and Prof. Neudatchin V.G. (Institute of Nuclear Physics, Moscow State University, Moscow, Russia), Dr. Uzikov Yu.N. (JIRN, Dubna, Russia), Prof. Duisebaev A.D. and Prof. Burtebaev N.T. (Institute of nuclear physics of the National Nuclear Centre of the Republic of Kazakhstan, Almaty), Prof. Danaev N.T. (al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan) and Prof. Chechin L.M. (Fessenkov's Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan), for the very important discussions of some questions which were considered in the book.

It is necessary to note the invaluable assistance for this work from the scientific consultant of this book: Academician of the National Academy of Kazakhstan, Prof. Boos E.G. (Applied-physics Institute, Almaty, Kazakhstan).

I want to mention a special contribution made by science editors Prof. Burkova N.A. (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan) who wrote a number of useful comments, introduced corrections and amendments while editing the book.

In addition, I want to express great thanks to Dzhazairov-Kakhramanov A.V. for the translation of a part of the book into English and to Shamshekova S. (Fessenkov's Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan) for the translation into Kazakh.

The work has been partly supported by the MES RK (the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan) Program of Fundamental Research via the Fessenkov V.G. Astrophysical Institute "NCSRT" NSA RK.

Thereby, I would like to express a particular gratitude to the President of "NCSRT" NSA RK Prof. Zhantaev Zh.Sh. for the assistance and the permanent support of the whole nuclear astrophysics themes, as well as to the Director of Astrophysical Institute Omarov Ch.T. for the big assistance in the publication of this book.

ЛИТЕРАТУРА

References

1. Капитонов И.М., Ишханов Б.С., Тутынъ И.А. Нуклеосинтез во Вселенной. М.: Librokom. 2009; <http://nuclphys.sinp.msu.ru/lect/index.html>; Kapitonov I.M., Ishkhanov B.S., Tutyn I.A. Nucleosynthesis in the Universe. Moscow. Librokom. 2009 (in Russian).

2. Ишханов Б.С., Капитонов И.М., Орлин В.Н. Модели атомных ядер. М.: МГУ. 2001; <http://nuclphys.sinp.msu.ru/nucmod/nucmod1.htm>; Kapitonov I.M., Ishkhanov B.S., Orlin V.N. Models of atomic nuclei. Moscow. Moscow state university. 2009 (in Russian).

3. Ядерная астрофизика / Под. ред. Ч. Барнса, Д. Клейтона, Д. Шрама. М.: Мир. 1986. 519с.; Barnes C.A., Clayton, D.D., Schramm D.N. Essays in Nuclear Astrophysics. Presented to William A. Fowler. Cambridge University Press. Cambridge. UK. 1982. 562p.

4. Горбунов Д.С., Рубаков В.А. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва. М.: ЛКИ. 2008. 552с.; Gorbunov D.S., Rubakov V.A. Introduction to theory of early Universe. Theory of hot Big Bang. Moscow. LKI. 2008. 552p. (in Russian).

5. <http://www.astronet.ru/db/msg/1199352/experiments/exper2.html>; <http://www.scientific.ru/journal/news/0702/n140702.html>.

6. Angulo C. et al. A compilation of charged-particle induced thermonuclear reaction rates // Nucl. Phys. 1999. V.A656. P.3-183.

7. Шкловский И.С. Звезды: их рождение, жизнь и смерть. М.: Наука. 1984. 384с.; Shklovskii I.S. Stars: birth, life and death. Moscow. Nauka. 1984. 384p. (in Russian).

8. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука. 1975. 735с.; Zel'dovich Ya.B., Novikov I.D. Structure and Evolution of the Universe. Moscow. Nauka. 1975. 735p. (in Russian).

9. Дубовиченко С.Б., Узиков Ю.Н. Астрофизические S-факторы реакций с легкими ядрами // ЭЧАЯ 2011. Т.42. №2. С.478-577; Dubovichenko S.B., Uzikov Yu.N. Astrophysical S-factors of reactions with light nuclei // Phys. Part. Nucl. 2011. V.42. №2. P.251-301.

10. Неудачин В.Г., Сахарук А.А., Смирнов Ю.Ф. Обобщенное потенциальное описание взаимодействия легчайших кластеров – рассеяние и фотоядерные реакции // ЭЧАЯ 1992. Т.23. С.480-541.

11. Neudatchin V.G. et al. Generalized potential model description of mutual scattering of the lightest p^2H , $^2H^3He$ nuclei and the corresponding photonuclear reactions // Phys. Rev. 1992. V.C45. P.1512-1527.

12. Немец О.Ф. и др. Нуклонные ассоциации в атомных ядрах и ядерные реакции многонуклонных передач. Киев: Наукова Думка. 1988. 488с.; Nemets O.F., Neudatchin V.G., Rudchik A.T., Smirnov Y.F., Tchuvil'sky Yu.M. Nucleon Association in Atomic Nuclei and the Nuclear Reactions of the Many Nucleons Transfers. Kiev. Naukova dumka. 1988. 488p. (in Russian).

13. Дубовиченко С.Б. Свойства легких атомных ядер в потенциальной кластерной модели. Второе издание. Алматы: Данекер. 2004. 248с.; Dubovichenko S.B. Properties of the light nuclei in potential cluster model. Almaty. Daneker. 2004. 247p.; <http://arxiv.org/abs/1006.4944>.

14. Дубовиченко С.Б. Термоядерные процессы Вселенной. Алматы: АФИФ. 2010. 339с.; Dubovichenko S.B. Thermo-nuclear processes of the Universe. Almaty. APhi. 2010. 339p. (in Russian); <http://nuclphys.sinp.msu.ru/thpu/index.html>.

15. Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Astrophysical S-factors of proton radiative capture in thermonuclear reactions in the stars and the universe // In book: The Big Bang: Theory, Assumptions and Problems. New-York. Nova Science Publishers. 2011. p.1-60; https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=21109.

16. Дубовиченко С.Б. Трехтельная модель ядра ^{11}B // ЖЭТФ 2011. Т.140. №2. С.256-262; Dubovichenko S.B. A three

body model of the ^{11}B nucleus // Journal of Experimental and Theoretical Physics 2011. V. 113. P. 221–226.

17. Дубовиченко С.Б. Методы расчета ядерных характеристик. Алматы: Комплекс. 2006. 311с.; Dubovichenko S.B. Calculation method of the nuclear characteristics. Almaty. Complex. 2006. 311p.; <http://arxiv.org/abs/1006.4947>.

18. Блат Дж., Вайскопф В. Теоретическая ядерная физика. М.: ИЛ. 1954. 658с.; Blatt J.M., Weisskopf V.F. Theoretical nuclear physics. New-York-London. 1952. 864p.

19. Брейт Г. Теория резонансных ядерных реакций. М.: ИЛ. 1961. 463с.; Breit G. Theory of resonance reactions and allied topics. Berlin-Gottingen-Heidelberg. Springer-Verlag. 1959. 398p.

20. Престон М. Физика ядра. М.: Мир. 1964. 574с.; Preston M.A. Physics of the nucleus. Palo Alto-London. Addison-Wesley Publ. Co. Inc. 1962. 661p.

21. Вильдермут Л., Тан Я. Единая теория ядра. М.: Мир. 1980. 502с.; Wildermuth K., Tang Y.C. A unified theory of the nucleus. Vieweg. Branschweig. 1977. 498p.

22. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Нуклонные ассоциации в легких ядрах. М.: Наука. 1969. 414с.; Neudatchin V.G., Smirnov Yu.F. Nucleon associations in light nuclei. Moscow. Nauka. 1969. 414p. (in Russian); V.I. Kukulin, Neudatchin V.G., Obukhovskiy I.T. and Smirnov Yu.F. Clusters as subsystems in light nuclei, in: Clustering Phenomena in Nuclei. Edited by K. Wildermuth and P. Kramer. Vieweg. Braunschweig. 1983. V.3. P.1.

23. Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра. Том 1. М.: Мир, 1971. 456с.; Bohr A., Mottelson B.R. Nuclear structure Vol.I. Single particle motion. Singapore. World Scientific Publ. Co. Ltd. 1998. 471p.; http://reslib.com/book/Nuclear_Structure_Vol_1_Single_Particle_Motion#7.

24. Дубовиченко С.Б. Свойства легких атомных ядер в потенциальной кластерной модели. Каз.ГУ. Алматы. 1998. 332с. Деп. в Каз. Гос. ИНТИ 1998, №8172 Ка98.; Dubovichenko S.B. Properties of the light nuclei in potential cluster model. Almaty. INTI. 1998. №8172 Ka98. 332p.

25. Neudatchin V.G. et al. A microscopic substantiated optical potential for αt system including nucleon exchange // Lett. Nuovo Cim. 1972. V.5. P.834-838.

26. Neudatchin V.G. et al. A microscopically substantiated local optical potential for $\alpha\alpha$ scattering // Phys. Lett. 1971. V.34B. P.581-583.

27. Kurdyumov I.V. et al. The high energy limit for the α form factors in the ${}^6\text{Li}$ nuclei // Phys. Lett. 1972. V.40B. P.607-610.

28. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Запрещенные состояния в системах двух и трех составных частиц // Современные вопросы оптики и атомной физики. Киев. Киевский гос. ун-тет. 1974. С.225-241.

29. Неудачин В.Г., Смирнов Ю.Ф. Взаимодействие составных частиц и принцип Паули // ЭЧАЯ 1979. Т.10. С.1236-1255.

30. Дубовиченко С.Б., Кукулин В.И., Сазонов П.Б. Структура ядер ${}^{6,7}\text{Li}$ в кластерной модели на основе потенциалов с запрещенными состояниями // Теория квантовых систем с сильным взаимодействием. КГУ. Калинин. 1983. С.65-79.

31. Дубовиченко С.Б., Мажитов М. Вариационные расчеты ядер ${}^{6,7}\text{Li}$ в кластерных моделях для потенциалов с запрещенными состояниями // Изв. АН Каз. ССР сер. физ. мат. 1987. № 4. С.55-64.

32. Дубовиченко С.Б., Мажитов М. Неортогональный вариационный базис в задаче двух тел. Каз.ГУ. Алматы. 1987. С.1729-1735. Деп. Каз. Гос. НИИНТИ 1987. №. 1665.

33. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Потенциальное описание кластерных каналов лития // ЯФ 1993. Т.56. С.87-98; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Potential description of cluster channels of lithium nuclei // Phys. Atom. Nucl. 1993. V.56. P.195-202.

34. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Кулоновские формфакторы ядер лития в кластерной модели на основе потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ

1994. Т.57. С.784-791; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Calculation of coulomb form factors of lithium nuclei in a cluster model based on potentials with forbidden states // Phys. Atom. Nucl. 1994. V.57. P.733-740 .

35. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Фотопроцессы на ядрах ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ в кластерной модели для потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ 1995. Т.58. С.635-641; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Photonuclear processes on ${}^7\text{Li}$ and ${}^7\text{Be}$ in the cluster model for potentials with forbidden states // Phys. Atom. Nucl. 1995. V.58. P.579-585.

36. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Фотопроцессы на ядре ${}^6\text{Li}$ в кластерных моделях для потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ 1995. Т.58. С.852-859; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Description of photonuclear processes on the ${}^6\text{Li}$ nucleus in cluster models based on potentials with forbidden states // Phys. Atom. Nucl. 1995. V.58. P.788-795.

37. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Электромагнитные эффекты в легких ядрах на основе потенциальной кластерной модели // ЭЧАЯ 1997. Т.28. С.1529-1594; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Electromagnetic effects in light nuclei and the cluster potential model // Phys. Part. Nucl. 1997. V.28. №6. P.615-641.

38. Искра В. и др. Интерференция различных потенциальных амплитуд во взаимном рассеянии легчайших кластеров // УФЖ 1988. Т.32. С.1141-1147.

39. Искра В. и др. Возможности потенциального описания взаимного рассеяния легчайших кластеров // ЯФ 1988. Т.48. С.1674-1683.

40. Неудачин В.Г., Померанцев В.Н., Сахарук А.А. Потенциальное описание фотоядерных реакций ${}^3\text{He}\gamma \rightarrow \text{p}^2\text{H}$ и ${}^3\text{He}^2\text{H} \rightarrow {}^5\text{Li}\gamma$ // ЯФ 1990. Т.52. С.738-744.

41. Кукулин В.И. и др. Обобщенное потенциальное описание взаимного рассеяния легчайших кластеров на примере систем p^2H и ${}^2\text{H}^3\text{He}$ // ЯФ 1990. Т.52. С.402-411.

42. Дубовиченко С.Б. и др. Обобщенное потенциальное описание взаимодействия легчайших ядер p^3H и p^3He // Изв. АН СССР сер. физ. 1990. Т.54. С.911-916; Dubovichenko S.B. et al. Generalized potential description of the interaction of the lightest nuclei p^3H and p^3He // Izv. Academy Nauk SSSR. Ser. Fiz. 1990. V.54. P.911-916.

43. Neudatchin V.G., Sakharuk A.A., Dubovichenko S.B. Photodisintegration of 4He and supermultiplet potential model of cluster-cluster interaction // Few Body Sys. 1995. V.18. P.159-172.

44. Neudatchin V.G. et al. The generalized potential model description of p^2H and $^2H^3He$ scattering // Phys. Lett. 1991. V.B255. P.482-486.

45. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Потенциальное описание процессов упругого Nd , dd , $N\alpha$ и $d\tau$ рассеяния // ЯФ 1990. Т.51. С.1541-1550; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Potential description of elastic N^2H , $^2H^2H$, N^4He , and $^2H^3H$ scattering // Sov. J. Nucl. Phys. USSR 1990. V.51. P.971-977.

46. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Потенциальное описание упругого Nt и $N\tau$ рассеяния // ЯФ 1993. Т.56. С.45-56; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Potential description of elastic N^3H and N^3He scattering // Phys. Atom. Nucl. 1993. V.56. P.447-454.

47. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в N^2H и $^2H^3He$ системах на основе кластерных моделей для потенциалов с запрещенными состояниями // ЯФ 1995. Т.58. С.1253-1259; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Analysis of photonuclear processes in the N^2H and $^2H^3He$ systems on the basis of cluster models for potentials with forbidden states // Phys. Atom. Nucl. 1995. V.58. P.1174-1180.

48. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в dd канале ядра 4He на основе потенциальной кластерной модели // ЯФ 1995. Т.58. С.1973-1979; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Description of photoprocesses in the dd

channel of the ^4He nucleus in potential cluster models // Phys. Atom. Nucl. 1995. V.58. P.1866-1872.

49. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в $p^3\text{H}$ и $n^3\text{He}$ каналах ядра ^4He на основе потенциальных кластерных моделей // ЯФ 1995. Т.58. С.1377-1384; Dubovichenko S.B. Photonuclear processes in the channels $p^3\text{H}$ and $n^3\text{He}$ of the ^4He nucleus in potential cluster models // Phys. Atom. Nucl. 1995. V.58. P.1295-1302.

50. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В., Сахарук А.А. Потенциальное описание упругого $N^6\text{Li}$ и αt рассеяния // ЯФ 1993. Т.56. С.90-106; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V., Sakharuk A.A. Potential description of $n^6\text{Li}$ and $^3\text{H}^4\text{He}$ elastic-scattering // Phys. Atom. Nucl. 1993. V.56. P.1044-1053.

51. Дубовиченко С.Б., Джазаиров Кахраманов А.В. Потенциальное описание упругого $\alpha\alpha$, $^2\text{H}^6\text{Li}$ и $N^7\text{Li}$ рассеяния // ЯФ 1992. Т.55. С.2918-2926; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Potential description of elastic $\alpha\alpha$, $^2\text{H}^6\text{Li}$, and $N^7\text{Li}$ scattering // Sov. J. Nucl. Phys. USSR 1992. V.55. P.1632-1636.

52. Дубовиченко С.Б. Фотопроцессы в $^4\text{He}^{12}\text{C}$ канале ядра ^{16}O на основе потенциальной кластерной модели // ЯФ 1996. Т.59. С.447-453; Dubovichenko S.B. Photonuclear processes in the $^4\text{He}^{12}\text{C}$ channel of the ^{16}O nucleus in potential cluster models // Phys. Atom. Nucl. 1996. V.59. P.421-427.

53. Дубовиченко С.Б. Фоторазвал ядра ^7Li в $n^6\text{Li}$ канал в потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями // ЯФ 1997. Т.60. С.254-258; Dubovichenko S.B. Photodisintegration of the ^7Li nucleus through the $n^6\text{Li}$ channel in the potential cluster model involving forbidden states // Phys. Atom. Nucl. 1997. V.60. P.195-199.

54. Дубовиченко С.Б. Каналы легких атомных ядер в потенциальных кластерных моделях // Вестник Каз.АТиСО. Алматы. 2006. №1. С.75-109.

55. Frick R. et al. Strong tensor term in the optical potential for 20 MeV // Phys. Rev. Lett. 1980. V.44. P.14-16.

56. Nishioka H., Tostevin J.A., Johnson R.C. Deformation effects in aligned ${}^6\text{Li}$ scattering // Phys. Lett. 1983. V.124B. P.17-20.

57. Merchant A.C., Rowley N. Alpha deuteron cluster model of ${}^6\text{Li}$ including tensor forces // Phys. Lett. 1985. V.B150. P.35-40.

58. Kukulin V.I. et al. Detailed study of the cluster structure of light nuclei in a three body model. I. Ground state of ${}^6\text{Li}$ // Nucl. Phys. 1984. V.A417. P.128-156.

59. Kukulin V.I. et al. Detailed study of the cluster structure of light nuclei in a three body model. II. The spectrum of low lying of nuclei with $A=6$ // Nucl. Phys. 1986. V.A453. P.365-388.

60. Kukulin V.I. et al. Detailed study of the cluster structure of light nuclei in a three body model. III. Electromagnetic structure of ${}^6\text{Li}$ // Nucl. Phys. 1990. V.A517. P.221-263.

61. Lehman D.R., Parke W.C. Shell structure of the $A=6$ ground states from three body dynamics // Phys. Rev. 1983. V.C28. P.364-382.

62. Lehman D.R., Parke W.C. $A=6$ structure from three body dynamics // Phys. Rev. Lett. 1983. V.50. P.98-101.

63. Lehman D.R. Excluded bound state in the $S_{1/2}$ N^4He interaction and the three body binding energies of ${}^6\text{He}$ and ${}^6\text{Li}$ // Phys. Rev. 1982. V.C25. P.3146-3154.

64. Дубовиченко С.Б. Тензорные ${}^2\text{H}^4\text{He}$ взаимодействия в потенциальной кластерной модели с запрещенными состояниями // ЯФ 1998. Т.61. С.210-217; Dubovichenko S.B. Tensor ${}^2\text{H}^4\text{He}$ interactions in the potential cluster model involving forbidden states // Phys. Atom. Nucl. 1998. V.61. P.162-168.

65. Kukulin V.I., Pomerantsev V.N., Cooper S.G., Dubovichenko S.B. Improved ${}^2\text{H}^4\text{He}$ potentials by inversion: The tensor force and validity of the double folding model // Phys. Rev. 1998. V.C57. P.2462-2473.

66. Neudatchin V.G., Obukhovskiy I.T., Smirnov Yu.F. A nonrelativistic potential model with forbidden state for the NN interaction at small distances // Phys. Lett. 1973. V.B43. P.13-17.

67. Neudatchin V.G. et al. Attractive potential with forbidden states for the NN interaction // *Phys. Rev.* 1975. V.C11. P.128-135.

68. Дубовиченко С.Б., Жусупов М.А. Описание NN взаимодействий потенциалом с запрещенными состояниями // *Изв. АН Каз.ССР сер. физ.-мат.* 1982. №6. С.34-39.

69. Kukulin V.I., et al. The NN potential with forbidden state suggested from a six-quark model with one-pion exchange // *Phys. Lett.* 1984. V.B135. P.20-27.

70. Дубовиченко С.Б. Глубокий экспоненциальный потенциал NN взаимодействия // *ЯФ* 1997. Т.60. С.704-706; Dubovichenko S.B. Deep exponential potential of nucleon-nucleon interaction // *Phys. Atom. Nucl.* 1997. V.60. P.621-622.

71. Дубовиченко С.Б. Формфакторы дейтрона для Нимегенских потенциалов // *ЯФ* 2000. Т.63. С.804-808; Dubovichenko S.B. Deuteron form factors for the Nijmegen potentials // *Phys. Atom. Nucl.* 2000. V.63. P.734-738. Дубовиченко С.Б., Страковский И.И. Простые локальные NN потенциалы с запрещенными состояниями и поляризация в *ed* рассеянии // *ЯФ* 2000. Т.63. С.646-651; Dubovichenko S.B., Strakovsky I.I. Simple local NN potentials involving forbidden states and polarization in *ed* scattering // *Phys. Atom. Nucl.* 2000. V.63. P.582-587.

72. Strakovsky I.I., Dubovichenko S.B. Electron deuteron elastic scattering in a simple NN potential with excluded spurious states: non-relativistic calculations // *Bull. Amer. Phys. Soc.* 1999. V.44. P.731.

73. Дубовиченко С.Б. Альтернативный метод решения обобщенной матричной задачи на собственные значения // *Изв. НАН РК сер. физ.-мат.* 2007. № 4. С.52-55.

74. Дубовиченко С.Б. Метод невязок для решения задачи на собственные значения для системы дифференциальных уравнений второго порядка // *Изв. НАН РК сер. физ.-мат.* 2007. №4. С.49-51.

75. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физ. мат. лит. 1976. 575с.; Kamke E. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*. I.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. B.G. Teubner. Leipzig, 1977. 575p.

76. Абрамовиц И.Г. и др. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. Дифференцирование и интегрирование. М.: Физ. мат. лит. 1961. 350с.; Abramowitz I.G. Supplemental math library. Mathematical analysis. Differentiation and integration. M. Fiz. Math. Lit. 1961. 350p.

77. Копченова И.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Физ. мат. лит. 1972. 366с.; Kopchenova I.V., Maron I.A. Computational Mathematics in the examples and tasks. M. Fiz. Math. Lit. 1972. 399p.

78. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Физ. мат. лит. 1968. 618с.; Madelung E. Die mathematischen hilfsmittel des physikers. Sechste. Berlin. 1957. 618p.

79. Троицкий В.А. Инженерные расчеты на ЭВМ. Л.: Машиностроение. 1979. 287с.; Troizkii V.A. Engineering calculations on a computer. Leningrad. Mechanical Engineering. 1979. 287p.

80. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. М.: Мир. 1970. 350с.; Jeffres H., Swirles B. Methods of mathematical physics. Cambridge. Cam. Univ. Press. 1966. 350p.

81. Бабич В.М., и др. Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука. 1964. 367с.; Babich V.M. et al. Supplemental mathematical library. Linear equations of mathematical physics. M. Nauka. 1964. 367p.

82. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. М.: Атомиздат. 1972. 398с.; Mathews J. Walker R. Mathematical method of physics. W.A. Benjamin Inc. New-York. 1964. 498p.

83. Загуский В.Л. Справочник по численным методам решения уравнений. М.: Физ. мат. лит. 1960. 215с.; Zaguskii V.L. Guide on numerical methods of solution of equations. Fiz. Mat. Lit. Moscow. 1960. 215p. (in Russian).

84. Мелентьев П.В. Приближенные вычисления. М.: Физ. мат. лит. 1962. 387с.; Melent'ev P.V. Approximate calculus. Fiz. Mat. Lit. Moscow. 1962. 387p. (in Russian).

85. Марчук Г.И., Колесов В.Е. Применение численных методов для расчета нейтронных сечений. М.: Атомиздат. 1970. 304с.; Marchuk G.I., Kolesov V.E. Application of Numerical Methods to Neutron Cross-Section Calculations. Atomizdat. Moscow. 1970. 304p. (in Russian).

86. Демидович Б.П., Марон И.Ф. Основы вычислительной математики. М.: Наука. 1966. 664с.; Demidovich B.P., Maron I.F. Foundation of calculus mathematics. Nauka. Moscow. 1966. 664p. (in Russian).

87. Дубовиченко С.Б. Трехтельная модель ядра ${}^7\text{Li}$ // Изв. РАН сер. физ. 2000. Т.64. С.2289-2292; Dubovichenko S.B. Three bode model of the ${}^7\text{Li}$ // Bull. Russ. Academy of Sci. Ser. Fiz. 2000. V.64. P. 2289-2292.

88. Ходгсон П.Е. Оптическая модель упругого рассеяния. М.: Атомиздат. 1966. 230с.; Hodgson, P. E. The Optical model of elastic scattering. Clarendon Press. Oxford. 1963. 211p.

89. Plattner G.R., Viollier R.D. Coupling constants of commonly used nuclear probes // Nucl. Phys. 1981. V.A365. P.8-12.

90. Mukhamedzhanov A.M., Tribble R. E. Connection between asymptotic normalization coefficients, sub threshold bound states, and resonances // Phys. Rev. 1999. V.C59. P.3418-3424.

91. Блохинцев Л.Д., Борбей И., Долинский Э.И. Ядерные вершинные константы // ЭЧАЯ 1977. Т.8. С.1189-1245.

92. Дубовиченко С.Б. Фазовый анализ упругого ${}^4\text{He}^4\text{He}$ -рассеяния в области энергий 40-50 МэВ // ЯФ 2008. Т.71. С.66-75; Dubovichenko S.B. Partial-wave analysis of elastic ${}^4\text{He}^4\text{He}$ scattering in the energy range 40-50 MeV // Phys. Atom. Nucl. 2008. V.71. P.65-74.

93. Barnet A. et al. Coulomb wave function for all real η and ρ // Comput. Phys. Comm. 1974. V.8. P.377-395.

94. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.М. Методы расчета кулоновских функций и фаз рассеяния // Вестник Каз.НПУ сер. физ.-мат. Алматы. 2003. № 1(7). С. 115-122.

95. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 832с.; Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. Nat. bur. Stand.

Washington. 1964. 1046p.

96. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимация // М.: Мир. 1980. 608с.; Luke Yu.L. Mathematical functions and their approximations. Academic Press. New York. 1975. 568p.

97. Melkanoff M.A. Fortran program for elastic scattering analysis with nuclear optical model // Univ. California Pres. Berkeley. Los Angeles. 1961. 116p.

98. Lutz H.F., Karvelis M.D. Numerical calculation of coulomb wave functions for repulsive coulomb fields // Nucl. Phys. 1963. V.43. P.31-44.

99. Melkanoff M. Nuclear optical model calculations // Meth. in Comput. Phys. Acad. Press N-Y. 1966. V.6. P.1-80.

100. Gody W.J., Hillstrom K.E. Chebyshev approximations for the coulomb phase shifts // Meth. Comput. 1970. V.111. P.671-677.

101. Smith W.R. Nuclear penetrability and phase shift subroutine // Usics Communs. 1969. V.1. P.106-112.

102. Froberg C.E. Numerical treatment of Coulomb wave functions // Rev. Mod. Phys. 1955. V.27. P.399-411.

103. Abramowitz M. Tables of Coulomb wave function. V.1. Washington. N.B.S. 1952. 141p.

104. Данилов В.Л. и др. Справочная математическая библиотека. Математический анализ. Функции, пределы, цепные дроби. М.: Физ. мат. лит. 1961. 439с.; Danilov V. L. et al. Reference mathematical library. Mathematical analysis. Functions, limits and continued fractions. Fiz. Mat. Lit. Moscow. 1961. 439p. (in Russian).

105. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа. 1965. 272с.; Kuznetsov D. S. Special functions; Vysshaya Shkola. Moscow. 1965. 272p. (in Russian).

106. Браун Д.Е., Джексон А.Д. Нуклон нуклонные взаимодействия. М.: Атомиздат. 1979. 246с.; Brown G.E., Jackson A.D. The nucleon-nucleon interaction. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. New York. American Elsevier Publ. Co. 1976. 242p.

107. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.М. Методы решения

обобщенной задачи на собственные значения // Вестник Каз.НПУ сер. из. мат. Алматы. 2003. №.1(7). С.110-115.

108. Дубовиченко С.Б., Такибаев Н.Ж., Чечин Л.М. Физические процессы в дальнем и ближнем космосе. Алматы: Дайк-Пресс. 2008. 228с.; Dubovichenko S.B., Takibaev N.Zh., Chechin L.M Physical Processes in the Far and Near Space. Almaty. Daik-Press. 2008. 228p. (in Russian); <http://www.arxiv.org/abs/1012.1705>.

109. Скорняков Л.А. Справочная математическая библиотека. Общая алгебра. М.: Наука. 1990. 591с.; Skornyakov L.A. Reference mathematical library. General algebra. Nauka. Moscow. 1990. 591p. (in Russian).

110. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Киев: Наукова думка. 1984. 598с.; Popov B.A., Tesler G. S. Computer calculation of functions, Naukova Dumka, Kiev, 1984, 598p. (in Russian).

111. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Мир. 1974. 832с.; Korn G., Korn T. Mathematical Handbook. Mc-Graw Hill Book Co. New-York. 1968. 832p.

112. Дубовиченко С.Б. Некоторые методы решения задач ядерной физики на связанные состояния // Вестник Каз.НУ сер. физ. Алматы. 2008. № 1. С.49-58.

113. Дубовиченко С.Б., Чечин Л.М. Современные методы программирования актуальных физических задач // Труды конф. "Современные проблемы и задачи информатизации в Казахстане". Каз.НТУ. Алматы. Казахстан. 6-10 октября 2004. С.358-390.

114. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. М.: Физ. мат. лит. 1962. 300с.; Mishina A.P., Proskuryakov I.V. Higher algebra. Fiz. Mat. Lit. Moscow. 1961. 439p. (in Russian).

115. Kukulín V.I., Vorontchev V.T., Pomerantsev V.N Three body calculation of $A=9$ nuclei with super-symmetric $\alpha\alpha$ potential // Few Body Syst. 1995. V.1. P.191-202.

116. Ворончев В.Т. и др. Изучение структуры и свойств ядер с $A=9$ в рамках мультикластерной динамической модели $2\alpha+N$ // ЯФ 1994. Т.57. С.1964-1980.

117. Мотт Н., Мессеи Г. Теория атомных столкновений. М.: Мир. 1969. 756с.; Mott N., Messey H. Yhe theory of atomic collisions. Clarendon Press. UK. 1965. 858p.

118. Дубовиченко С.Б. Вариационные методы в трех-тельной модели // Вестник Каз.ГАСА. 2003. № 9/10. С.227-232.

119. Дубовиченко С.Б. Компьютерная программа для расчета характеристик ядра ${}^7\text{Li}$ // Вестник Каз.НТУ. 2004. №5. С.174-182.

120. http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?mud|search_for=atomnuc!

121. Juster F.P. et al. Tritium electromagnetic form factors // Phys. Rev. Lett. 1985. V.55. P.2261-2264.

122. Beck D.H. et al. Tritium form factors at low q // Phys. Rev. 1984. V.C30. P.1403-1408.

123. Sick I. Precise nuclear radii from electron scattering // Phys. Lett. 1982. V.B116. P.212-214.

124. Afnan I.R., Tang Y.C. Investigation of nuclear three- and four-body systems with soft-core nucleon-nucleon potentials // Phys. Rev. 1968. V.175. P.1337-1345.

125. Krasnopolsky V.M., Kukulin V.I. A new many particle variational method // Czech. J. Phys. 1977. V.B27. P.290-304; Krasnopolsky V.M., Kukulin V.I. A stochastic variational method for few body systems // J. Phys. 1977. V.G3. P.795-811.

126. Никитиу Ф. Фазовый анализ. М.: Мир. 1983. 416с.; Nichitiu F. Phase shifts analysis in physics. Acad. Publ. Romania. 1980. 416p.

127. Дубовиченко С.Б. Фазовый анализ ${}^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния при 40-50 МэВ // Изв. ВУЗов сер. физ. 2007. № 6. С.74-79; Dubovichenko S.B. Phase analysis of ${}^4\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ scattering at energies of 40–50 MeV // Rus. Phys. J. 2007. V.50. P.605-611.

128. Heydenberg N.P., Temmer G.M. Alpha-Alpha scattering at low energies // Phys. Rev. 1956. V.104. P.123-134.

129. Russel J.L. et al. Scattering of alpha particles from Helium // Phys. Rev. 1956. V.104. P.135-142.

130. Tombrello T.A., Senhouse L.S. Elastic scattering of Alpha particles from Helium // Phys. Rev. 1963. V.129. P.2252-

2258.

131. Nilson R. et al. Alpha-Alpha particle scattering in the energy range 12.3 to 22.9 MeV // Phys. Rev. 1956. V.104. P.1673-1680.

132. Nilson R. et al. Investigation of excited states in ^8Be by α -particle scattering from Helium // Phys. Rev. 1958. V.109. P.850-860.

133. Steigert F.E., Samson M.B. Alpha-Alpha scattering from 12.88 to 21.62 MeV // Phys. Rev. 1953. V.92. P.660-664.

134. Chien W.S., Brown R.E. Study of the $\alpha\alpha$ system below 15 MeV // Phys. Rev. 1970. V.C10. P.1767-1784.

135. Bredin D.J. et al. The scattering of alpha particles by helium // Proc. Roy. Soc. 1959. V.A251. P.143-155.

136. Darriulat P., Igo G., Pugh H.G. Elastic scattering of alpha particles by helium between 53 and 120 MeV // Phys. Rev. 1965. V.137. P.B315-B323.

137. Conzett H.E. et al. Alpha-alpha scattering in the 36.8 to 47.3 MeV // Phys. Rev. 1960. V.117. P.1075-1079.

138. Igo G. Optical model analysis of the scattering of alpha particles from helium // Phys. Rev. 1960. V.117. P.1079-1085.

139. Burcham W.E. et al. Alpha-alpha scattering at 38/5 MeV // Nucl. Phys. 1957. V.3. P.217-220.

140. Буртебаев Н.Т. и др. Препринт № 88-01 ИЯФ (Алматы, Казахстан, 1988).

141. Van Niftrik G. J.C. et al. Elastic scattering of 51 MeV alpha particles from helium // In "Compt. Congr. Int. Phys. Nucl." Paris. 1964. V.2. P.858-860.

142. Дубовиченко С.Б. Компьютерная программа для фазового анализа упругого $^4\text{He}^4\text{He}$ рассеяния // Труды конф. "Современные проблемы и задачи информатизации в Казахстане". Алматы. Каз.НТУ. 2004. С.327-351.

143. Conzett H.E., Slobodrian R.J. // In "Compt. Renu. Cong. Int. Phys. Nucl." Paris. 1964. V.2, P.228; Conzett H. E. et al. // Bull. Amer. Phys. Soc. 1957. V.2. P.305.

144. Буртебаев Н.Т., Дуйсебаев А.Д. Сечения упругого альфа - альфа рассеяния при 49.9 МэВ // В сб. "Тезисы XXX

совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра.” Ленинград. 1980. С.393.

145. Ajzenberg-Selove F. Energy levels of light nuclei: A=5-10 // Nucl. Phys. 1979. V.A320. P.1-224.

146. Dubovichenko S.B., Burtebayev N., Dzhazairov-Kakhramanov A.V., Zazulin D.M. Phase shift analysis and potential description of the elastic ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ scattering at low energies // Uz. J. Phys. 2009. V.11. № 2. P.87-94.

147. Jones C.M. et al. The scattering of alpha particles from ^{12}C // Nucl. Phys. 1962. V.37. P.1-9.

148. Plaga R. et al. The scattering of alpha particles from ^{12}C and the $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ stellar reaction rate // Nucl. Phys. 1987. V.A465. P.291-316.

149. Tilley D. R., Weller H. R., Cheves C. M. Energy levels of light nuclei A=16-17 // Nucl. Phys. 1993. V.A564. P.1-183.

150. Дубовиченко С.Б. и др. Фазовый анализ упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния при энергиях 1.5-6.5 МэВ. // Доклады НАН РК 2008. №6. С.24-32.

151. Дубовиченко С.Б. и др. Фазовый анализ и потенциальное описание упругого ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ рассеяния при низких энергиях // Изв. ВУЗов сер. физ. 2009. № 7. С.55-62; Dubovichenko S.B. et al. Phase analysis and potential description of elastic ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ scattering at low energies // Rus. Phys. J. 2009. V.52. P.715-724.

152. Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. Астрофизический S-фактор радиационного ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ захвата // Изв РАН сер. физ. 2011. №11. С.1614-1620; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Astrophysical S-factor of the ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ radiative captures at low energies // Uz. J. Phys. 2009. V.11. № 4. P.239-246; Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. Астрофизический S-фактор радиационного ${}^4\text{He}^{12}\text{C}$ захвата при низких энергиях // Доклады НАН РК 2009. №2. С.9-15.

153. Salpeter E.E. Nuclear reactions in stars // Phys. Rev. 1957. V. 107. P. 516-525; Salpeter E.E. Nuclear Reactions in stars without hydrogen // Astrophys. Jour. 1952. V. 115. P. 326;

Rolfs C. Nuclear reactions in stars far below the Coulomb barrier // *Progress in Particle and Nuclear Physics* 2007. V. 59. P. 43.

154. Дубовиченко С.Б. Программа поиска фаз упругого рассеяния ядерных частиц со спином $1/2$ // *Вестник Каз.НТУ* 2004. №3. С.137-144.

155. Дубовиченко С.Б. и др. Фазовый анализ дифференциальных сечений упругого $p^{12}\text{C}$ рассеяния при астрофизических энергиях // *Изв. НАН РК сер. физ.-мат.* 2007. №6. С.58-67.

156. Jahns M.F., Bernstein E.M. Polarization in $p\alpha$ scattering // *Phys. Rev.* 1967. V.162. P.871-877.

157. Barnard A., Jones C., Well J. Elastic scattering of 2-11 MeV proton by ^4He // *Nucl. Phys.* 1964. V.50. P.604-620.

158. Brown R.I., Haerberli W., Saladin J.X. Polarization in the scattering of protons by α particles // *Nucl. Phys.* 1963. V.47. P.212-213.

159. Jackson H.L. et al. The $^{12}\text{C}(p,p)^{12}\text{C}$ differential cross section // *Phys. Rev.* 1953. V.89. P.365-269.

160. Jackson H.L. et al. The excited states of the ^{13}N nucleus // *Phys. Rev.* 1953. V.89. P.370-374.

161. Дубовиченко С.Б. Фазовый анализ $p^{12}\text{C}$ рассеяния при астрофизических энергиях // *Изв. ВУЗов сер. физ.* 2008. №11. С.21-27; Dubovichenko S.B. Phase analysis of elastic $p^{12}\text{C}$ scattering for astrophysical energies // *Rus. Phys. J.* 2008. V.51. P.1136-1143.

162. Zazulin D.M. et al. Scattering of protons from ^{12}C // *The 6th Int. Conf. "Modern Problems of Nuclear Physics"* Tashkent. Uzbekistan. 2006. P.127; Baktybaev M.K. et al. Elastic scattering of protons from ^{12}C , ^{16}O and ^{27}Al // *The 4th Eurasia Conf. "Nucl. Sci. and its Appl."* Baku. Azerbaijan. 2006. P.56.

163. Moss S.J., Haerberli W. The polarization of protons scattered by Carbon // *Nucl. Phys.* 1965. V.72. P.417-435.

164. Barnard A.C.L. et al. Cross section as a function of angle and complex phase shifts for the scattering of protons from ^{12}C // *Nucl. Phys.* 1966. V.86. P.130-144.

165. Lane R.O. et al. The Angular Distributions of Neutrons Scattered from Various Nuclei // *Ann. Phys.* 1961. V.12. P.135.

166. Ajzenberg-Selove F. Energy level of light nuclei $A=13,14,15$ // *Nucl. Phys.* 1991. V.A523. P.1-196.

167. Heil M. et al. The (n, c) cross section of ${}^7\text{Li}$ // *Astro-phys. J.* 1998. V.507. P.997; Guimaraes V. and Bertulani C.A. Light radioactive nuclei capture reactions with phenomenological potential models // *arXiv:0912.0221v1 [nucl-th]* 1 Dec 2009; Masayuki Igashira, Toshiro Ohsaki Neutron capture nucleosynthesis in the Universe // *Sci. Tech. Adv. Materials* 2004. V.5. P.567; Nagai Y. et al. Fast neutron capture reactions in nuclear astrophysics // *Hyperfine Interactions* 1996. V.103. P.43; <http://iopscience.iop.org/1468-6996/5/5-6/A06>; Liu Z.H. et al. Asymptotic normalization coefficients and neutron halo of the excited states in ${}^{12}\text{B}$ and ${}^{13}\text{C}$ // *Phys. Rev.* 2001. V.C64. P.034312.

168. Дубовиченко С.Б. Термоядерные процессы Вселенной. Изд. 2-е. Серия «Казахстанские космические исследования». Т.7. Алматы: А-три, 2011. 402с.; Dubovichenko S.B. Thermonuclear processes of the Universe. Second Edit. Series "Kazakhstan space research" V.7. A-tri. Almaty. 2011. 402. (in Russian); <http://xxx.lanl.gov/abs/1012.0877>.

169. Dubovichenko S.B. Thermonuclear Processes of the Universe. New-York: NOVA Sci. Publ., 2012. 187p.; https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=31125 (To be published).

170. Adelberger E.G. et al. Solar fusion cross sections. II. The pp chain and CNO cycles // *Rev. Mod. Phys.* 2011. V.83. P.195-245.

171. Дубовиченко С.Б., Джазаиров-Кахраманов А.В. Астрофизический S-фактор радиационного $p^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{N}\gamma$ захвата // *Изв. ВУЗов сер. физ.* 2009. №8. С.58-64; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Astrophysical S-factor for $p^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{N}\gamma$ radiative capture // *Rus. Phys. J.* 2009. V.52. P.833-840.

172. Дубовиченко С.Б. и др. Астрофизический S-фактор радиационного $p^6\text{Li}$ захвата при низких энергиях // *Изв. ВУЗов. сер. физ.* 2010. №7. С.78-85; Dubovichenko S.B. et al.

Astrophysical S-factor of radiative $p^6\text{Li}$ capture at low energies // *Rus. Phys. J.* 2010. V.53. P.743-749; Дубовиченко С.Б., Джазаиров - Кахраманов А.В. Астрофизический S-фактор радиационного $p^6\text{Li}$ захвата // Доклады НАН РК 2009. №6. С.41-45.

173. Petitjean C., Brown L., Seyler R. Polarization and phase shifts in $^6\text{Li}(p,p)^6\text{Li}$ from 0.5 to 5.6 MeV // *Nucl. Phys.* 1969. V.A129. P.209-219.

174. Baktybaev M.K. et al. The scattering of protons from ^6Li and ^7Li nuclei // The 4th Eurasia Conf. "Nucl. Sci. and its Appl." Baku. Azerbaijan. 2006. P.62; Burtebaev N. et al. The new experimental data on the elastic scattering of protons from ^6Li , ^7Li , ^{16}O and ^{27}Al nuclei // The 5th Eurasian Conf. "Nucl. Sci. and its Appl.". Ankara. Turkey. 2008. P.40.

175. Дубовиченко С.Б. и др. Астрофизический S-фактор реакции $p^6\text{Li} \rightarrow ^7\text{Be}\gamma$ захвата // *ЯФ* 2011. Т.74. С.1013-1028; Dubovichenko S.B. et al. Astrophysical S factor for the radiative-capture reaction $p^6\text{Li} \rightarrow ^7\text{Be}\gamma$ // *Phys. Atom. Nucl.* 2011. V.74. P.984-1000.

176. Skill M. et al. Differential cross section and analyzing power for elastic scattering of protons on ^6Li below 2.2 MeV // *Nucl. Phys.* 1995. V.A581. P.93-106.

177. Дубовиченко С.Б., Зазулин Д.М. Фазовый анализ упругого $p^6\text{Li}$ рассеяния при астрофизических энергиях // *Изв. ВУЗов. сер. физ.* 2010. №5. С.20-25; Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Phase analysis of elastic $p^6\text{Li}$ scattering at astrophysical energies // *Rus. Phys. J.* 2010. V.53. P.458-464.

178. Dubovichenko S.B., Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Astrophysical S-factors of radiative capture of protons on ^2H , ^3H , ^6Li and ^{12}C nuclei // <http://xxx.lanl.gov/abs/1005.1794>. 44p.

179. Янке Е., Емде Ф., Леш Ф. Специальные функции, М.: Наука, 1968. 344с.; Janke E., Emde F., Losch F. *Spesial functions*. B.G. Teubler. Stuttgart. 1960. 344p.

180. Tombrello T.A. Phase shift analysis for $^3\text{He}(p,p)^3\text{He}$ // *Phys. Rev.* 1965. V.138. P.B40-B47.

181. Clegg T. et al. The elastic scattering of protons from

^3He from 4.5 to 11.5 MeV // Nucl. Phys. 1964. V.50. P.621-628.

182. Tombrello T.A. et al. The scattering of protons from ^3He // Nucl. Phys. 1962. V.39. P.541-550.

183. Hebbard D.F., Vogl J.L. Elastic scattering and radiative capture of protons by ^{13}C // Nucl. Phys. 1960. V.21. P.652-675.

184. Galster W. et al. Target and detection techniques for the $^{13}\text{N}(p,\gamma)^{14}\text{O}$ reaction using radioactive ion beams: $^{13}\text{C}(p,\gamma)^{14}\text{N}$ reaction as a test case // Phys. Rev. 1991. V.C44. P.2776-2787.

185. Дубовиченко С.Б. Фазовый анализ упругого $p^{13}\text{C}$ рассеяния // ЯФ 2012. Т.75. №2; Dubovichenko S.B. Phase shifts analysis of the elastic $p^{13}\text{C}$ scattering // Phys. Atom. Nucl. 2012. V.75. №2.

186. Дубовиченко С.Б. Астрофизический S-фактор радиационного $p^{13}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N}\gamma$ захвата // ЯФ 2012. Т.75. №3; Dubovichenko S.B. Astrophysical S-factor radiative $p^{13}\text{C}$ capture // Phys. Atom. Nucl. 2012. V.75. №2.

187. Фаулер У.А. Экспериментальная и теоретическая ядерная астрофизика, поиски происхождения элементов // УФН. 1985. Т.145. С.441-488; Fowler W.A. Experimental and Theoretical Nuclear Astrophysics: the Quest for the Original of the Elements. Nobel Lecture. Stockholm. 8 Dec. 1983.

188. Дубовиченко С.Б. Астрофизические S-факторы радиационного $^3\text{He}^4\text{He}$, $^3\text{H}^4\text{He}$ и $^2\text{H}^4\text{He}$ захвата // ЯФ 2010. Т.73. С.1573-1584; Dubovichenko S.B. Astrophysical S factors of radiative $^3\text{He}^4\text{He}$, $^3\text{H}^4\text{He}$, and $^2\text{H}^4\text{He}$ capture // Phys. Atom. Nucl. 2010. V.73. P.1517-1522; Дубовиченко С.Б. Астрофизический S-фактор $p^7\text{Li} \rightarrow ^8\text{Be}\gamma$ захвата при низких энергиях // Изв. ВУЗов. сер. физ. 2010. №12. С.29-38; Dubovichenko S.B. Astrophysical S-factor of the $p^7\text{Li} \rightarrow ^8\text{Be}\gamma$ capture at low energies // Rus. Phys. J. 2010. V.53. P.1254-1263; Дубовиченко С.Б. Астрофизический S-фактор радиационного $p^9\text{Be}$ захвата // Изв. ВУЗов сер. физ. 2011. №7. С.80-86; Dubovichenko S.B. Astrophysical S-factor of the $p^9\text{Be} \rightarrow ^{10}\text{B}\gamma$ radiative capture // Rus. Phys. J. 2011. V.54. P.814-821.

189. Dubovichenko S.B. Dzhazairov-Kakhramanov A.V. Astrophysical S-factor of the radiative $p^2\text{H}$ capture // Euro. Phys.

Jour. 2009. V.A39. P.139-143; Дубовиченко С.Б. М1 процесс и астрофизический S -фактор реакции p^2H захвата // Изв. ВУЗов сер. физ. 2011. №2. С.28-34; Dubovichenko S.B. Contribution of the M1 process to the astrophysical S -factor of the p^2H radiative capture // Rus. Phys. J. 2011. V.54. P.157-164; Дубовиченко С.Б. Астрофизический S -фактор радиационного захвата протонов на ядрах 3H и 7Li // ЯФ 2011. Т.74. С.378-390; Dubovichenko S.B. Astrophysical S factors for radiative proton capture by 3H and 7Li nuclei // Phys. Atom. Nucl. 2011. V.74. P.358-370.

190. Ali S., Ahmad A.A.Z., Ferdous N. A suvey of N^4He interaction // Prepr. Int. Center for Theor. Phys. 1984. 1C/84/195. 108p.

191. Schmelzbach P. et al. Phase shift analysis of $^2H^4He$ elastic scattering // Nucl. Phys. 1972. V.A184. P.193-213.

192. McIntair L., Haeberli W. Phase shift analysis of $^2H^4He$ scattering // Nucl. Phys. 1967. V.A91. P.382-398.

193. Bruno M., Cannata F., D'Agostino M., Maroni C., Massa I. Experimental study on low energy $^2H(^4He, ^4He)^2H$ elastic scattering // INFN Italy. Bologna. 1981. AE-81/9. 15P.

194. Jenny B. et al. Phase shift analysis of $d\alpha$ elastic scattering between 3 and 43 MeV // Nucl. Phys. 1983. V.A397. P.61-101.

195. Keller L., Haeberli W. Vector polarization measurements and phase shift analysis for $^2H^4He$ scattering between 3 and 11 MeV // Nucl. Phys. 1970. V.A156. P.465-476.

196. Simon G., Schmitt Ch., Walther V.H. Elastic electron and magnetic e^2H scattering at low momentum transferred // Nucl. Phys. 1981. V.A364. P.285-296.

197. Tilley D.R., Weller H.R., Hale G.M. Energy levels of light nuclei $A=4$ // Nucl. Phys. 1992. V.A541. P.1-157.

198. <http://cdfc.sinp.msu.ru/cgi-bin/muh/radchartnucl.cgi?zmin=0&zmax=14&tdata=123456>

199. Purcell J.E. et al. Energy levels of light nuclei $A=3$ // Nucl. Phys. 2010. V.A848. P.1-74.

200. Tilley D.R. et al. Energy level of light nuclei $A=5,6,7$ //

Nucl. Phys. 2002. V.A708. P.3-163.

201. Mueller P. et al. Nuclear charge radius of ^8He // Phys. Rev. Lett. 2007. V.99. P.252501-252505.

202. Jenny B. et al. Phase shift analysis of $^3\text{He}(^2\text{H}, ^2\text{H})^3\text{He}$ scattering // Nucl. Phys. 1980. V.A337. P.77-85.

203. Kanada H. et al. Characteristic features of specific distortion in light nuclear systems // Nucl. Phys. 1986. V.A457. P.93-97; Kanada H., Kaneko T., Tang Y.C. Multiconfiguration resonating group study of the five-nucleon system // Nucl. Phys. 1989. V.A504. P.529-532; Chwieroth F.S., Tang Y.C., Tompson D.R. Microscopic coupled channel study of the five-nucleon system with RGM // Phys. Rev. 1974. V.C9. P.56-65; Chwieroth F.S. et al. Study of $^2\text{H}^3\text{H}$ and $^2\text{H}^3\text{He}$ systems with RGM // Phys. Rev. 1973. V.C8. P.938-942; Shen P.N. et al. Specific distortion effect in the five-nucleon system // Phys. Rev. 1975. V.C31. P.2001-2008.

204. Spiger R., Tombrello T.A. Scattering of He^3 by He^4 and of He^4 by Tritium // Phys. Rev. 1967. V.163. P.964-984.

205. Ivanovich M., Young P.G., Ohlsen G.G. Elastic scattering of several hydrogen and helium isotopes from tritium // Nucl. Phys. 1968. V.A110. P.441-462.

206. Tilley D.R. et al. Energy level of light nuclei. $A=8,9,10$ // Nucl. Phys. 2004. V.A745. P.155-363.

207. Буркова Н.А., Дубовиченко С.Б. Трехтельная $^4\text{He}^3\text{H}^2\text{H}$ модель ядра ^9Be // Изв. ВУЗов сер. физ. 2008. №1. С.86-91; Burkova N.A., Dubovichenko S.B. $^4\text{He}^3\text{H}^2\text{H}$ three-body model of the ^9Be nucleus // Rus. Phys. J. 2008. V.51. P.99-104.

208. Shoda K., Tanaka T. Clusters in the photodisintegration of ^9Be // Phys. Rev. 1999. V.C59. P.239-252.

209. Ali S. and Bodmer A.R. Phenomenological α - α potential // Nucl. Phys. 1966. V.80. P.99-112.

210. Jones C.M. et al. Alpha-alpha scattering in the energies range 5 to 9 MeV // Phys. Rev. 1969. V.117. P.525-530.

211. Igamov S.B., Yarmukhamedov R. Modified two-body potential approach to the peripheral direct capture astrophysical $a+A \rightarrow B+\gamma$ reaction and asymptotic normalization coefficients //

Nucl. Phys. 2007. V.A781. P.247-276.

212. Brune C.R. et al. Sub-Coulomb α transfers on ^{12}C and the $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ S-factor // Phys. Rev. Lett. 1999. V.83. P.4025-4028.

213. Ajzenberg-Selove F. Energy level of light nuclei A=11-12 // Nucl. Phys. 1990. V.A506. P.1-158.

Научное издание

Дубовиченко Сергей Борисович

**ИЗБРАННЫЕ МЕТОДЫ
ЯДЕРНОЙ АСТРОФИЗИКИ**

Методы ядерной физики в избранных
задачах ядерной астрофизики

ИБ № 5576

Подписано в печать 19.12.11. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 19.4 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 007.

Издательство «Қазақ университеті» Казахского национального
университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр. аль-Фараби, 71. КазНУ.

Отпечатано в типографии издательства «Қазақ университеті».



**Дубовиченко
Сергей
Борисович**

Член-корреспондент
Российской Академии
Естествознания
(РАЕ Россия)

Академик
Международной
Академии
Информатизации
(МАИН Казахстан)

Член Нью-Йоркской
Академии Наук
(NYAS USA)

*Доктор физико -
математических наук
Казахстана и России
по специальностям
01.04.16 и 05.13.18*

*Член Европейского
Физического Общества*

*Лауреат премии ЛКСМ
КазССР*

*Лауреат гранта
международного фонда
Дж. Сороса*

*Главный научный
сотрудник
Астрофизического
института
им. В.Г. Фесенкова
НЦКИТ НКА РК*

Профессор

<http://www.dubovichenko.ru>
dubovichenko@gmail.com
dubovichenko@mail.ru